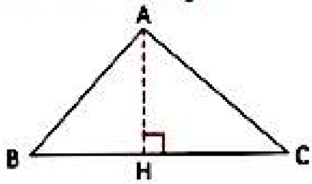
BENABOUD
TÉL : 0780662542

POLYGONES ET AIRES

① Aire d'un triangle



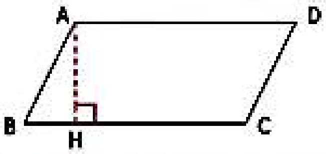
- L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur correspondante.
- [AH] est la hauteur issue de A sur [BC].

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AH$$

Soit $b = BC$ et $h = AH$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times b \times h$$

② Aire d'un parallélogramme



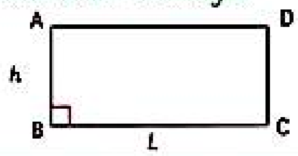
- L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur correspondante.

$$\text{Aire}(ABCD) = BC \times AH$$

Soit $b = BC$ et $h = AH$

$$\text{Aire} = b \times h$$

③ Aire d'un rectangle



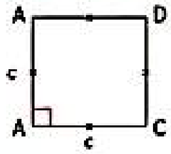
- L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur.

$$\text{Aire}(ABCD) = L \times l$$

Soit L la longueur et l la largeur

$$\text{Aire} = L \times l$$

④ Aire d'un carré

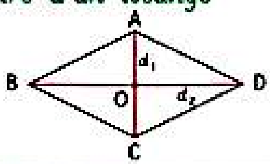


- L'aire d'un carré est égale au carré de la mesure d'un côté.

$$\text{Aire}(ABCD) = c^2$$

où c est la mesure du côté.

⑤ Aire d'un losange

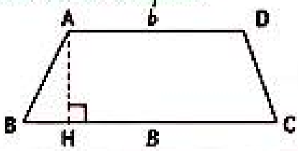


- L'aire d'un losange est égale à la moitié du produit de ses deux diagonales.

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

où $d_1 = AC$ et $d_2 = BD$

⑥ Aire d'un trapèze

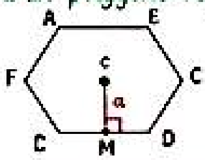


- L'aire d'un trapèze est égale au demi-produit de la somme des bases par la hauteur.

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

où B et b sont les bases et h la hauteur.

⑦ Aire d'un polygone régulier

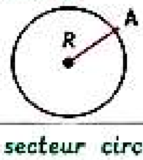


- L'aire d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit du périmètre par l'apothème.

$$\text{Aire} = \frac{P \times a}{2}$$

où P est le périmètre et a l'apothème.

⑧ Aire d'un cercle

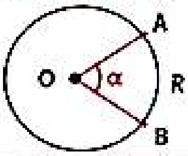


- L'aire d'un cercle est égale au produit de π par le carré du rayon.

$$\text{Aire} = \pi R^2$$

où R est le rayon du cercle. $(\pi \approx 3{,}14)$

⑨ Aire d'un secteur circulaire

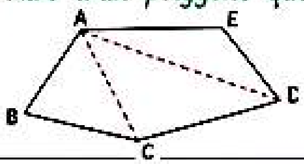


- L'aire d'un secteur d'angle α (en degrés) est égale à la fraction $\frac{\alpha}{360}$ de l'aire du cercle correspondant.

$$\text{Aire} = \frac{\alpha}{360} \times \pi R^2$$

où R est le rayon du cercle.

⑩ Aire d'un polygone quelconque



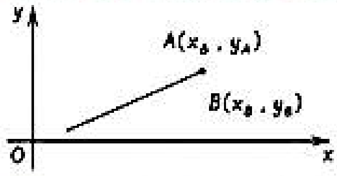
- Pour calculer l'aire d'un polygone quelconque, on le décompose en triangles, on calcule l'aire de chaque triangle puis on additionne les aires.

Aire du polygone = Somme des aires des triangles

BENABOUD
TÉL : 0780662542

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN

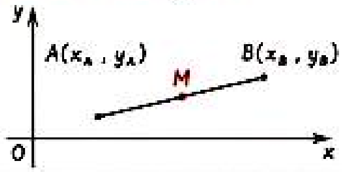
① Distance entre deux points



- Soient $A(x_A , y_A)$ et $B(x_B , y_B)$ deux points du plan.
- La distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

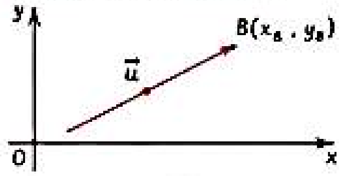
② Milieu d'un segment



- Si $M(x_M , y_M)$ est le milieu de $[AB]$ alors :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

③ Vecteur et coordonnées



- Les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sont :

$$\vec{u}(x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A)$$

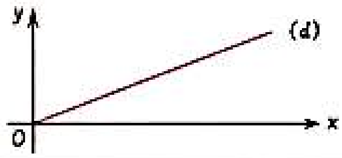
$$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A)$$

④ Colinéarité de deux vecteurs

- Les vecteurs $\vec{u}(x_1 ; y_1)$ et $\vec{v}(x_2 ; y_2)$ sont colinéaires si et seulement si :

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

⑤ Équation d'une droite



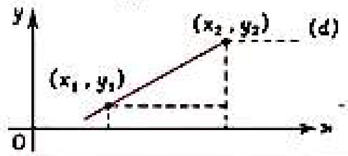
- Une droite non verticale admet une équation de la forme :

$$y = ax + b \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$y = ax + b$$

a : coefficient directeur
b : ordonnée à l'origine

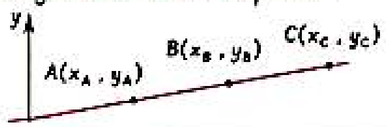
⑥ Pente (coefficient directeur)



- Le coefficient directeur d'une droite (d) passant par deux points $A(x_1 , y_1)$ et $B(x_2 , y_2)$ avec $x_1 \neq x_2$ est :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

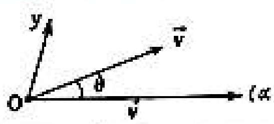
⑦ Alignement de trois points



- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

⑧ Produit scalaire



- Si θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \cos\theta$$

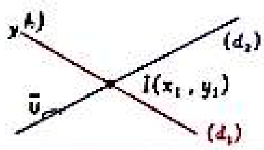
Si $\vec{u}(x_1 ; y_1)$ et $\vec{v}(x_2 ; y_2)$
alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$
$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

⑨ Distance d'un point à une droite

- Soit $(d) : ax + by + c = 0$ et $M(x_0 , y_0)$ un point du plan.
- La distance de M à (d) est :

$$d(M,d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⑩ Intersection de deux droites



- Le point d'intersection I des droites (d_1) et (d_2) est la solution du système formé par leurs équations.

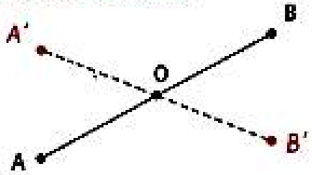
$$(d_1) : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Résoudre le système pour obtenir $I(x_1 , y_1)$

BENABOUD
TÉL : 0780662542

TRANSFORMATIONS DU PLAN

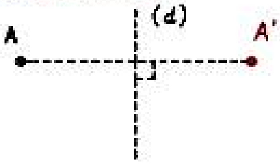
1 Symétrie centrale



- La symétrie centrale de centre O envoie tout point A sur le point A' tel que O soit le milieu de [AA'].
- OA' = OA et A, O, A' sont alignés.

$S_O(A) = A'$
$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$
(A' est le symétrique de A par rapport à O)

2 Symétrie axiale



- La symétrie axiale d'axe (d) envoie tout point A sur le point A' tel que (d) soit la médiatrice de [AA'].
- $AA' \perp (d)$ et (d) coupe [AA'] en son milieu.

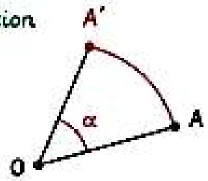
$S_{(d)}(A) = A'$
$d(A, (d)) = d(A', (d))$
(d) est la médiatrice de [AA']

3 Translation

- La translation qui transforme A en A' est définie par le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.
- Tout point M est envoyé sur M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$t_{\vec{u}}(A) = A'$
$\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$

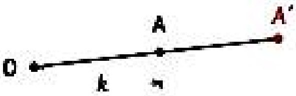
4 Rotation



- La rotation de centre O et d'angle α envoie A sur A' tel que OA = OA' et $\widehat{AOA'} = \alpha$.
- Le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

$R_{(O,\alpha)}(A) = A'$
$OA = OA'$
$\widehat{AOA'} = \alpha$

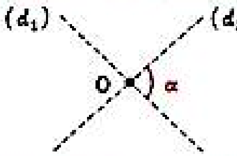
5 Homothétie



- L'homothétie de centre O et de rapport k envoie A sur A' tel que O, A, A' sont alignés et $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$.

$H_{(O,k)}(A) = A'$
$\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$
$OA' = |k| \times OA$
Si $k < 0$, A et A' sont de part et d'autre de O.

6 Composition de symétries axiales



- La composée de deux symétries axiales d'axes sécants (d_1) et (d_2) est une rotation de centre O (point d'intersection) et d'angle 2α.

$S_{(d_2)} \circ S_{(d_1)} = R_{(O,2\alpha)}$
(α = angle entre (d_1) et (d_2))

7 Composition de deux translations

- La composée de la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

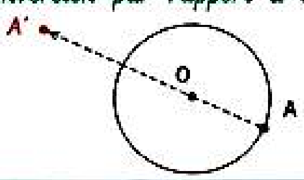
$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

8 Composée de deux symétries centrales

- La composée de deux symétries centrales de centres O et O' est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

$S_{O'} \circ S_O = t_{\overrightarrow{OO'}}$

9 Inversion par rapport à un cercle



- L'inversion de centre O et de puissance k ($k \neq 0$) envoie A ($A \neq O$) sur A' tel que $OA \times OA' = k$ et O, A, A' sont alignés.

$Inv_{(O,k)}(A) = A'$
$OA \times OA' = k$
Si $k > 0$, A et A' sont du même côté de O ;
si $k < 0$, ils sont de part et d'autre de O.

10 Propriétés générales

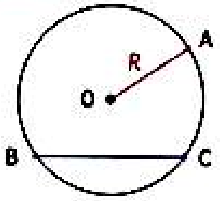
- Les symétries, translations, rotations et homothéties sont des isométries du plan : elles conservent les distances, les angles, les aires et l'alignement.
- L'image d'une droite est une droite, l'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'un cercle est un cercle (ou une droite dans le cas d'une homothétie ou inversion particulières).

- Conservent : longueurs, angles, aires, alignement.
- Image d'une droite : droite.
- Image d'un cercle : cercle (ou droite dans certains cas).

BENABOUD
TÉL : 0780662542

LE CERCLE ET SES PROPRIÉTÉS

1 Définitions

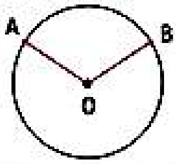


- Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan situés à la distance R de O.
- [OA] est un rayon du cercle.
- [BC] est une corde du cercle.
- Le diamètre est la plus grande corde du cercle.

$M \in (O,R) \Rightarrow OM = R$

Si [BC] est un diamètre alors O est le milieu de [BC] et $BC = 2R$

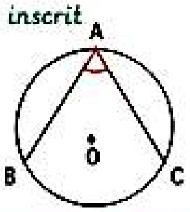
2 Angle au centre



- La mesure d'un angle au centre est égale à la mesure de l'arc qu'il intercepte.

$\angle AOB = \text{mes}(\text{arc } \widehat{AB})$

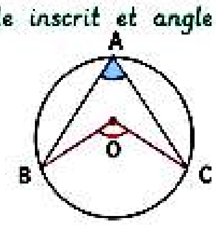
3 Angle inscrit



- La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc qu'il intercepte.

$\angle BAC = \frac{1}{2}\, \text{mes}(\text{arc } \widehat{BC})$

4 Angle inscrit et angle au centre

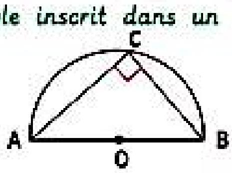


- Si A, B, C sont sur un même cercle, alors l'angle au centre interceptant le même arc qu'un angle inscrit est le double de celui-ci.

$\angle AOB = 2\ \angle ACB$

(angles interceptant l'arc $\widehat{AB}$)

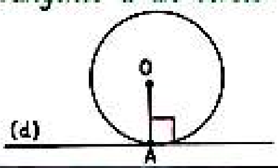
5 Angle inscrit dans un demi-cercle



- Tout angle inscrit qui intercepte un diamètre est droit.

Si [AB] est un diamètre et $C \in (O)$, alors $\angle ACB = 90°$

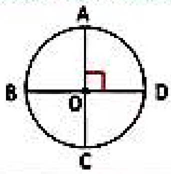
6 Tangente à un cercle



- Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon au point de tangence.
- Réciproquement, toute droite perpendiculaire à un rayon au point de contact est tangente au cercle.

(d) est tangente au cercle (O) en A $\Rightarrow OA \perp (d)$

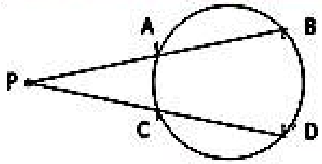
7 Propriétés des cordes



- La médiatrice d'une corde passe par le centre.
- Si deux cordes sont à la même distance du centre, alors elles sont égales.
- Si deux cordes sont égales, alors elles sont à la même distance du centre.

1) (MN) médiatrice de [BC] $\Rightarrow O \in (MN)$
2) Si $d(O,BC) = d(O,DE) \Rightarrow BC = DE$
3) Si $BC = DE \Rightarrow d(O,BC) = d(O,DE)$

8 Puissance d'un point par rapport à un cercle



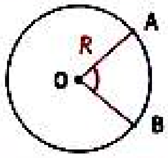
- Soient (PAB) et (PCD) deux sécantes issues d'un point P extérieur au cercle (O). Alors :

$PA \times PB = PC \times PD$

Cas particulier : si P est intérieur au cercle avec une sécante (PAB) et une corde [CD] passant par P alors :

$PA \times PB = PC \times PD$

9 Longueur d'un arc et aire d'un secteur



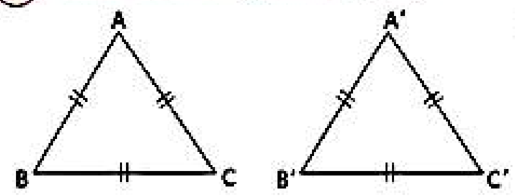
- Soit $\angle AOB = \alpha$ (en degrés).

Longueur de l'arc AB	Aire du secteur AOB
$L = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$	$A = \frac{\alpha}{360} \times \pi R^2$

BENABOUD
TÉL : 0780662542

TRIANGLES ET CONGRUENCE

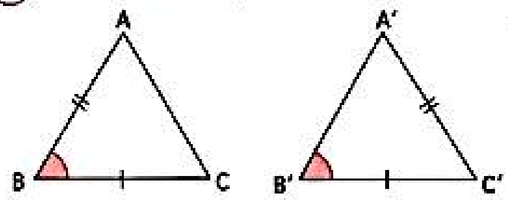
1 Critère de congruence (CCC)



- Si les trois côtés d'un triangle sont respectivement égaux à ceux d'un autre triangle, alors les deux triangles sont congruents.

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \text{ et } BC = B'C'$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

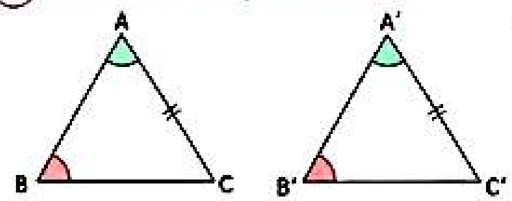
2 Critère de congruence (CAC)



- Si deux côtés et l'angle **compris** entre ces côtés d'un triangle sont respectivement égaux à ceux d'un autre triangle, alors les deux triangles sont congruents.

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \text{ et } \widehat{B} = \widehat{B'}$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

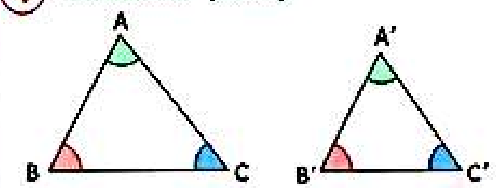
3 Critère de congruence (ACA)



- Si deux angles et le côté **compris** entre ces angles d'un triangle sont respectivement égaux à ceux d'un autre triangle, alors les deux triangles sont congruents.

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ et } AB = A'B'$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

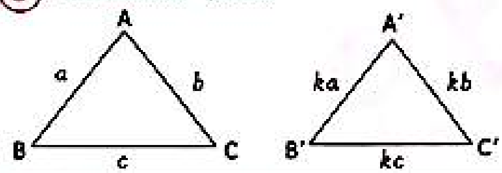
4 Similitude (AAA)



- Si les trois angles d'un triangle sont respectivement égaux à ceux d'un autre triangle, alors les deux triangles sont semblables.

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ et } \widehat{C} = \widehat{C'}$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

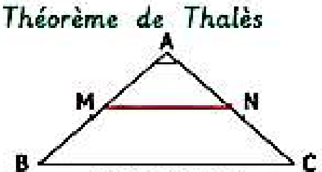
5 Similitude (SSS)



- Si les trois côtés d'un triangle sont proportionnels à ceux d'un autre triangle, alors les deux triangles sont semblables.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

6 Théorème de Thalès

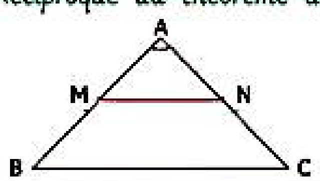


(MN) // (BC)

- Si (MN) est parallèle à (BC) dans le triangle ABC, alors les droites (AM) et (AN) sont sécantes en A et :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

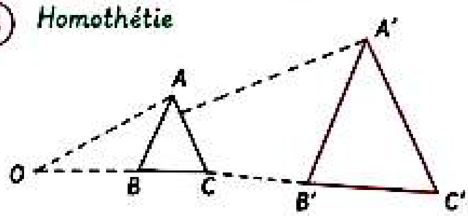
7 Réciproque du théorème de Thalès



- Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$
alors (MN) // (BC)

Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$
$$\Rightarrow (MN) \,//\, (BC)$$

8 Homothétie



- Deux triangles sont homothétiques de centre O et de rapport k si : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O et
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$$

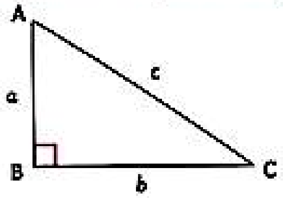
$\triangle A'B'C'$ est l'image de $\triangle ABC$ par l'homothétie de centre O et de rapport k.

$A'B' = k \times AB$, $A'C' = k \times AC$, $B'C' = k \times BC$

BENABOUD
TÉL : 0780662542

TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

① Rapports trigonométriques (triangle rectangle)

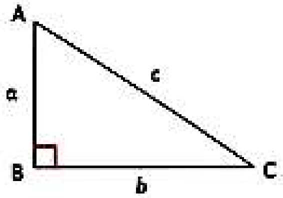


- ABC est un triangle rectangle en B.
- c est l'hypoténuse.
- a est le côté opposé à l'angle A.
- b est le côté opposé à l'angle C.

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\sin C = \frac{b}{c}, \quad \cos C = \frac{a}{c}, \quad \tan C = \frac{b}{a}$$

② Relation fondamentale



- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

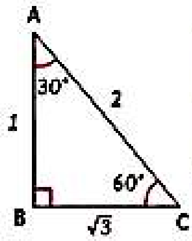
$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \tan C = \frac{\sin C}{\cos C}$$

③ Angles remarquables

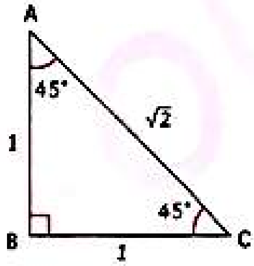
- Valeurs exactes des rapports trigonométriques.

Pour 30°, 60° et 90°



Angle	sin	cos	tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	non déf.

Pour 45°, 45° et 90°



Angle	sin	cos	tan
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
90°	1	0	non déf.

④ Formules d'addition

- Pour tous angles A et B tels que les expressions sont définies.

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

⑤ Formules de duplication

- Pour tout angle A tel que les expressions sont définies.

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

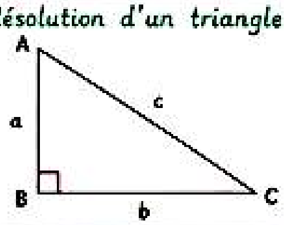
$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

⑥ Résolution d'un triangle rectangle



- Si un côté et un angle aigu sont connus, on peut calculer les autres éléments.
- Utiliser les rapports trigonométriques et le théorème de Pythagore.

Exemple :

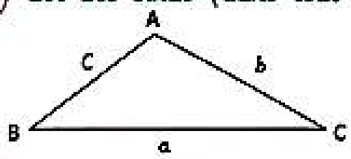
Si A et b sont connus :

- $a = b \times \tan A$
- $c = \dfrac{b}{\cos A}$

Si A et a sont connus :

- $b = \dfrac{a}{\tan A}$
- $c = \dfrac{a}{\sin A}$

⑦ Loi des sinus (dans tout triangle)

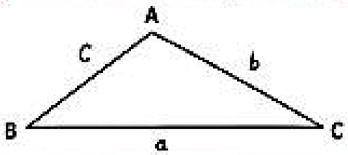


- Dans tout triangle ABC, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

⑧ Loi des cosinus (dans tout triangle)



- Dans tout triangle ABC, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins le double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle compris.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

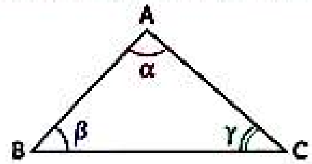
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

BENABOUD
TÉL : 0780662542

GÉOMÉTRIE DE BASE DANS LE PLAN

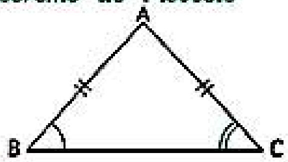
① Somme des angles d'un triangle



- La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°.

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

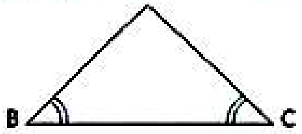
② Théorème de l'isocèle



- Si deux côtés d'un triangle sont égaux, alors les angles opposés à ces côtés sont égaux.

$$\boxed{AB = AC \Rightarrow \angle B = \angle C}$$

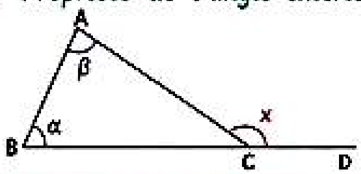
③ Réciproque du théorème de l'isocèle



- Si deux angles d'un triangle sont égaux, alors les côtés opposés à ces angles sont égaux.

$$\boxed{\angle B = \angle C \Rightarrow AB = AC}$$

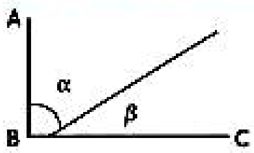
④ Propriété de l'angle extérieur



- Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés.

$$\boxed{x = \alpha + \beta}$$

⑤ Angles complémentaires et supplémentaires



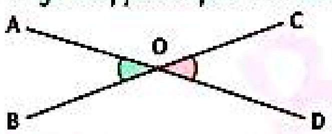
- Deux angles sont complémentaires si leur somme est égale à 90°.

$$\boxed{\alpha + \beta = 90°}$$

- Deux angles sont supplémentaires si leur somme est égale à 180°.

$$\boxed{\alpha + \beta = 180°}$$

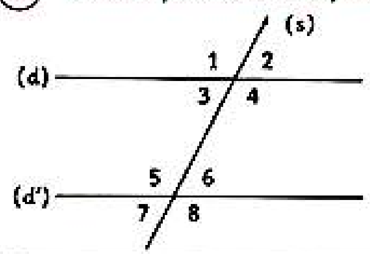
⑥ Angles opposés par le sommet



- Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

$$\boxed{\angle AOB = \angle COD \text{ et } \angle AOD = \angle BOC}$$

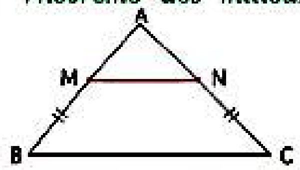
⑦ Droites parallèles coupées par une sécante



- Angles correspondants : égaux ($\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, ...)
- Angles alternes-internes : égaux ($\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$)
- Angles opposés par le sommet : égaux ($\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$)
- Angles supplémentaires : somme = 180° ($\angle 3 + \angle 5 = 180°$, ...)

> Si (d) // (d')
> alors toutes les propriétés ci-contre sont valables.

⑧ Théorème des milieux

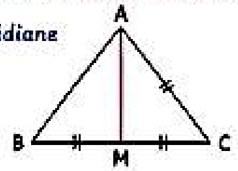


- Si M et N sont les milieux de [AB] et [AC], alors :
  - MN // BC
  - $MN = \frac{BC}{2}$

> M milieu de [AB]
> N milieu de [AC]
> $\Rightarrow$ MN // BC et $MN = \frac{BC}{2}$

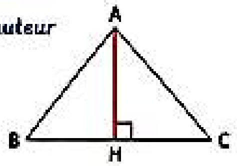
⑨ Médiane, hauteur, bissectrice

Médiane



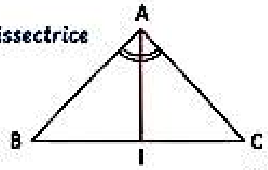
AM : médiane issue de A
(M milieu de [BC])

Hauteur



AH : hauteur issue de A
(AH ⊥ BC)

Bissectrice



AI : bissectrice de l'angle $\hat{A}$
($\angle BAI = \angle IAC$)

> **Rappel :**
> Dans tout triangle, il y a 3 médianes, 3 hauteurs et 3 bissectrices.