Probabilité-Variables aléatoires

1. Rappels : variables aléatoires :

Exercice 5166

Un jeu consiste à lancer quatre fois successivement un pièce de monnaie équilibré. A chaque lancer, on note la face obtenue.

1. a. Construire un arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.

   b. En admettant que les sorties de cette expérience sont équiprobables, donner la probabilité d'un événement élémentaire.

On associe à chaque sortie de cette expérience aléatoire un gain :
- le gain est de 0€ si le côté face n'apparait pas ;
- le gain est de 1€ si le côté face apparait 1 fois ;
- le gain est de 2€ si le côté face apparait 2 fois ;
- le gain est de 4€ si le côté face apparait 3 fois ;
- le gain est de 10€ si le côté face apparait 4 fois ;

2. Associer à chaque événement élémentaire le gain qui lui est associé.

3. A chaque sortie de cette expérience, on note $\mathcal{X}$ le gain obtenu.
   - L'événement "*le gain obtenu est égal à 4€*" se note $\{\mathcal{X}=4\}$.
   - L'événement "*le gain est supérieur ou égal à 4€*" se note $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$.

   Déterminer les probabilités des événements ci-dessous

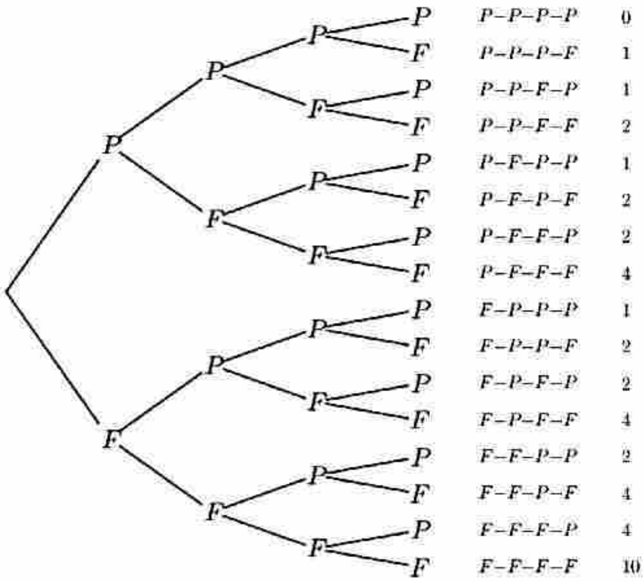
   a. $\{\mathcal{X}=10\}$ b. $\{\mathcal{X}=4\}$ c. $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$

4. Compléter le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$					

Correction 5166

1. a. On obtient l'arbre de choix ci-dessous :



   b. Cette expérience comporte 16 issues distinctes. Ainsi, en supposant l'équiprobabilité de cette expérience, chaque évènement élémentaire possède une probabilité de $\dfrac{1}{16}$.

2. La représentation de l'arbre de choix indique, dans sa partie droite, le gain associé à chacune des issues élémentaires de cette expérience.

3. a. L'évènement $\{\mathcal{X}=10\}$ est composé de 1 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)=\dfrac{1}{16}$

   b. L'évènement $\{\mathcal{X}=4\}$ est composé de 4 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=4)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

   c. L'évènement $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$ est composé de 5 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 4)=\dfrac{5}{16}$

4. On a le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 5167

Une urne contient quatre boules bleues numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2.

1. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chacune boule le numéro inscrit sur celui-ci.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. Au tirage d'une boule dans cette urne, on associe les règles de jeu suivantes :
   - Si la boule tirée est bleu et porte un nombre pair, le joueur gagne 2€.
   - Si la boule tirée n'est pas bleu et porte un nombre pair, le joueur gagne 3€.
   - Sinon le joueur ne gagne rien.

   On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui associe au tirage d'une boule le gain obtenu.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

Correction 5167

1. L'urne contient un total de 9 boules. On a les probabilités suivantes :
   - Il y a 3 boules possédant le numéro 1 :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$
   - Il y a 3 boules possédant le numéro 2 :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$
   - Il y a 2 boules possédant le numéro 3 :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}3) = \dfrac{2}{9}$
   - Il y a 1 boules possédant le numéro 4 :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}4) = \dfrac{1}{9}$

   On synthétise ces résultats dans le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2. On a les probabilités suivantes :
   - Il n'y a que 2 boules bleus dans l'urne possédant un numéro pair :
     $\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}2) = \dfrac{2}{9}$
   - Il n'y a que 2 boules non-bleus dans l'urne possédant un numéro pair :
     $\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}3) = \dfrac{2}{9}$
   - Ainsi, il reste 5 boules qui ne gagnent rien :
     $\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}0) = \dfrac{5}{9}$

   On synthétise ces résultats dans le tableau ci-dessous :

k	0	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}k)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

Exercice 5169

Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.

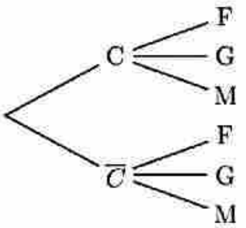
Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.

Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture.

Quelque soit le type de barquette acheté, le client choisi à 50 % des cas la myrtille pour fruit, 30 % des framboises dans les autres cas, c'est la groseille qui est choisie.

On notera :
- C l'évènement "*le client achète une barquette de fruits à confiture*" ;
- F l'évènement "*le client demande des framboises*" ;
- G l'évènement "*le client demande des groseilles*" ;
- M l'évènement "*le client demande des myrtilles*" ;

On suppose que le fruit choisit ne dépend pas du type de barquette acheté et que chaque client n'achète qu'une barquette.



1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :
2. Déterminer la probabilité de $\overline{C} \cap F$.
3. Le producteur fixe les prix de ses barquettes de la manière suivante :
   - Le prix de base d'une barquette de fruits à confiture est vendue 5 euros et celui d'une barquette de fruits à déguster est 3 euros ;
   - Si la barquette choisit contient des framboises, il ajoute 1 euro au prix de la barquette ;
   - Si la barquette choisit contient des myrtilles, il ajoute 2 euros au prix de la barquette ;
   - Si la barquette choisit contient des groseilles, le prix de base reste inchangé.

   On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à chaque client le prix de la barquette acheté.

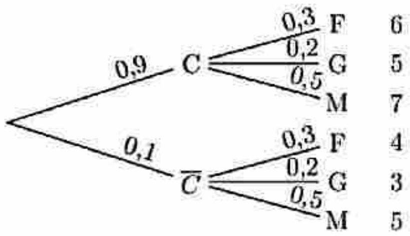
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

   b. Dresser le tableau représentant la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 5169

1. Voici l'arbre de probabilité complété :



   On a mis sur la droite les prix relatifs à la question 3..

   La colonne de droite présente le montant de la facture en fonction des choix du client : cette colonne sera utilisée lors de la question 3..

2. On a la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(\overline{C} \cap F) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$

3. a. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend les valeurs suivantes :
   3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

   b. La variable aléatoire admet le tableau suivant pour loi de probabilité :

k	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$	0,02	0,03	0,23	0,27	0,45

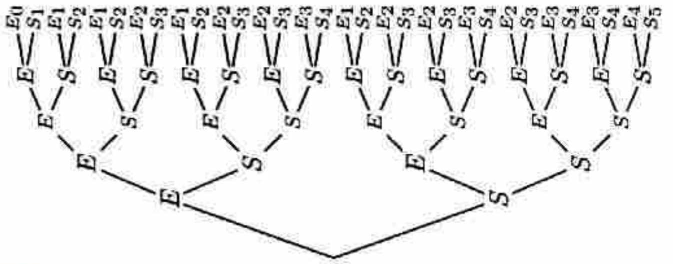
   c. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour espérance :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 0{,}02\times 3 + 0{,}03\times 4 + 0{,}23\times 5 + 0{,}27\times 6 + 0{,}45\times 7 \\ &= 0{,}06 + 0{,}12 + 1{,}15 + 1{,}62 + 3{,}15 \\ &= 6{,}1 \end{aligned}$$

2. Rappels : loi binomiale :

Exercice 5214

La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succés)* et E *(échec)*. Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nombre de succés réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli mais répétée six fois :

   a. Donner le nombre de chemins réalisant 4 succés lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli *(on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner)*.

   b. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

Correction 5214

1. L'arbre de choix présenté permet de compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés	1	5	10	10	5	1

2. a. Pour obtenir 4 succés au bout de six répétitions, il faut :

   - Soit obtenir 3 succés au bout de cinq répétitions et obtenir un succés lors de la sixième répétition.
     On compte 10 possibilités grâce à l'arbre précédent.
   - Soit obtenir 4 succés au bout de cinq répétitions et obtenir un échec lors de la sixième répétition.
     On compte 5 possibilités grâce à l'arbre précédent.

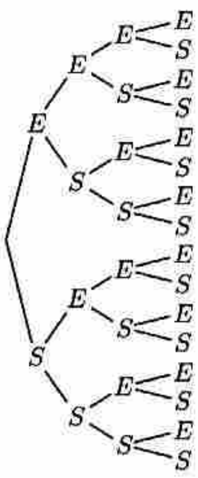
   On en déduit qu'il existe 15 chemins possibles réalisant 4 succés lors de la répétition de six épreuves de Bernoulli.

   b. En raisonnant de la manière précédente, on complète le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés	1	6	15	20	15	6	1

Exercice 5215

La figure ci-contre représente la répétition de quatre épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succés)* et E *(échec)*.
On suppose connu les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(S) = \dfrac{1}{3}$; $\mathcal{P}(E) = \dfrac{2}{3}$
On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui compte le nombre de succés réalisés après la répétition de ces quatre épreuves de Bernoulli.



1. a. Combien d'évènements élémentaires comprend l'évènement $\{\mathcal{X}=3\}$?

   b. Soit $\omega \in \{\mathcal{X}=3\}$, montrer que : $\mathcal{P}(\omega) = \dfrac{2}{81}$

   c. Justifier que $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \dfrac{8}{81}$

2. a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   b. Compléter le tableau ci-dessous afin de donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x					
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$					

Correction 5215

1. a. L'arbre de choix présente 4 chemins comprenant exactement trois succés. Ainsi, l'évènement $\{\mathcal{X}=3\}$ comprend 4 évènements élémentaires.

   b. Si ω est un évènement élémentaire appartenant à l'intervalle $\{\mathcal{X}=3\}$, il comprend trois succés et donc forcemment un échec. Ainsi, sa probabilité est de :
   $$\mathcal{P}(\omega) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

   c. Chaque élément de l'évènement a pour probabilité $\dfrac{2}{81}$.
   Ainsi, on a la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}=3\}$:
   $$\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = 4 \times \frac{2}{81} = \frac{8}{81}$$

2. a. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ compte le nombre de succés réalisés dans la répétition d'une épreuve de Bernoulli. Ainsi, les valeurs prises par $\mathcal{X}$ sont des valeurs entières comprises entre 0 et 4.

   b. Répétons la démarche de la question précédente :
   - $\{\mathcal{X}=0\}$ est composée de 1 évènement élémentaires.

Chacun de ses évènements élémentaire a pour probabilité :
$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$
On en déduit la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) = \frac{16}{81}$

- $\{\mathcal{X}{=}1\}$ est composée de 4 évènements élémentaires. Chacun de ses évènements élémentaire a pour probabilité :
$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$
On en déduit la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1) = \frac{32}{81}$

- $\{\mathcal{X}{=}2\}$ est composée de 6 évènements élémentaires. Chacun de ses évènements élémentaire a pour probabilité :
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$
On en déduit la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = \frac{24}{81}$

- $\{\mathcal{X}{=}4\}$ est composée de 1 évènements élémentaires. Chacun de ses évènements élémentaire a pour probabilité :
$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
On en déduit la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}4) = \frac{1}{81}$

Voici le tableau complété :

x	0	1	2	3	4
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Exercice 5208

On répète 10 fois et de manière indépendante une expérience de Bernoulli de paramètre $p{=}0{,}3$.

A cette expérience, on associe la variable $\mathcal{X}$ qui associe à chaque issue de cette expérience le nombre de succés.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}{\geqslant}3\}$.

Correction 5208

1. Voici les probabilités demandées :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) = \binom{10}{0}\times 0{,}3^0\times 0{,}7^{10} = 0{,}7^{10} \simeq 0{,}028$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1) = \binom{10}{1}\times 0{,}3^1\times 0{,}7^9 = 10\times 0{,}3^1\times 0{,}7^9 \simeq 0{,}121$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = \binom{10}{2}\times 0{,}3^2\times 0{,}7^8 = 45\times 0{,}3^2\times 0{,}7^8 \simeq 0{,}233$

2. Considérons la probabilité ci-dessous :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{<}3) = \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) \simeq 0{,}028+0{,}121+0{,}233 \simeq 0{,}382$$
Par complémentarité, on obtient :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{\geqslant}3) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}{<}\,3) \simeq 1-0{,}382 \simeq 0{,}618$$

Exercice 5209

Un examen est basé sur un QCM comportant 5 questions où chaque question propose quatre choix de réponse parmi lesquelles une seule réponse est correcte.

Un élève décide de compléter de manière aléatoire et indépendante chacune des questions du questionnaire.

1. Quelle est la probabilité de répondre correctement à une question ?

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de réponses correctes contenues dans le formulaire rempli.

2. Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{\leqslant}3)$

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité, arrondie au millième, que l'élève ait au plus 2 réponses justes.

Correction 5209

1. L'él'eve choisissant sa réponse de manière aléatoire et chaque question comportant une bonne réponse et trois mauvaise réponse, la probabilité de répondre correctement à une question est de $\frac{1}{4}$

2. Les réponses à chacune des questions se faisant de manière indépendante, nous sommes en présence de la répétition de 5 épreuves de Bernoulli dont le succés à pour valeur $\frac{1}{4}$.

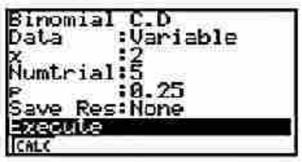
La variable aléatoire comptant le nombre de succés réalisés au cours de ces 5 répétitions permet d'affirmer que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $p{=}\frac{1}{4}$ et $n{=}5$:
$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\left(5\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

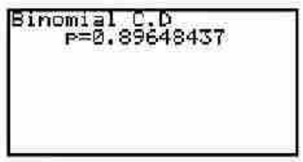
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5) = \binom{5}{5}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times 1 \simeq 0{,}001$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}4) = \binom{5}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^1 = 5\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\frac{3}{4} \simeq 0{,}015$

Par complémentarité, on en déduit la probabilité suivante :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{\leqslant}3) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}{>}3) = 1-\left[\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}4)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5)\right] = 1-(0{,}015+0{,}001) = 1-0{,}016 = 0{,}084$$

3. Voici les deux captures d'écran nécessaire sur une calculatrice Casio pour obtenir la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}{\leqslant}2\}$:





On en déduit : $\mathcal{P}(\mathcal{X}{\leqslant}2) = 0{,}896$

Exercice 5216

On répondra aux questions suivantes en utilisant la calculatrice :

1. Donner la valeur des coefficients binomiaux suivant :

   a. $\binom{15}{3}$ b. $\binom{24}{3}$ c. $\binom{54}{12}$ d. $\binom{51}{51}$

2. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(15\,;\,0{,}3)$. Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}8)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}12)$

3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(52\,;\,0{,}3)$. Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 15)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 23)$

Correction 5216

1. a. $\binom{15}{3} = 455$ b. $\binom{24}{3} = 2024$

   c. $\binom{54}{12} = 343\,006\,888\,770$ d. $\binom{51}{51} = 1$

2. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5) \simeq 0{,}21$

   b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}8) \simeq 0{,}03$

   c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}12) \simeq 0$

3. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9) \simeq 0{,}03$

   b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 15) \simeq 0{,}50$

   c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 23) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<23)$
   $= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 22) \simeq 1 - 0{,}96 = 0{,}04$

Exercice 5213

Dans un jeu, on convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

2. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

3. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943

k	6	7	8	9	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : "*la personne gagne au moins N parties*".

A partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évèneemnt est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

Correction 5213

1. Ce jeu consiste en une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes entre elles où la probabilité de gagner est de $\frac{3}{8}$. Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale :
   $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\Big(10\,;\,\frac{3}{8}\Big)$.

   La probabilité de gagner 3 parties sur les dix jouées est égale à :
   $$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}3) = \binom{10}{3}\cdot\Big(\frac{3}{8}\Big)^3\cdot\Big(\frac{5}{8}\Big)^7 = 120\times\frac{3^3\times 5^7}{8^{10}} \simeq 0{,}236$$

2. On a la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) \simeq 0{,}009$

   Ainsi, la probabilité demandée a pour valeur :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) \simeq 1 - 0{,}009 = 0{,}991$

3. En utilisant le tableau, on a les probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 6) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<6) = 1 - 0{,}8725 = 0{,}1275$
   - $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 7) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<7) = 1 - 0{,}9616 = 0{,}0384$

   Ainsi, c'est pour $N{=}7$ que la probabilité de l'évènement "*la personne gagne au moins N parties*" devient inférieure à $\frac{1}{10}$.

Exercice 3803

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

   a. Définir la loi de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$. Pour l'entreprise, quelle interprétation peut-on faire de cette espérance ?

Correction 3803

1. Considérons les deux évènements suivants :
   - S : "*L'article présente un défaut de soudure*" ;
   - E : "*L'article présente un défaut électronique*".

   Un article est défectueux s'il présente au moins un de ses deux défauts. Ainsi, nous essayons de déterminer la probabilité de l'évènement $S\cup E$. La formule du calcul de la probabilité d'une réunion donne :

$$\mathcal{P}(S\cup E)=\mathcal{P}(S)+\mathcal{P}(E)-\mathcal{P}(S\cap E)$$

Les évènements S et E sont indépendants :

$$= \mathcal{P}(S)+\mathcal{P}(E)-\mathcal{P}(S)\times\mathcal{P}(E)$$
$$= 0{,}03+0{,}02-0{,}03\times0{,}02$$
$$= 0{,}05-0{,}0006=0{,}0494$$

2. a. En supposant que le tirage successif des 800 articles soit insignifiant relativement au stock de l'entreprise, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre d'articles défectueux suit une loi binomiale :

$$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(800\,;\,0{,}0494)$$

b. L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par :

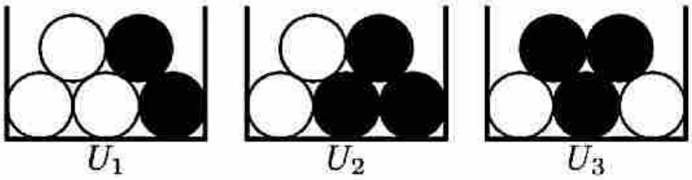
$$E(\mathcal{X})=n\cdot p=800\times0{,}0494\simeq39{,}52$$

Pour l'entreprise, cela signifie qu'en moyenne un lot de 800 articles comportera environ 40 pièces défectueuses.

3. Introduction aux probabilités conditionnelles :

Exercice 3778

Un jeu est constitué d'un dé équilibré et des trois urnes ci-dessous composée chacune de boules noires et de boules blanches :



Le joeur va tirer une boule dans une des urnes ; l'urne est choisie en fonction de la face du dé obtenue au cours d'un lancer :

- Si la face obtenue est 1, il tire la boule dans l'urne U_1 ;
- Si la face obtenue est paire, il tire la boule dans l'urne U_2 ;
- Si la face obtenue est 3 ou 5, il utilisera l'urne U_3.

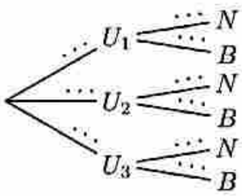
1. Déterminer la probabilité de tirée la boule dans l'urne U_1 ; dans l'urne U_2 ; dans l'urne U_3.

2. a. En tirant la boule dans l'urne U_1, quel est la probabilité de tirer une boule noire ?

b. En tirant la boule dans l'urne U_2, quel est la probabilité de tirer une boule noire ?

c. En tirant la boule dans l'urne U_3, quel est la probabilité de tirer une boule noire ?

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :



4. Déterminer la probalité de l'événement suivant :
A : "La boule tirée est noire."

5. Le joueur gagne 5€ lorsqu'il tire une boule noire et perd s'il tire une boule blanche ; quel est l'espérance de ce jeu ?

Correction 3778

1. Voici les différentes probabilités de choisir une urne plutôt qu'une autre :

$$\mathcal{P}(U_1)=\frac{1}{6}\quad;\quad\mathcal{P}(U_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\quad;\quad\mathcal{P}(U_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2. a. Dans l'urne U_1, il y a deux boules noires sur cinq boules au total ; ainsi, la probabilité de tirer une noire sachant qu'on est entrain de tirer une boule dans l'urne U_1 est de :

$$\mathcal{P}_{U_1}(N)=\frac{2}{5}$$

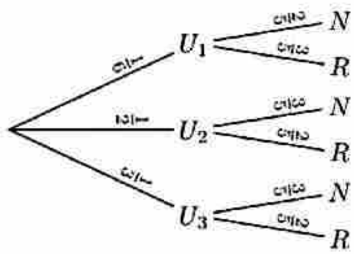
b. L'urne U_2 contient trois boules noires sur un total de cinq boules ; ainsi, la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 est de :

$$\mathcal{P}_{U_2}(N)=\frac{3}{5}$$

c. Pour les mêmes raisons, on a :

$$\mathcal{P}_{U_3}(N)=\frac{3}{5}$$

3. Ainsi, on a l'arbre de probabilité conditionnelle suivant :



$\mathcal{P}(U_1\cap N)=\frac{1}{15}$

$\mathcal{P}(U_1\cap B)=\frac{1}{10}$

$\mathcal{P}(U_2\cap N)=\frac{3}{10}$

$\mathcal{P}(U_2\cap B)=\frac{1}{5}$

$\mathcal{P}(U_3\cap N)=\frac{1}{5}$

$\mathcal{P}(U_3\cap B)=\frac{2}{15}$

4. Les évènements U_1, U_2, U_3 sotn disjoints entre eux et forment à eux trois l'ensemble des possibilités, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(N)=\mathcal{P}(U_1\cap N)+\mathcal{P}(U_2\cap N)+\mathcal{P}(U_3\cap N)$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{2}{30}+\frac{9}{30}+\frac{6}{30}=\frac{17}{30}$$

5. On considère la variable $\mathcal{X}$ aléatoire qui associe à la boule tirée le gain obtenue. On a :

- $\{\mathcal{X}{=}5\}=N$; on en déduit :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5)=\mathcal{P}(N)=\frac{17}{30}$$
- $\{\mathcal{X}{=}0\}=R$; on en déduit :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)=\mathcal{P}(R)=\frac{13}{30}$$

Cette variable aléatoire a pour espérance :

$$E(\mathcal{X})=5\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5)+0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)=5\times\frac{17}{30}\simeq2{,}8$$

4. Probabilites conditionnelles :

Exercice 3792

Amélie doit traverser la rue principale d'un village qui est jalonnée de deux feux tricolores.

Pour $n \in \{1\,;\,2\}$, on note E_n l'évènement "*Amélie est arrêtée par le n^e feu rouge ou orange*" et $\overline{E_n}$ l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

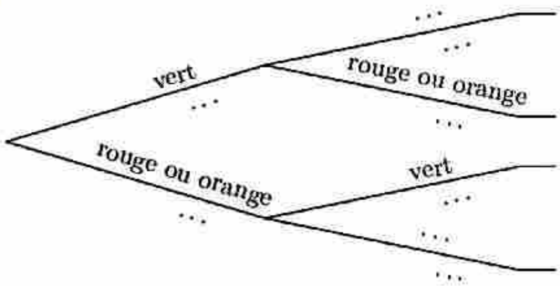
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- La probabilité que le second feu tricolore soit rouge ou orange, si le premier feu est rouge, vaut $\dfrac{1}{20}$.
- La probabilité que le seond feu tricolore soit rouge ou orange, si le premier feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

On s'intéresse, tout d'abord, aux premiers feux tricolores.

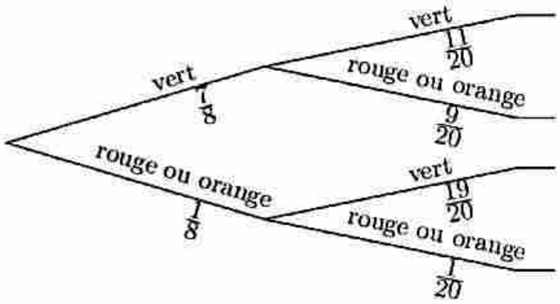
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

Correction 3792

1.



2. L'arbre de probabilité conditionnelle nous permet d'obtenir rapidement les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\overline{E_1} \cap E_2) = \mathcal{P}(\overline{E_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{E_1}}(E_2) = \dfrac{7}{8} \times \dfrac{9}{20} = \dfrac{63}{160}$
- $\mathcal{P}(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \mathcal{P}(\overline{E_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{E_1}}(\overline{E_2}) = \dfrac{7}{8} \times \dfrac{11}{20} = \dfrac{77}{160}$
- $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2) = \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}_{E_1}(E_2) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{160}$
- $\mathcal{P}(E_1 \cap \overline{E_2}) = \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}_{E_1}(\overline{E_2}) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{19}{20} = \dfrac{19}{160}$

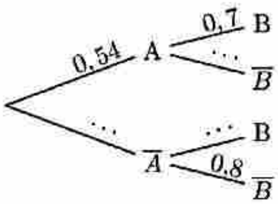
La variable aléatoire peut prendre les trois valeurs 0, 1, 2 ; on a :

- $\{\mathcal{X}=0\} = E_1 \cap E_2 \Longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \dfrac{1}{160}$
- $\{\mathcal{X}=1\} = (E_1 \cap \overline{E_2}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2)$
  $\Longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \dfrac{19}{160} + \dfrac{63}{160} = \dfrac{82}{160} = \dfrac{41}{80}$
- $\{\mathcal{X}=2\} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \Longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \dfrac{77}{160}$

6. Inversion de la condition :

Exercice 5190

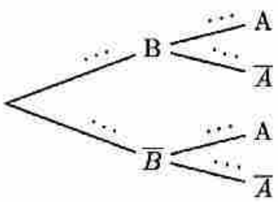
Dans un espace probabilisé, on considère deux évènements A et B. Voici un arbre de probabilité réalisé avec ces deux évènements :



1. Compléter l'arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants arrondie au millième près :

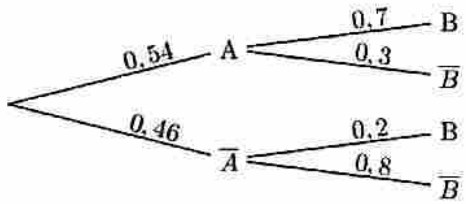
a. $\mathcal{P}(A \cap B)$	b. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)$	c. $\mathcal{P}(A \cap \overline{B})$
d. $\mathcal{P}(B)$	e. $\mathcal{P}_B(A)$	f. $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A)$

3. Construire l'arbre de probabilité ci-contre en complétant avec les valeurs des probabilités arrondies au millième :



Correction 5190

1. Voici l'arbre complété :



2. Par lecture de l'arbre de probabilité, on a les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}_A(B) = 0{,}54 \times 0{,}7 = 0{,}378$

b. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B) = \mathcal{P}(\overline{A}) \cdot \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}46 \times 0{,}2 = 0{,}092$

c. $\mathcal{P}(A \cap \overline{B}) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}_A(\overline{B}) = 0{,}54 \times 0{,}3 = 0{,}162$

d. Les deux événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. La formule de probabilité totale permet d'obtenir la probabilité suivante :

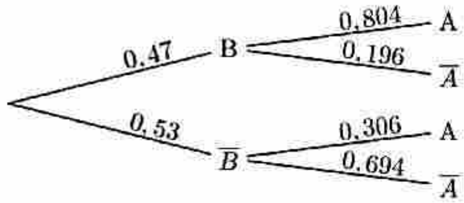
$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \overline{A})$$
$$= 0{,}378 + 0{,}092 = 0{,}47$$

e. Les formules des probabilités conditionnelles permettent d'obtenir les probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{0{,}378}{0{,}47} \simeq 0{,}804$$

f. $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{\mathcal{P}(A\cap\overline{B})}{\mathcal{P}(\overline{B})} = \dfrac{0{,}162}{0{,}53} \simeq 0{,}306$

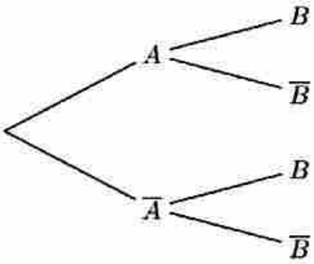
3. Ainsi, on construit l'arbre de probabilité suivant :

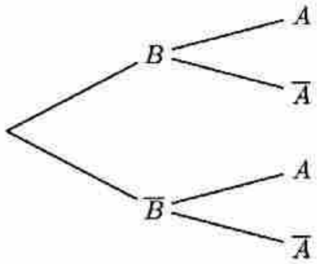


Exercice 5833

Dans un espace probabilisé, on considère deux évènements A et B. On connait les probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(A) = 0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0{,}8 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6$$





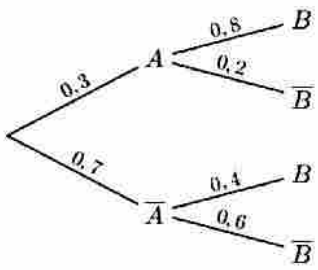
Compléter, si nécessaire avec des valeurs arrondies au centième, les deux arbres de probabilité ci-dessus.

Correction 5833

D'après les données de l'énoncé, on déduit :

- $\mathcal{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathcal{P}_A(B) = 1 - 0{,}80{,}2$
- $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Ainsi, on peut compléter l'arbre de probabilité de gauche :



Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(A\cap B) + \mathcal{P}(\overline{A}\cap B)\\ &= \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B) + \mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)\\ &= 0{,}3\times0{,}8 + 0{,}7\times0{,}4 = 0{,}24 + 0{,}28 = 0{,}52\end{aligned}$$

Par complémentarité, on a :

$\mathcal{P}(\overline{B}) = 1 - \mathcal{P}(B) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

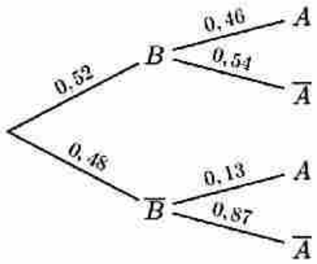
D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

- $\mathcal{P}_B(A) = \dfrac{\mathcal{P}(B\cap A)}{\mathcal{P}(B)} = \dfrac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B)}{\mathcal{P}(B)} = \dfrac{0{,}3\times0{,}8}{0{,}52} \simeq 0{,}46$
- $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{B}\cap A)}{\mathcal{P}\overline{B}} = \dfrac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(\overline{B})}{\mathcal{P}(\overline{B})} = \dfrac{0{,}3\times0{,}2}{0{,}48} \simeq 0{,}13$

Par complémentarité, on a :

- $\mathcal{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}_B(A) = 1 - 0{,}46 = 0{,}54$
- $\mathcal{P}_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}_{\overline{B}}(A) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$

Ainsi, on peut compléter l'arbre de probabilité de droite :



Exercice 3795

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

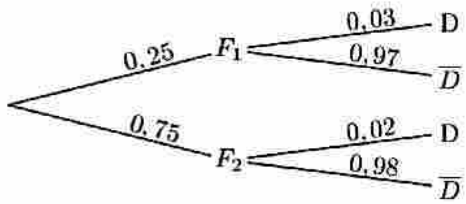
On note :

- D : l'évènement "*le composant est défectueux*" ;
- F_1 : l'évènement "*le composant provient du premier fournisseur*" ;
- F_2 : l'évènement "*le composant provient du second fournisseur*".

1. Dresser un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
2. Calculer $P(D\cap F_1)$, puis démontrer que $P(D)=0{,}022\,5$
3. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ? On arrondiera sa valeur au millième près.

Correction 3795

1. Voici l'arbre de probabilité associé à cette épreuve aléatoire :



2. D'après l'arbre de probabilité, on a les deux probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(D\cap F_1) = \mathcal{P}(F_1)\cdot\mathcal{P}_{F_1}(D) = 0{,}25\times0{,}03 = 0{,}007\,5$
   - $\mathcal{P}(D\cap F_2) = \mathcal{P}(F_2)\cdot\mathcal{P}_{F_2}(D) = 0{,}75\times0{,}02 = 0{,}015$

   F_1 et F_2 forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule de probabilité totale, on a :

$$\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(F_1 \cap D) + \mathcal{P}(F_2 \cap D)$$
$$= 0{,}0075 + 0{,}015 = 0{,}0225$$

3. La formule des probabilités conditionnelles permet d'obtenir la valeur de la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}_D(F_1) = \frac{\mathcal{P}(D \cap F_1)}{\mathcal{P}(D)} = \frac{0{,}0075}{0{,}0225} \simeq 0{,}333$$

Exercice 4203

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes *(les initiales des pays désignent les évènements "l'achat s'effectue dans le pays")* :

$$\mathcal{P}(F) = P(A) \quad ; \quad \mathcal{P}(F) = \frac{1}{2}{\cdot}\mathcal{P}(C) \quad ; \quad \mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(I)$$

1. Calculer les quatre probabilités $\mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(C)$ et $\mathcal{P}(I)$.

2. Sur chacun des quatres sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$\mathcal{P}_F(S) = 0{,}2 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(S) = 0{,}5$$
$$\mathcal{P}_C(S) = 0{,}1 \quad ; \quad \mathcal{P}_I(S) = 0{,}4$$

a. Déterminer $\mathcal{P}(S \cap A)$.

b. Montrer que $\mathcal{P}(S) = \dfrac{17}{60}$.

c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

Correction 4203

1. D'après les relations sur les différentes probabilités, on peut écrire les relations :

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(F) \quad ; \quad \mathcal{P}(C) = 2{\cdot}\mathcal{P}(F) \quad ; \quad \mathcal{P}(I) = 2{\cdot}\mathcal{P}(F)$$

L'univers des issues possible de cette expérience aléatoire est constitué des quatres évènements élémentaire F, A, C et I ; ainsi, on a :

$$\mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(I) = 1$$
$$\mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(I) = 1$$
$$\mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(F) + 2{\cdot}\mathcal{P}(F) + 2{\cdot}\mathcal{P}(F) = 1$$
$$6{\cdot}\mathcal{P}(F) = 1$$
$$\mathcal{P}(F) = \frac{1}{6}$$

On en déduit :

- $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(F) = \dfrac{1}{6}$
- $\mathcal{P}(C) = 2 \cdot \mathcal{P}(F) = 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$
- $\mathcal{P}(I) = \mathcal{P}(C) = \dfrac{1}{6}$

2. **a.** D'après la formule sur les probabilités conditionnelles, on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(S \cap A) = \mathcal{P}_A(S) \cdot \mathcal{P}(A) = 0{,}5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(S \cap F) + \mathcal{P}(S \cap A) + \mathcal{P}(S \cap C) + \mathcal{P}(S \cap I)$$
$$= \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}_F(S) + \frac{1}{12} + \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}_C(S) + \mathcal{P}(I) \times \mathcal{P}_I(S)$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10}$$
$$= \frac{2}{60} + \frac{5}{60} + \frac{2}{60} + \frac{8}{60} = \frac{17}{60}$$

c. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a l'égalité :

$$\mathcal{P}_S(C) = \frac{\mathcal{P}(S \cap C)}{\mathcal{P}(S)} = \frac{\mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}_C(S)}{\dfrac{17}{60}}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{10}}{\dfrac{17}{60}} = \frac{\dfrac{2}{60}}{\dfrac{17}{60}} = \frac{2}{60} \times \frac{60}{17} = \frac{2}{17}$$

Exercice 4228

Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.

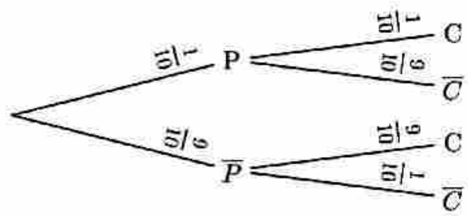
Sachant que j'ai sorti mon chien, quel est la probabilité qu'il pleuve ?

Correction 4228

Pour modéliser cette situation, on considère les deux évènements suivants :

- P : *"Il pleut"* ;
- C : *"Je sors le chien"*.

On obtient l'arbre de probabilité suivant :



De l'arbre de probabilité, on en déduit les deux probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(P \cap C) = \mathcal{P}(P) \cdot \mathcal{P}_P(C) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{40}$
- $\mathcal{P}(\overline{P} \cap C) = \mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}_{\overline{P}}(C) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{27}{40}$

Les deux évènements P et $\overline{P}$ forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(C \cap P) + \mathcal{P}(C \cap \overline{P}) = \frac{1}{40} + \frac{27}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

Par la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_C(P) = \frac{\mathcal{P}(P \cap C)}{\mathcal{P}(C)} = \frac{\dfrac{1}{40}}{\dfrac{7}{10}} = \frac{1}{40} \times \frac{10}{7} = \frac{1}{28}$$

7. Avec des variables aléatoires :

Exercice 3872

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note les évènements :

- M : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- T : "*le test est positif*".

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ? On arrondira la probabilité au millième près.

4. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subbissant le test est donnée par le tableau suivant :

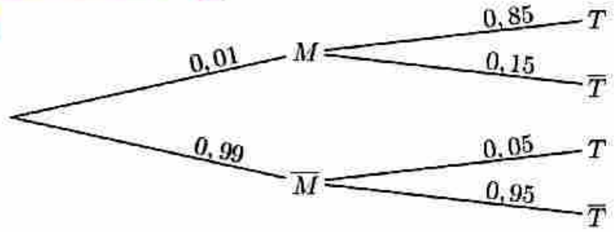
Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Correction 3872

1.



2. a. On recherche la probabilité de l'évènement $M\cap T$; en utilisant l'arbre de probabilité, on obtient :

$$\mathcal{P}(M\cap T)=\mathcal{P}(M)\cdot\mathcal{P}_M(T)$$
$$=0{,}01\times 0{,}85=0{,}0085$$

On a la décomposition suivante de l'évènement T :

$$T=(M\cap T)\cup(\overline{M}\cap T)$$

Les deux éléments de cette réunion sont disjoints entre eux ; d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(T)=\mathcal{P}(M\cap T)+\mathcal{P}(\overline{M}\cap T)$$
$$=\mathcal{P}(M)\cdot\mathcal{P}_M(T)+\mathcal{P}(\overline{M})\cdot\mathcal{P}_{\overline{M}}(T)$$
$$=0{,}01\times 0{,}85+0{,}99\times 0{,}05$$
$$=0{,}058$$

3. On recherche la probabilité $\mathcal{P}_T(M)$:

D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_T(M)=\frac{\mathcal{P}(M\cap T)}{\mathcal{P}(T)}$$

D'après les résultats de la question **2.** :

$$=\frac{0{,}0085}{0{,}058}\simeq 0{,}147$$

4. a. Notons que $\mathcal{X}$ la variable aléatoire assosicant à un animal le coût à engager ; son espérance a pour valeur :

$$E(\mathcal{X})=0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)+100\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}100)+1\,000\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1\,000)$$
$$=0\times 0{,}9405+100\times 0{,}0580+1\,000\times 0{,}0015$$
$$=7{,}3$$

b. L'espérance présente montre qu'en moyenne l'éleveur dépensera 7,3€ par bête ; ainsi, pour 200 bêtes il pourra espérer dépenser :

$200\times 7{,}3=1460$€.

Exercice 3797

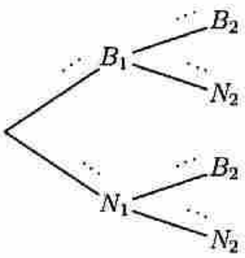
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches *(k entier naturel supérieur ou égal à 1)* et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 *(respectivement N_1)* l'évènement "*on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1*".
On note B_2 *(respectivement N_2)* l'évènement "*on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2*".

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



b. Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$

2. Dans la suite, on considère que k=12.

Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.

Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.

Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a. Montrer que les valeurs possibles de $\mathcal{X}$ sont 4 et -8.

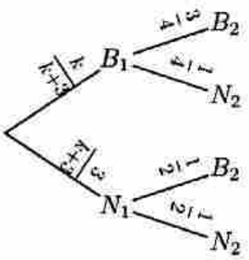
b. Déterminer la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$.

c. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$.

d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Correction 3797

1. a. Voici l'arbre de probabilité complété :



b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(B_2) = \mathcal{P}(B_2 \cap B_1) + \mathcal{P}(B_2 \cap N_1)$$
$$= \mathcal{P}(B_1)\cdot\mathcal{P}_{B_1}(B_2) + \mathcal{P}(N_1)\cdot\mathcal{P}_{N_1}(B_2)$$
$$= \frac{k}{k+3}\times\frac{3}{4} + \frac{3}{k+3}\times\frac{1}{2} = \frac{3k}{4\cdot(k+3)} + \frac{3}{2\cdot(k+3)}$$
$$= \frac{3k}{4\cdot(k+3)} + \frac{6}{4\cdot(k+3)} = \frac{3k+6}{4\cdot(k+3)} = \frac{3k+6}{4k+12}$$

2. a. Etudions les gains possibles à ce jeu :

- Ayant misé 8 euros, s'il tire une boule noire, l'utilisateur perd sa mise : son gain est de -8 euros.
- Ayant misés 8 euros, s'il tire une boule blanche, l'utilisateur repmporte 12 euros : son gain 4 euros.

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend les deux valeurs -8 et 4

b.
- L'évènement $\{\mathcal{X}=-8\}$ correspond à l'évènement : N : *"La boule tirée est noire"*

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=-8) = \mathcal{P}(B_1 \cap N_2) + \mathcal{P}(N_1 \cap N_2)$$
$$= \mathcal{P}(B_1)\times\mathcal{P}_{B_1}(N_2) + \mathcal{P}(N_1)\times\mathcal{P}_{N_1}(N_2)$$
$$= \frac{12}{15}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{15}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$$
$$= \frac{4}{20} + \frac{2}{20} = \frac{6}{20}$$

- L'évènement $\{\mathcal{X}=4\}$ correspond à l'évènement : *"La boule tirée est blanche"*

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \mathcal{P}(B_1 \cap B_2) + \mathcal{P}(N_1 \cap B_2)$$
$$= \mathcal{P}(B_1)\times\mathcal{P}_{B_1}(B_2) + \mathcal{P}(N_1)\times\mathcal{P}_{N_1}(B_2)$$
$$= \frac{12}{15}\times\frac{3}{4} + \frac{3}{15}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$$
$$= \frac{9}{20} + \frac{4}{10} = \frac{17}{20}$$

c. L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

$$E(\mathcal{X}) = 4\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) + (-8)\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=-8)$$
$$= 4\times\frac{17}{20} + (-8)\times\frac{6}{20} = \frac{68}{20} - \frac{48}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

d. Le jeux est favorable au joueur car pour chaque partie, le joueur gagnera en moyenne 1 euro.

---

8. *Probabilités conditionnelle et loi binomiale :*

Exercice 3779

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

Correction 3779

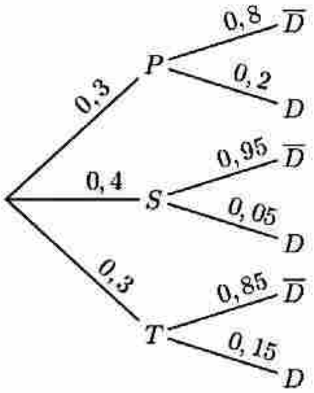
1. a. Pour le choix du fournisseur, on note les évènements suivants :

- P : *"Le pneu tiré vient du premier fournisseur"* ;
- S : *"Le pneu tiré vient du second fournisseur"* ;
- T : *"Le pneu tiré vient du troisième fournisseur"*.

Pour qualifier la qualité du pneu, on note les deux évènements suivants :

- D : *"Le pneu a des défaut"* ;
- $\overline{D}$: *"Le pneu est sans défaut"*.

Voici l'arbre de probabilité obtenu en utilisant directement les données de l'énoncé :



D'après la formule des probabilités totale, on a :

$$\mathcal{P}(\overline{D}) = \mathcal{P}(\overline{D}\cap P) + \mathcal{P}(\overline{D}\cap S) + \mathcal{P}(\overline{D}\cap T)$$
$$= 0{,}3\times 0{,}8 + 0{,}4\times 0{,}95 + 0{,}3\times 0{,}85$$
$$= 0{,}16 + 0{,}38 + 0{,}255 = 0{,}875$$

b. D'après l'arbre de probabilités, on a :

$$\mathcal{P}(\overline{D}\cap S) = \mathcal{P}_S(\overline{D})\cdot\mathcal{P}(S) = 0{,}95\times 0{,}4 = 0{,}38$$

Par définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_{\overline{D}}(S) = \frac{\mathcal{P}(\overline{D}\cap S)}{\mathcal{P}(\overline{D})} = \frac{0{,}38}{0{,}875} \simeq 0{,}434$$

2. Notons D l'évènement *"le pneu est sans défaut"*. On a d'après la question **1. a.** :

$$\mathcal{P}(D) = 1 - \mathcal{P}(\overline{D}) = 1 - 0{,}875 = 0{,}125$$

Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de pneus présentant un défaut. Les tirages des pneux s'assimilant à des tirages avec remise, on en déduit que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale :

$$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(0{,}123\,;\,10)$$

La probabilité de tirer au plus un pneu présentant un défaut donne :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$$
$$= \binom{10}{0}\times 0{,}125^0\times(1-0{,}125)^{10} + \binom{10}{1}\times 0{,}125^1\times(1-0{,}125)^9$$
$$= 0{,}875^{10} + 10\times 0{,}125\times 0{,}875^9 \simeq 0{,}639$$

9. Arbres non symétriques :

Exercice 3791

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :

- A_1 l'évènement *"la personne est absente lors du premier appel"* ;
- R_1 l'évènement *"la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel"*.

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- A_2 l'évènement *"la personne est absente lors du second appel"* ;
- R_2 l'évènement *"la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel"* ;
- R l'évènement *"la personne accepte de répondre au questionnaire"*.

Montrer que la probabilité de R est 0,176 *(On pourra utiliser un arbre)*.

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

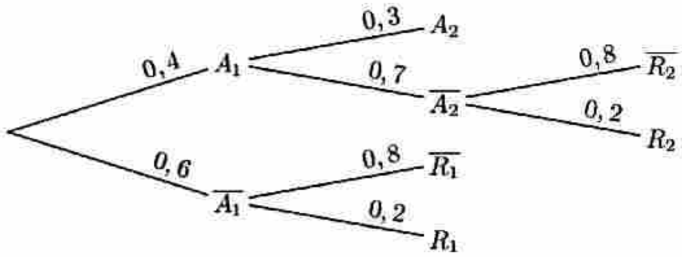
Correction 3791

1. On a l'égalité suivante : $R_1 = \overline{A_1}\cap R_1$

De la définition des probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\mathcal{P}(\overline{A_1}\cap R_1) = \mathcal{P}(\overline{A_1})\times\mathcal{P}_{\overline{A_1}}(R_1) = 0{,}6\times 0{,}2 = 0{,}12$$

2. On obtient le tableau de probabilité suivant :



- De l'égalité $R_1 = \overline{A_1}\cap R_1$, on en déduit la probabilité de R_1 :
$$\mathcal{P}(R_1) = \mathcal{P}(R_1\cap\overline{A_1}) = \mathcal{P}(\overline{A_1})\times\mathcal{P}_{\overline{A_1}}(R_1)$$
$$= 0{,}6\times 0{,}2 = 0{,}12$$
- A l'aide des probabilités conditionnelle, on a :
$$\mathcal{P}(A_1\cap\overline{A_2}) = \mathcal{P}(A_1)\times\mathcal{P}_{A_1}(\overline{A_2})$$
$$= 0{,}4\times 0{,}7 = 0{,}28$$
La personne répond au questionnaire au second appel si, et seulement si, il était absent lors du premier appel et présent lors du second appel ; ainsi, on a :
$$R_2 = A_1\cap\overline{A_2}\cap R_2 = \overline{A_2}\cap R_2$$

Ainsi, on en déduit la probabilité qu'une personne réponde au questionnaire lors du second appel est :

$$\mathcal{P}(R_2) = \mathcal{P}(\overline{A_2} \cap R_2) = \mathcal{P}(\overline{A_2}) \times \mathcal{P}_{\overline{A_2}}(R_2)$$
$$= 0{,}28 \times 0{,}2 = 0{,}056$$

Les deux évènements R_1 et R_2 sont disjoints et on a l'égalité $R = R_1 \cup R_2$. On en déduit la probabilité qu'une personne réponde au questionnaire :

$$\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(R_1) + \mathcal{P}(R_2) = 0{,}12 + 0{,}056 = 0{,}176$$

3. On recherche la probabilité $\mathcal{P}_R(R_1)$. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a l'égalité suivante :

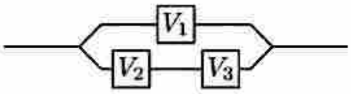
$$\mathcal{P}_R(R_1) = \frac{\mathcal{P}(R \cap R_1)}{\mathcal{P}(R)}$$

En remarquant que $R \cap R_1 = R_1$, on a :

$$= \frac{\mathcal{P}(R_1)}{\mathcal{P}(R)} = \frac{0{,}12}{0{,}176} \simeq 0{,}68$$

Exercice 5834

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

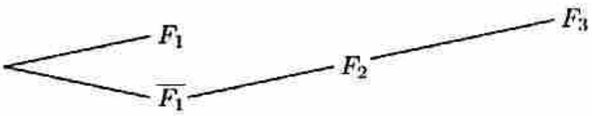


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures.
On note :

- F_1 l'évènement : "*la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures*".
- F_2 l'évènement : "*la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures*".
- F_3 l'évènement : "*la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures*".
- E l'évènement : "*le circuit est en état de marche après 6 000 heures*".

On admet que les évènements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que $\mathcal{P}(E) = 0{,}363$.

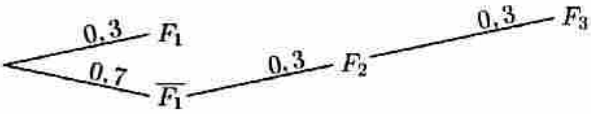
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.

Correction 5834

1. On a les probabilités suivantes :

- D'après l'énoncé : $\mathcal{P}(F_1) = 0{,}3$
- Par complémentarité, on a :
  $\mathcal{P}(\overline{F_1}) = 1 - \mathcal{P}(F_1) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- Par la définition des probabilités conditionnelles, on a :
  $$\mathcal{P}_{\overline{F_1}}(F_2) = \frac{\mathcal{P}(\overline{F_1} \cap F_2)}{\mathcal{P}(F_2)}$$
  Par indépendance des évènements $\overline{F_1}$ et F_2 :
  $$= \frac{\mathcal{P}(\overline{F_1}) \times \mathcal{P}(F_2)}{\mathcal{P}(F_2)} = \mathcal{P}(F_2) = 0{,}3$$
- D'après la définition des probabilités conditionnes, on a :
  $$\mathcal{P}_{\overline{F_1} \cap F_2}(F_3) = \frac{\mathcal{P}(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)}{\mathcal{P}(\overline{F_1} \cap F_2)}$$
  Par indépendance des évènements :
  $$= \frac{\mathcal{P}(\overline{F_1}) \times \mathcal{P}(F_2) \times \mathcal{P}(F_3)}{\mathcal{P}(\overline{F_1}) \times \mathcal{P}(F_2)} = \mathcal{P}(F_3) = 0{,}3$$

Voici l'arbre complété :



2. On a :

$$E = F_1 \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) \quad ; \quad F_1 \cap (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = \varnothing$$

On a en déduit la probabilité :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}\Big(F_1 \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)\Big)$$
$$= \mathcal{P}(F_1) + \mathcal{P}(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)$$

Par indépendance des évènements :

$$= \mathcal{P}(F_1) + \mathcal{P}(\overline{F_1}) \times \mathcal{P}(F_2) \times \mathcal{P}(F_3)$$
$$= 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}3 + 0{,}063 = 0{,}363$$

3. La probabilité recherchée est $\mathcal{P}_E(V_1)$. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_E(V_1) = \frac{\mathcal{P}(E \cap V_1)}{\mathcal{P}(E)} = \frac{\mathcal{P}(V_1)}{\mathcal{P}(E)} = \frac{0{,}3}{0{,}363} \simeq 0{,}826$$

---

10. *Evenements independants :*

Exercice 3799

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club dessin et un club théatre. Le club dessin est composé de 10 membres, le club théatre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On interroge un élève de la classe pris au hasard.
On appelle :

- D l'évènment : "*L'élève fait partie du club dessin*" ;
- T l'évènement : "*L'élève fait partie du club théatre*".

Montrer que les évènements D et T sont indépendants.

Correction 3799

La probabilité qu'un élève fasse partie du club de photo est de :

$$\mathcal{P}(D)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

La probabilité qu'un élève fasse partie du club de théatre est de :

$$\mathcal{P}(T)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

La probabilité qu'un évève participe à la fois au club de théatre et au club photo est de :

$$\mathcal{P}(D\cap T)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(D)\times\mathcal{P}(T)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}=\mathcal{P}(D\cap T)$$

De l'égalité précédente, on en déduit que les deux évènements D et T sont indépendants.

Exercice 4227

On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité $\mathcal{P}$.

On sait que :

$$\mathcal{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}\quad;\quad \mathcal{P}(\overline{A})=\frac{3}{5}$$

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Correction 4227

La probabilité de l'évènement s'obtient par complémentarité :

$$\mathcal{P}(A)=1-\mathcal{P}(\overline{A})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

De la formule de la probabilité d'une réunion, on obtient :

$$\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A\cap B)$$

Les évènements A et B sont indépendants :

$$\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}(B)$$

$$\frac{4}{5}=\frac{2}{5}+\mathcal{P}(B)-\frac{2}{5}\times\mathcal{P}(B)$$

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\mathcal{P}(B)\times\Big(1-\frac{2}{5}\Big)$$

$$\frac{3}{5}\times\mathcal{P}(B)=\frac{2}{5}$$

$$\mathcal{P}(B)=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\mathcal{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}$$

$$\mathcal{P}(B)=\frac{2}{3}$$

Exercice 4232

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts :

Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'évènement "*le sac présente le défaut a*" et B l'évènement "*le sac présente le défaut b*". Les probabilités des évènements A et B sont respectivement :

$\mathcal{P}(A)=0{,}02\quad;\quad\mathcal{P}(B)=0{,}01\,;$

On suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement :
   C : "*le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b*"
2. Calculer la probabilité de l'évènement :
   D : "*le sac est défectueux*"
3. Calculer la probabilité de l'évènement :
   E : "*le sac ne présente aucun défaut*"
4. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b?

Correction 4232

1. L'évènement C est l'intersection des évènements A et B :
   $\mathcal{P}(C)=\mathcal{P}(A\cap B)$
   Les évènements A et B sont indépendants :
   $$=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)=0{,}02\times0{,}01=0{,}000\,2$$
2. Le sac est défectueux s'il présente au moins un des deux défaut :
   $\mathcal{P}(D)=\mathcal{P}(A\cup B)$
   La formule de la propriété d'une réunion donne :
   $$=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A\cap B)$$
   $$=0{,}02+0{,}01-0{,}000\,2=0{,}0298$$
3. Le complémentaire de l'évènement E est l'évènement D :
   $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\overline{D})=1-\mathcal{P}(D)=1-0{,}0298=0{,}9702$
4. On cherche à connaître la probabilité $\mathcal{P}_A(B)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
   $$\mathcal{P}_A(B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$
   Les évènements A et B sont indépendants :
   $$=\frac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A)}=\mathcal{P}(B)=0{,}01$$
   Ce résultat est assez logique puisque ces deux évènements sont indépendants.

Exercice 3805

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.
Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.

2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

- A : "*La montre tirée présente le défaut a*" ;
- B : "*La montre tirée présente le défaut b*" ;
- C : "*La montre tirée ne présente aucun des deux défauts*" ;
- D : "*La montre tirée présente un et un seul des deux défauts*".

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.

2. Calculer la probabilité de l'évènement D.

Correction 3805

1. En remarquant que l'évènement C est l'évènement complémentaire de $A\cup B$, déterminons la probabilité de cet évènement :

$$\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A\cap B)$$

A et B étant deux évènement indépendants :

$$=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}(B)$$
$$=0{,}02+0{,}1-0{,}2\times0{,}01=0{,}12-0{,}002$$
$$=0{,}118$$

On en déduit la probabilité de l'évènement C :

$$\mathcal{P}(C)=1-\mathcal{P}(A\cup B)=1-0{,}118=0{,}882$$

2. Une montre peut présenter soit aucun, soit un, soit deux défauts. Ainsi, on obtient les trois événements C, D et $A\cap B$ forment une partition de l'univers Ω. Ainsi, on a :

$$\mathcal{P}(C)+\mathcal{P}(D)+\mathcal{P}(A\cap B)=1$$
$$0{,}882+\mathcal{P}(D)+0{,}002=1$$
$$\mathcal{P}(D)+0{,}884=1$$
$$\mathcal{P}(D)=1-0{,}884$$
$$\mathcal{P}(D)=0{,}116$$

Exercice 3800

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer la face numérotée k (*k est un entier et* $1\leqslant k\leqslant 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables ;
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r ;
- les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que :

$p_k=\dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant 6$.

2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

- A : "*le nombre obtenu est pair*" ;
- B : "*le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3*" ;
- C : "*le nombre obtenu est 3 ou 4*".

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Correction 3800

1. Puisque les nombres p_1, ..., p_6 sont six termes d'une suite arithmétique de raison r, on a l'égalité suivante :

$$p_2=p_1+r\quad;\quad p_3=p_1+2\cdot r\quad;\quad p_4=p_1+3\cdot r$$
$$p_5=p_1+4\cdot r\quad;\quad p_6=p_1+5\cdot r$$

L'univers des issues étant composé de ces six évènements élémtaire, on a :

$$\mathcal{P}(\Omega)=1$$
$$\sum_{i=}^{6}p_i=1$$
$$p_1+(p_1+r)+(p_1+2\cdot r)+(p_1+3\cdot r)+(p_1+4\cdot r)+(p_1+5\cdot r)=1$$
$$6\cdot p_1+15\cdot r=1$$

Comme les trois nombres p_1, p_2 et p_4 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, ces trois termes admettent les expressions :

$$p_2=q\cdot p_1\quad;\quad p_4=q\cdot p_2$$

On en déduit :

$$q=\frac{p_2}{p_1}\quad;\quad q=\frac{p_4}{p_2}$$

Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{p_4}{p_2}$$
$$\frac{p_1+r}{p_1}=\frac{p_1+3\cdot r}{p_1+r}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$(p_1+r)\cdot(p_1+r)=p_1\cdot(p_1+3\cdot r)$$
$${p_1}^2+2\cdot p_1\cdot r+r^2={p_1}^2+3\cdot p_1\cdot r$$
$$2\cdot p_1\cdot r+r^2-3\cdot p_1\cdot r=0$$
$$r^2-p_1\cdot r=0$$
$$r\cdot(r-p_1)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$r=0$	$r-p_1=0$
	$r=p_1$

L'expérience aléatoire n'étant pas équiprobable, il n'est possible d'avoir $r=0$. Ainsi, on a $r=p_1$.

De l'égalité obtenue précédemment, on a :

$$6\cdot p_1+15\cdot r=1$$
$$6\cdot p_1+15\cdot p_1=1$$
$$21\cdot p_1=1$$
$$p_1=\frac{1}{21}$$

Ainsi, les probabilités p_k sont les 6 premiers termes d'une suite de premier terme $\dfrac{1}{21}$ et de raison $\dfrac{1}{21}$. On a :

$$p_1=\frac{1}{21}\ ;\ p_2=\frac{2}{21}\ ;\ p_3=\frac{3}{21}\ ;\ p_4=\frac{4}{21}\ ;\ p_5=\frac{5}{21}\ ;\ p_6=\frac{6}{21}$$

2. **a.**

- $A=\{2\,;4\,;6\}$:
$$\mathcal{P}(A)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$
- $B=\{3\,;4\,;5\,;6\}$
$$\mathcal{P}(B)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$
- $C=\{3\,;4\}$
$$\mathcal{P}(C)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

b. On souhaite calculer la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_A(B)$; on a la probabilité :

$$\mathcal{P}(A\cap B)=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{10}{21}$$

On en déduit la probabilité conditionnelle suivante :

$$\mathcal{P}_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\frac{10}{21}}{\frac{12}{21}} = \frac{10}{21}\times\frac{21}{12} = \frac{5}{6}$$

c. • On a l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) = \frac{4}{7}\times\frac{6}{7} = \frac{24}{49} \neq \mathcal{P}(A\cap B)$$

Les deux évènements A et B ne sont pas indépendants.

• On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(A\cap C) = \frac{4}{21}$$

On a l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(C) = \frac{4}{7}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{21}$$

Les deux évènements A et C sont donc indépendants.

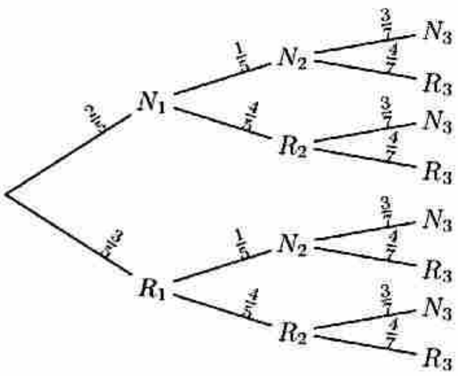
Exercice 3804

On considère trois urnes qui contiennent chacune des boules noires et rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne. Pour tout $i\in\{1\,;2\,;3\}$, on considère les évènements suivants :

- N_i : *"on tire une boule noire de l'urne U_i"* ;
- R_i : *"on tire une boule rouge de l'urne U_i"*.

On considère l'arbre de probabilité suivant :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement N_3.

2. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendant ?

Correction 3804

1. L'évènement N_3 peut être vu comme la réunion suivante :

$$N_3 = (N_1\cap N_2\cap N_3)) \bigcup (N_1\cap R_2\cap N_3)) \bigcup (R_1\cap N_2\cap N_3\cap)) \bigcup (R_1\cap R_2\cap N_3))$$

Chaque élément de cette réunion sont disjoint entre eux ; on en déduit d'après la formul de probabilité totale :

$$\mathcal{P}(N_3) = \mathcal{P}(N_1\cap N_2\cap N_3) + \mathcal{P}(N_1\cap R_2\cap N_3) + \mathcal{P}(R_1\cap N_2\cap N_3) + \mathcal{P}(R_1\cap R_2\cap N_3)$$
$$= \frac{6}{175} + \frac{24}{175} + \frac{9}{175} + \frac{36}{175} = \frac{75}{175}$$

2. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(N_1) = \frac{2}{5}$$

On remarque que l'évènement $N_1\cap N_3$ peut s'écrire :

$$N_1\cap N_3 = (N_1\cap N_2\cap N_3) \cup (N_1\cap R_2\cap N_3)$$

où les évѐnements de cette réunion sont disjoints entre eux.

D'après la formule des probabilités totales, on a l'égalité :

$$\mathcal{P}(N_1\cap N_3) = \mathcal{P}(N_1\cap N_2\cap N_3) + \mathcal{P}(N_1\cap R_2\cap N_3) = \frac{6}{175} + \frac{24}{175} = \frac{30}{175}$$

On remarque qu'on a l'égalité suivante :

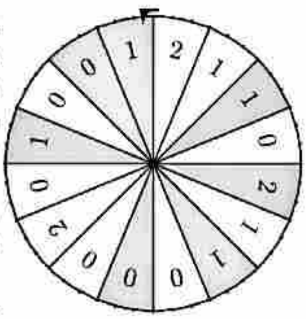
$$\mathcal{P}(N_1)\times\mathcal{P}(N_3) = \frac{2}{5}\times\frac{75}{175} = \frac{30}{175} = \mathcal{P}(N_1\cap N_3)$$

Ce qui justifie que les évènements N_1 et N_3 sont indépendant entre eux.

11. *Expériences aléatoires indépendantes :*

Exercice 5835

Un jeu consiste à faire tourner la roue ci-contre une première fois et de noter la couleur de la case obtenue, puis de faire tourner la roue une seconde fois et de noter le nombre obtenu.



Les deux lancers de la roue sont évidemment indépendants entre eux.

On considère les deux évènements :

- A : *"la case obtenue est grise lors du premier tirage"* ;
- B : *"la case obtenue porte le numéro 0 lors du second tirage"*.

1. Justifier que : $\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}(B)$

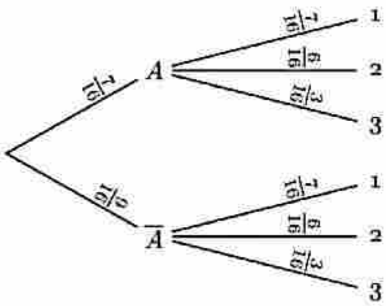
2. Dresser un arbre de probabilité représentant ce jeu.

Correction 5835

1. Les deux lancers étant, bien entendu, indépendant, les évènements que les deux lancers produisent sont indépendants entre eux :

$$\mathcal{P}_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A)} = \mathcal{P}(B)$$

2. Voici l'arbre de probabilité représentant ce jeu :



12. Rappels de probabilité :

Exercice 3767

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :
- A : "*la carte tirée est un pique*" ;
- B : "*la cate tirée est rouge*" ;
- C : "*la carte tirée est une figure*".

1. Décrire l'issue de cette expérience aléatoire et la loi de probabilité.
2. Calculer les probabilités des événements :
$$A \quad ; \quad B \quad ; \quad C$$
$$A\cap B \quad ; \quad B\cap C \quad ; \quad A\cup B \quad ; \quad A\cup C$$
3. Calculer la probabilité de l'événement :
E : "*la carte tirée n'est ni un pique ni une figure*"

Correction 3767

1. Les issues de cette expérience aléatoire sont chacune de ces 32 cartes ; le tirage étant aléatoire et les cartes étant tous semblables, chaque issue sont équiprobables.

Chaque évènement élémetaire a une probabilité :
$\mathcal{P}(\omega) = \dfrac{1}{32}$

2.
- L'évènement A est composé de 8 cartes distinctes :
$\mathcal{P}(A) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$
- Les cartes portant les symboles carrés et carreaux sont considérés comme rouge ; ainsi, un jeu de 32 cartes contient 16 cartes rouges :
$\mathcal{P}(B) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$
- Chaque couleur comporte 3 figure et un tel jeu contient 4 couleurs ; ainsi, il y a au total 12 figures :
$\mathcal{P}(C) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$
- Il n'y a aucune carte de pique qui soit rouge ; ainsi :
$A\cap B = \varnothing$
On a :
$\mathcal{P}(A\cap B) = 0$
- Les couleurs rouges étant carreaux et coeur, il y a au total 6 figures rouges. On a :
$\mathcal{P}(B\cap C) = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16}$
- Il y a 8 piques et 16 cartes rouges et aucun pique n'est rouge ; ainsi, la probabilité de $A\cup B$ est :
$\mathcal{P}(A\cup B) = \dfrac{24}{32} = \dfrac{3}{4}$
- Il y a 8 piques dans ce jeu et 12 piques au total mais 3 de ses figures sont des piques ; ainsi, l'évènement $A\cup C$ est composé de 17 évènements :
$\mathcal{P}(A\cup C) = \dfrac{17}{32}$

3. En remarquant la relation suivante :
$E = \overline{A\cup C}$

On a l'égalité suivante :
$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\overline{A\cup C}) = 1 - \mathcal{P}(A\cup C) = 1 - \dfrac{17}{32} = \dfrac{15}{32}$

Exercice 4250

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : "*Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ?*". Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 2e mois \ Retards le 1er mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

On choisit au hasard un individu de cette population.

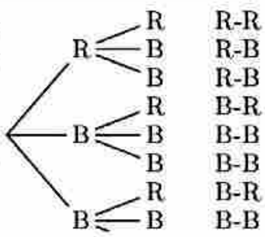
1. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
2. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

Correction 4250

1. Il y a eu 428 personnes qui ont eu au moins un retard le premier mois. Ainsi, la probabilité que la personne choisit au hasard ait eu au moins un retard le premier mois est de :
$\dfrac{428}{1000} = 0{,}428$
2. Parmi les 572 personnes n'ayant pas eu de retard lors du premier mois, il y a 310 personnes ayant eu au moins un retard lors du deuxième mois. Ainsi, la probabilité que la personne choisi ait eu au moins un retard le deuxième mois parmi les gens n'ayant pas eu de retard lors du premier mois est de :
$\dfrac{310}{572} \simeq 0{,}542$

Exercice 3777

Une urne contient deux boules bleues et une boule rouge, toutes identiques au toucher.



1. On tire une boule puis on la remet dans l'urne avant d'en tirer une seconde.

On admettra qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.

a. Déterminer la probabilité des événements suivants :
- A : *"La premier boule tirée est rouge"*.
- B : *"Les deux boules tirées sont de même couleur"*
- C : *"La première boule tirée est rouge ou la seconde boule tirée est bleu"*.

b. Déterminer la probabilité des événements suivants :
$\overline{A}$; $B \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$

2. On change les règles de ce jeu ainsi : il n'y a plus de remise; la première boule tirée est écartée du jeu.

a. Construire l'arbre des issues lié à ce nouveau jeu.

b. Calculer les nouvelles probabilités des événements cités aux question a. et b. de la question précédente.

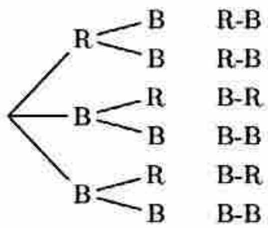
c. Quel est la probabilité de tirée une boule bleu au second tirage alors que lors du premier tirage, on a déjà tiré une boule bleu ?

Correction 3777

1. a. Chaque issue illustrée par le "*bout*" de chaque branche présente une issue possible et chacune de ces issues sont équiprobables; ainsi, on a les probabilités suivantes :
- L'évènement A est réalisé par 3 évènement élémentaire; ainsi, on a :
$\mathcal{P}(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- L'évènement B est réalisé par 5 évènements élémentaires :
$\mathcal{P}(B) = \frac{5}{9}$
- L'évènement C est composé de 7 évènements élémentaire :
$\mathcal{P}(C) = \frac{7}{9}$

b.
- $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- La réunion des évènements A et B comprend au total 7 évènements élémenaires :
$\mathcal{P}(B \cup C) = \frac{7}{9}$
- Il n'y a qu'un évènement élémentaire qui vérifie simultanemment A et B; on a :
$\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{9}$.
- Il y a 5 évènements élémentaires vérifiant simultanemment B et C; ainsi, la probabilité de $B \cap C$ est :
$\mathcal{P}(B \cap C) = \frac{5}{9}$.

2. a.



b. $\mathcal{P}(A) = \frac{1}{3}$; $\mathcal{P}(B) = \frac{1}{3}$; $\mathcal{P}(C) = \frac{2}{3}$

$\mathcal{P}(\overline{A}) = \frac{2}{3}$; $\mathcal{P}(B \cup C) = \frac{2}{3}$; $\mathcal{P}(A \cap B) = 0$

$\mathcal{P}(B \cap C) = \frac{1}{3}$

c. Sachant qu'on a tiré une boule bleu au premier tirage, notre univers d'observation se limite alors à quatre évènements élémentaires; la probabilité est de tirer au second tirage une boule bleu :
$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Exercice 3768

Dans un centre aéré, différentes activités sont proposées, dont le tir à l'arc et l'escalade.
Parmi les 60 jeunes présents ce jour, 45 se sont inscrits au tir à l'arc et 24 à l'escalade.
Sachant que 6 d'entre eux ne se sont inscrits à aucune de ces activités, déterminer la probabilité qu'un jeune rencontré au hasard dans le centre pratique aujourd'hui :

1. le tir à l'arc;
2. l'escalade;
3. aucun de ces deux sports;
4. le tir à l'arc ou l'escalade;
5. le tir à l'arc et l'escalade.

Correction 3768

1. 45 personnes sont inscrits au tir à l'arc; ainsi, la probabilité de rencontrer un jeune inscrit au tir à l'arc est de :
$\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

2. 24 personnes pratiques l'escalade; ainsi, la probabilité recherchée est :
$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

3. 6 personnes ne se sont inscrits à aucun sport; ainsi, la probabilité de rencontrer un jeune ne faisant aucun sport est de :
$\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

4. 6 personnes ne se sont inscrits à aucun sport donc au total 54 personnes pratiquen au moins un des deux sports. La probabilité recherchée est :
$\frac{56}{60} = \frac{14}{15}$

5. Il y a 54 personnes qui pratiquent au moins un sport ; or, 45 se sont inscrits au tir à l'arc et 24 à l'escalade.

Notons :
$\begin{cases} x : \text{le nombre pratiquant uniquement le tir à l'arc} \\ y : \text{le nombre pratiquant uniquement l'escalade} \\ z : \text{le nombre pratiquant les deux sports} \end{cases}$

Ces nombres vérifient les relations :
$\begin{cases} x + y + z = 54 \\ x + z = 45 \\ y + z = 24 \end{cases}$

On en déduit qu'il y a 15 jeunes participants aux deux sports; ainsi, la probabilité de rencontrer un jeune pratiquant les deux sports est :
$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

Exercice 3766

Un dé pipé est tel que la probabilité d'obtenir chacun des numéros de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro. On lance ce dé.

1. Par quelle loi de probabilité sur $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ peut-on modéliser cette expérience ?

2. Calculer les probabilités des événements :
   - E : *"obtenir un numéro strictement supérieur à 3"* ;
   - F : *"obtenir un multiple de 3"* ;
   - $I = \overline{E} \cup F$.

Correction 3766

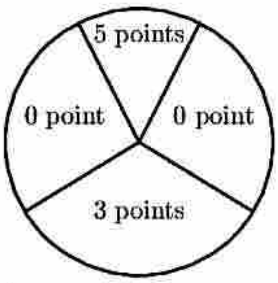
1. Notons p_i la probabilité associée à la face i.
Ces valeurs formant une loi de probabilité, on en déduit l'égalité :
$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$
De plus, l'énoncé précise que chaque p_i est proportionnel au numéro porté à la face. Ainsi, il existe un réel k tel que :
$$\forall i \in \{1;2;3;4;5;6\},\ p_i = i \cdot k$$
Ainsi, on a :
$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$
$$k + 2{\cdot}k + 3{\cdot}k + 4{\cdot}k + 5{\cdot}k + 6{\cdot}k = 1$$
$$21{\cdot}k = 1$$
$$k = \frac{1}{21}$$
$$p_1 = \frac{1}{21}$$
La loi de probabilité associée à cette expérience est donnée par le tableau de probabilité suivant :

n	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(n)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

2.
   - $E = \{4\,;5\,;6\}$.
   On a la probabilité suivante :
   $$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{4\}) + \mathcal{P}(\{5\}) + \mathcal{P}(\{6\}) = \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{2}{7} = \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$
   - $F = \{3\,;6\}$.
   On a :
   $$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(\{3\}) + \mathcal{P}(\{6\}) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$
   - $I = \overline{E} \cup F = \{1;2;3;6\}$
   On déduit la valeur de la probabilité :
   $$\mathcal{P}(I) = \mathcal{P}(\{1\}) + \mathcal{P}(\{2\}) + \mathcal{P}(\{3\}) + \mathcal{P}(\{6\}) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{7} + \frac{4}{21} = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{10}{21}$$

Exercice 4205

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur figure ci-dessous :



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.
Le joueur lance une fléchette. On note :
- p_0 la probabilité d'obtenir 0 point ;
- p_3 la probabilité d'obtenir 3 points ;
- p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

Sachant que $p_5 = \frac{1}{2} \cdot p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} \cdot p_0$, déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

Correction 4205

Dans cette expérience aléatoire, il n'existe que trois sorties possibles :

0 point ; 3 points ; 5 points

Ainsi, la somme des probabilités de ces évenemments vaut 1 :
$$p_0 + p_3 + p_5 = 1$$
Des relations données dans l'énoncé entre les divers probabilités, on obtient :
$$p_3 = 2{\cdot}p_5 \quad ; \quad p_0 = 3{\cdot}p_5$$
Ainsi, l'égalité obtenue précédemment devient :
$$p_0 + p_3 + p_5 = 1$$
$$3{\cdot}p_5 + 2{\cdot}p_5 + p_5 = 1$$
$$6{\cdot}p_5 = 1$$
$$p_5 = \frac{1}{6}$$
On déduit les valeurs des deux autres probabilités :
$$p_3 = 2{\cdot}p_5 = \frac{1}{3} \quad ; \quad p_0 = 3{\cdot}p_5 = \frac{1}{2}$$

13. *Evénements indépendants :*

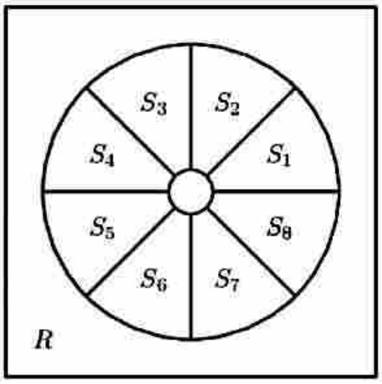
Exercice 3802

Un carré de côté $20\,cm$ est partagé selon les 10 zones suivantes :

- un disque D de rayon $1\,cm$;
- 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D' de même centre

et de rayon $9\,cm$;

- une zone R entre le disque D' et le bord du carré.



On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. a. Déterminer la probabilité $p(D)$ pour que le point soit placé dans le disque D.

b. Déterminer la probabilité $p(S_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes :

- $p(D)=0{,}008$;
- $p(S_k)=0{,}0785$ pour $k\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

A cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :

- un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
- un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$;
- un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu :

a. Calculer la probabilité $p(R)$ pour que le point soit placé dans la zone R. Calculer l'espérance de $\mathcal{X}$.

b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n\geqslant 0{,}9$.

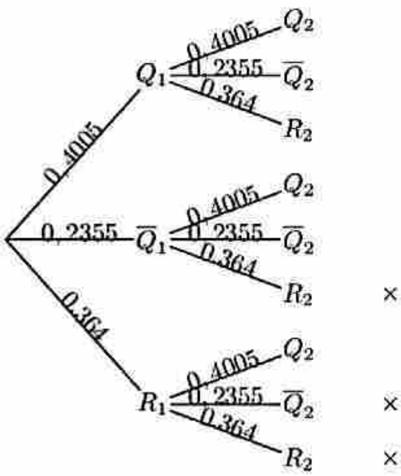
Correction 3802

1. a. L'aire du disque D a pour mesure :
$\mathcal{A}_D=\pi\cdot r^2=\pi\times 1^2=\pi$
L'aire du carré a pour aire :
$\mathcal{A}_C=c\cdot c=20\times 20=400$
On en déduit la probabilité que le point soit placé dans le disque D :
$\mathcal{P}(D)=\dfrac{\pi}{400}$

b. L'aire du disque D' a pour mesure :
$\mathcal{A}_{D'}=\pi\cdot r'^2=\pi\times 9^2=81\cdot\pi$
Ainsi, les 8 secteurs se partagent une domaine ayant une aire :
$81\cdot\pi-\pi=80\cdot\pi$
Chacun de ses secteurs étant de même aire, on en déduit :
$\mathcal{A}_{S_1}=\dfrac{80\cdot\pi}{8}=10\cdot\pi$
On en déduit la probabilité que le point soit placé dans le secteur S_1 :
$\mathcal{P}(S_1)=\dfrac{10\cdot\pi}{400}=\dfrac{\pi}{40}$

2. a. Par complémentarité, on a :
$p(R)=1-\big[p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)+p(7)+p(8)\big]$
$=1-\big(0{,}008+8\times 0{,}0785\big)=0{,}364$
L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ s'exprime par :
$E(\mathcal{X})=(-4)\cdot p(R)+1\cdot p(S_1)+2\cdot p(S_2)+3\cdot p(S_3)+4\cdot p(S_4)$
$+5\cdot p(S_5)+6\cdot p(S_6)+7\cdot p(S_7)+8\cdot p(S_8)+10\cdot p(D)$
$=(-4)\cdot p(R)+\big(1+2+3+4+5+6+7+8\big)\cdot p(S_1)+10\cdot p(D)$
$=(-4)\times 0{,}364+36\times 0{,}0785+10\cdot 0{,}008=1{,}45$

b. Notons Q l'évènement "*le point obtient un gain supérieur ou égal à 4*".
On a l'arbre de probabilité suivant :



Les chemins présentés par une croix présentent un gain total strictement négatif sur les deux tirages :
$0{,}2355\times 0{,}364+0{,}364\times(0{,}2355+0{,}364)\simeq 0{,}304$
On en déduit la probabilité d'avoir un gain total positif ou nul :
$1-0{,}304=0{,}696$

c. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de fois que le point est placé sur le disque D. $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre n et $0{,}008$ $\big(\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(n\,;0{,}008)\big)$.
On a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) \geqslant 0{,}9$$
$$1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 0) \geqslant 0{,}9$$
$$-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 0) \geqslant 0{,}9 - 1$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 0) \leqslant 0{,}1$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) \leqslant 0{,}1$$
$$\binom{0}{10}\times 0{,}008^0\times 0{,}992^n \leqslant 0{,}1$$
$$0{,}992^n \leqslant 0{,}1$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\ln\left(0{,}992^n\right) \leqslant \ln 0{,}1$$
$$n\cdot \ln\left(0{,}992\right) \leqslant \ln 0{,}1$$

Le nombre ln(0,0992) est négatif :

$$n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln\left(0{,}992\right)} \simeq 286{,}67$$
$$n \geqslant 287$$

A partir du rang 287, la probabilité est supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 4220

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I, X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivantes :

- A chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\dfrac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : "*au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre*".

   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : "*au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque*".

   Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il avoir pour que la probabilité de l'évènement : "*au moins l'un des robots passe successivements par les sommets S, I et X dans cet ordre*" soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Correction 4220

Partie A

1. Considérons les évènements suivants :
   - S : "*le robot est passé par le sommet S*" ;
   - I : "*le robot est passé par le sommet I*" ;
   - X : "*le robot est passé par le sommet X*" ;

   Les conditions cités dans l'énoncé se traduisent par :
   $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(X) \quad ; \quad \mathcal{P}(S) = 2\cdot\mathcal{P}(I)$

   Cette expérience aléatoire ne dispose que de ces trois issues ; ainsi, la loi de probabilité vérifie :
   $$\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(X) = 1$$
   $$\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(S) = 1$$
   $$2\cdot\mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(I) + 2\cdot\mathcal{P}(S) = 1$$
   $$5\cdot\mathcal{P}(I) = 1$$
   $$\mathcal{P}(I) = \frac{1}{5}$$
   Ainsi, on a la loi de probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(S) = \dfrac{2}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(I) = \dfrac{1}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(X) = \dfrac{2}{5}$
2. Considérons les évènements suivants :
   - S_1 : "*le robot passe par le sommet S à la première étape*" ;
   - I_2 : "*le robot passe par le sommet I à la seconde étape*" ;
   - X_3 : "*le robot passe par le sommet X à la troisième étape*" ;

   Les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres, on a :
   $\mathcal{P}(S_1\cap I_2\cap X_3) = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{125}$
3. Le même raisonnement que la question précdente permet de montrer que chaque évènement élémentaire composant l'évènement F a la probabilité suivante :
   $\omega \in F \Longrightarrow \mathcal{P}\big(\{\omega\}\big) = \dfrac{4}{125}$

   Pour connaître le nombre de manières par lesquelles le robot peut passer par les trois sommets ; ce nombre est :
   $3\times 2\times 1 = 6$

Ainsi, on a :

$$\mathcal{P}(F) = 6\times\mathcal{P}(E) = 6\times\frac{4}{125} = \frac{24}{125}$$

Partie B

Nommons X la variable alátoire comptant le nombre de robots qui ont réalisés l'évènement E.

Le déplacement de chaque robot étant indépendants les uns des autres et puisque la probabilité qu'un robot réalise l'évènement E est de $\frac{4}{125}$; ainsi, cet expérience est assimiliable à un schéma de n épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{125}$:

$$X \sim \mathscr{B}\left(n\,;\frac{4}{125}\right)$$

Les deux évènements suivants sont complémentaires :

$(X \geqslant 1)$; $(X = 0)$

Ainsi, on a le calcul de probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(X \geqslant 1) = \mathcal{P}\big(\overline{(X=0)}\big)$$
$$= 1 - \mathcal{P}(X = 0)$$

X suit une loi binomiale de paramètre $\left(n\,;\frac{4}{125}\right)$

$$= 1 - \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{4}{125}\right)^0\cdot\left(\frac{121}{125}\right)^n$$
$$= 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n$$

Déterminons le nombre minimal pour que la probabilité de l'évènement recherché est supérieure à 0,99.

$$\mathcal{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$$
$$1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geqslant 0{,}99$$
$$-\left(\frac{121}{125}\right)^n \geqslant 0{,}99 - 1$$
$$-\left(\frac{121}{125}\right)^n \geqslant -0{,}01$$
$$\left(\frac{121}{125}\right)^n \leqslant 0{,}01$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(\frac{121}{125}\right)^n \leqslant \ln 0{,}01$$
$$n\cdot\ln\frac{121}{125} \leqslant \ln 0{,}01$$
$$\frac{121}{125} \geqslant 1 \Longrightarrow \ln\frac{121}{125} \leqslant 0$$
$$n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{121}{125}}$$

Or, $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{121}{125}} \simeq 70{,}8$

Il faut donc au minimum 71 robots pour être sûr qu'au moins un robots passe par les sommets S, I et X dans cet ordre soit supéireur à 0,99.

---

14. *Probabilité conditionnelle et loi binomiale :*

Exercice 3215

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 ‰ de ce cheptel *(ou 5 pour mille)*.

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2. **a.** On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
Montrer que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer son espérance mathématqiue.

b. On désigne par A l'évènement :
"*aucun animal n'est malade parmi les 10*".
On désigne par B l'évènement :
"*au moins un animal est malade parmi les 10*".
Calculer les probabilités de A et de B.

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement "*avoir un test positif à cette maladie*" et M l'évènement "*être atteint de cette maladie*".

a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Correction 3215

1. La maladie touchant 0,5 ‰ du cheptel, on en déduit que la probabilité que l'animal choisit au hasard soit malade est égale à :

$$\frac{0{,}5}{1000} = 0{,}000\,5$$

2. **a.** En supposant que la taille du cheptel est suffisamment grand pour supposer les dix tirages indépendant entre eux et les tirages s'effectuant au hasard, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 10 et 0,0005 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\,(10\,;0{,}0005)$$

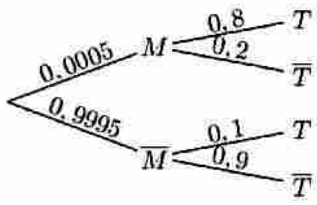
D'après le cours, la variable $\mathcal{X}$ a pour espérance :

$$E(\mathcal{X}) = n\cdot p = 10\times 0{,}000\,5 = 0{,}005$$

b. On a Les calculs de probabilités :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}\cdot p^0\cdot(1-p)^{10} = 1\times 1\times 0{,}999\,5^{10}$
  $= 0{,}999\,5^{10} =\simeq 0{,}9950$ à 10^{-4} près
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{\geqslant}1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}{<}1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)$
  $= 1 - 0{,}999\,5^{10} \simeq 0{,}005$ à 10^{-4} près

3. **a.** Voici l'arbre de probabilité représentant cette situation :



b. Les ensembles M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T\cap M) + \mathcal{P}(T\cap\overline{T})$$
$$= 0{,}0005\times0{,}8 + 0{,}9995\times0{,}1 = 0{,}10035$$

c. On cherche la probabilité :

$$\mathcal{P}_T(M) = \frac{\mathcal{P}(M\cap T)}{\mathcal{P}(M)} = \frac{0{,}0005\times0{,}8}{0{,}10035}$$
$$\simeq 0{,}0399 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Exercice 3899

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune :

- La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
- La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1€ et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :
   - E : *"à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges"* ;
   - F : *"à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge"*.

   Montrer que : $p(E)=0{,}02$; $p(F) = 0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

   $\mathcal{X}$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur *(rappel le joueur mise 1€)*.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes *(n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)*

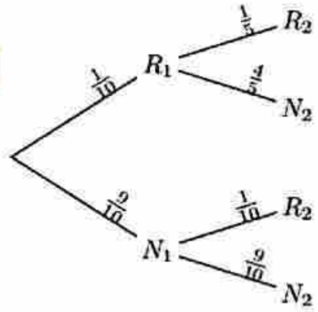
   a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n=1-(0{,}9)^n$.

   b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n>0{,}9$?

Correction 3899

1.



2.
- On a la propabilité suivante :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(R_1\cap R_2) = \mathcal{P}(R_1)\times\mathcal{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10}\times\frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{50} = 0{,}02$$

- L'évènement F est la réunion des deux évènements : $F = (R_1\cap N_2)\cup(N_1\cap R_2)$
  Ces deux évènements sont disjoints.
  On a les deux probabilités suivantes :

  ➪ $\mathcal{P}(R_1\cap N_2) = \mathcal{P}(R_1)\times\mathcal{P}_{R_1}(N_2)$
  $$= \frac{1}{10}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{50} = 0{,}08$$
  ➪ $\mathcal{P}(N_1\cap R_2) = \mathcal{P}(N_1)\times\mathcal{P}_{N_1}(R_2)$
  $$= \frac{9}{10}\times\frac{1}{10} = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

  On en déduit la probabilité suivante :
  $\mathcal{P}(F) = 0{,}08 + 0{,}09 = 0{,}17$

3. a. La variable $\mathcal{X}$ peut prendre les valeurs -1, 1 et 9.
   On a :
   - L'évènement $\{\mathcal{X}=-1\}$ correspond à l'évènement : G : *"Aucun case rouge est obtenue"*.
     Or, on a : $\overline{G} = E\cup F$
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}=-1) = 1 - \mathcal{P}(E\cup F)$
     Les deux évènements E et F sont disjoints :
     $$= 1 - \mathcal{P}(E) - \mathcal{P}(F)$$
     $$= 1 - 0{,}02 - 0{,}17 = 0{,}81$$
   - L'évènement $\{\mathcal{X}=1\}$ correspond à l'évènement F :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \mathcal{P}(F) = 0{,}17$
   - L'évènement $\{\mathcal{X}=9\}$ correspond à l'évènement F :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9) = \mathcal{P}(E) = 0{,}02$

   b. L'espérance de la variable $\mathcal{X}$ est :
   $$E(\mathcal{X}) = (-1)\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=-1) + 1\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + 9\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$$
   $$= (-1)\times0{,}81 + 1\times0{,}17 + 9\times0{,}02$$
   $$= -0{,}46$$

4. a. Le joueur lance la roue B lorsqu'il obtient lors du premier tour de roue la couleur rouge ; ainsi, la probabilité de ne pas tourner la roue B lors d'un essai est $\frac{9}{10}$.

Les parties étant indépendantes, la probabilité de ne jamais tourner la roue B lors de n lancers est de $0{,}9^n$.
Le fait de tirer au moins une fois la roue B est l'évènement complémentaire de l'évènement précédemment cité. On a :
$p_n = 1 - 0{,}9^n$

b. Lorsque q est tel que $-1<q<1$, on a la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} q^n = 0$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 1 - 0{,}9^n = 1 - 0 = 1$

c. Résolvons l'inéquation :

$$p_n > 0{,}9$$
$$1 - 0{,}9^n > 0{,}9$$
$$-0{,}9^n > -0{,}1$$
$$0{,}9^n < 0{,}1$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(0{,}9^n\right) < \ln\left(0{,}1\right)$$
$$n\cdot\ln\left(0{,}9\right) < \ln\left(0{,}1\right)$$

Le nombre $\ln\left(0{,}9\right)$ est négatif :

$$n > \frac{\ln\left(0{,}1\right)}{\ln\left(0{,}9\right)}$$

On a pour valeur approchée : $\dfrac{\ln\left(0{,}1\right)}{\ln\left(0{,}9\right)} \simeq 21{,}9$

$$n \geqslant 22$$

On en déduit la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$:
$n = 22$

Exercice 3200

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A- Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i=1$ ou $i=2$, on note E_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Est le i-ième jour*" et O_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ième jour*".

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes :
$p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1\cap E_2)$

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B- On suppose maintenant que n touristes $(n\geqslant 3)$ se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes $(0\leqslant k\leqslant n)$ partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

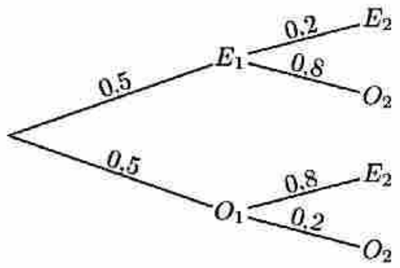
   b. Démontrer que la probabilité *(notée p)* qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

   c. **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

Correction 3200

Partie A

1. Voici l'arbre de probabilités décrivant la situation :



2. On a les probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(E_1) = 0{,}5$
   - $\mathcal{P}_{E_1}(O_2) = 0{,}8$
   - $\mathcal{P}(E_1\cap E_2) = \mathcal{P}(E_1)\times\mathcal{P}_{E_1}(E_2) = 0{,}5\times 0{,}2 = 0{,}1$

3. L'évènement "*ce touriste se rend sur la même plage les deux jours consécutifs*" est la réunion des évènements :
$E_1\cap E_2$; $O_1\cap O_2$

   Par un raisonnement équivalent à la question précédente, on montre que : $\mathcal{P}(O_1\cap O_2) = 0{,}1$

   Les deux évènements $E_1\cap E_2$ et $O_1\cap O_2$ étant disjoint, on la probabilité recherchée :
$\mathcal{P}(E_1\cap E_2) + \mathcal{P}(O_1\cap O_2) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

Partie B

1. Chacun touriste choisissant au hasard une des deux plages, le fait qu'un touriste choisisse la plage à l'Est est une épreuve de Bernoulli de paramètres 0,5.
De plus, les n touristes choisissant indépendamment des autres leur direction, on peut associer cette situation à une répétition d'épreuves indépendantes.

   La variable $\mathcal{X}$ comptant le nombre de personnes choisissant la plage à l'Est suit une loi binomiale de paramètres n et 0,5 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(n\,;0{,}5)$.

   Ainsi, on a :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k) = \binom{n}{k}\cdot 0{,}5^k\times 0{,}5^{n-k} = \binom{n}{k}\cdot 0{,}5^n$$

2. **a.** Il n'est pas possible que deux touristes soient

heureux car alors il seront les deux seuls occupants des plages de l'Est et de l'Ouest. Or, d'après l'énoncé, on a $n \geqslant 3$.

b. Pour qu'il y ait un touriste heureux :
- soit il y a un seul touriste sur la plage de l'Est. Cet évènements est $\{\mathcal{X}=1\}$;
- soit il y a un seul touriste sur la plage de l'Ouest. Cet évèneemnt est $\{\mathcal{X}=n-1\}$.

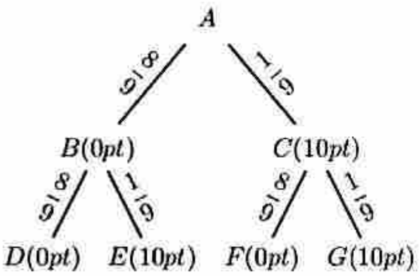
Ces deux évènements étant indépendants, la probabilité qu'un touriste soit heureux est donnée par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=n-1) = \binom{n}{1}\cdot 0{,}5^n + \frac{n}{n-1}\cdot 0{,}5^n$$
$$= \binom{n}{1}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \frac{n}{1}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^n = n\times\frac{1}{2^n} + n\times\frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{2\cdot n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

c. Ainsi, la probabilité qu'un touriste soit heureux lorsque le groupe comprend 10 personnes est :
$p = \dfrac{10}{2^{10-1}} = \dfrac{10}{2^9} \simeq 0{,}02$

Exercice 4225

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un noeud. Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie ; c'est à dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

b. Calculer l'espérance de $\mathcal{X}$.

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huits parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

Correction 4225

1. **a.** D'après l'arbre de probabilité, on a les probabilités :
- $\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}_B(D) = \dfrac{8}{9}\times\dfrac{8}{9} = \dfrac{64}{81}$
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}_B(E) = \dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{81}$
- $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(C)\times\mathcal{P}_C(E) = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{9} = \dfrac{8}{81}$
- $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(C)\times\mathcal{P}_C(G) = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{81}$

Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \mathcal{P}(D) = \dfrac{64}{81}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=10) = \mathcal{P}(E)+\mathcal{P}(F) = \dfrac{8}{81}+\dfrac{8}{81} = \dfrac{16}{81}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=20) = \mathcal{P}(G) = \dfrac{1}{81}$

b. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :
$$E(\mathcal{X}) = 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)+10\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)+20\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=20)$$
$$= 0\times\frac{64}{81}+10\times\frac{16}{81}+20\times\frac{1}{81} = \frac{160+20}{81} = \frac{180}{81}$$

c. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}=10)}(C) = \frac{\mathcal{P}\big(C\cap(\mathcal{X}=10)\big)}{\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)} = \frac{\mathcal{P}(F)}{\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)} = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}}$$

2. **a.** La probabilité de gagner 20 points est de $\dfrac{1}{81}$.
La répétition de 8 parties de manières indépendantes permet de considérer la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ comptant le nombre de fois que 20 points ont été gagnés qui suit une loi binomiale de paramètre 8 et $\dfrac{1}{81}$:
$$\mathcal{Y}\sim\mathcal{B}\Big(8\,;\,\frac{1}{81}\Big)$$
La probabilité d'obtenir exactement deux fois les 20 points sur les 8 parties donne la probabilité :
$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=2) = \binom{8}{2}\times\Big(\frac{1}{81}\Big)^2\times\Big(\frac{80}{81}\Big)^6 \simeq 0{,}004$$

b. La probabilité pour qu'il gagne au moins une partie est donnée par :
$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}\geqslant 1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{Y}<1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0)$$
$$= 1-\binom{8}{0}\times\Big(\frac{1}{81}\Big)^0\times\Big(\frac{80}{81}\Big)^8 \simeq 0{,}095$$

---

15. Probabilité conditionnelle :

Exercice 3213

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :

- A : "*le jardinier a choisi le lot 1*" ;
- B : "*le jardinier a choisi le lot 2*" ;
- J_n : "*le jardinier obtient n tulipes jaunes*".

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles :

a. Montrer que : $\mathcal{P}_B(J_n) = \binom{50}{n} \cdot 2^{-50}$

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Etablir que :
$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0{,}9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Correction 3213

1. Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1.

a. Le lot 1 contient "*de très nombreux bulbes*", ainsi le choi de 50 bulbes parmi ce lot permet d'associer le choix à une tirage indépendant et sans remise.
La proportion de bulbes donnant des tulipes de couleur jaune est de $\frac{1}{4}$, la probabilité d'avoir un de ces bulbes est de 0,25.
Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 50 et 0,25. On en déduit :
$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}25)$.

b. L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par la formule :
$E(\mathcal{X}) = n \cdot p = 50 \times 0{,}25 = 12{,}5$

c. On a l'expression de la probabilité :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=n) = \binom{50}{n} \times 0{,}25^n \times 0{,}75^{50-n}$$

d. $$\mathcal{P}(\mathcal{X}=15) = \binom{50}{15} \times 0{,}25^{15} \times 0{,}75^{50-15}$$
$$= \binom{50}{15} \times 0{,}25^{15} \times 0{,}75^{35} \simeq 0{,}089$$

2. **a.** Obtenir un bulbe donnant une tulipe jaune à partir du lot 2 revient à un tirage indépendant et sans remise. La loi de probabilité associée au nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 2 est une loi binomiale de paramètre 50 et $\frac{1}{2}$:
$$\mathcal{P}_B(J_n) = \binom{50}{n} \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^{50-n} = \binom{50}{n} \cdot 2^{-50}$$

b. Les évènements A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\mathcal{P}(J_n) = \mathcal{P}(A \cap J_n) + \mathcal{P}(B \cap J_n)$$
$$= \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}_A(J_n) + \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}_B(J_n)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \times 0{,}25^n \times 0{,}75^{50-n} + \frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \cdot 2^{-50}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \cdot \Big[\Big(\frac{1}{4}\Big)^n \times \Big(\frac{3}{4}\Big)^{50-n} + 2^{-50}\Big]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \cdot \big(4^{-n} \times 3^{50-n} \times 4^{-50+n} + 2^{-50}\big)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \cdot \big(4^{-50} \times 3^{50-n} + 2^{-50}\big)$$

c. On a :
$$p_n = \mathcal{P}_{J_n}(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap J_n)}{\mathcal{P}(J_n)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \cdot 4^{-50} \times 3^{50-n}}{\frac{1}{2} \cdot \binom{50}{n} \cdot \big(4^{-50} \times 3^{50-n} + 2^{-50}\big)}$$
$$= \frac{4^{-50} \times 3^{50-n}}{4^{-51} \times 3^{50-n} + 2^{-50}} = \frac{4^{50} \times 4^{-50} \times 3^{50-n}}{4^{50} \cdot \big(4^{-50} \times 3^{50-n} + 2^{-50}\big)}$$
$$= \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$$

d. Considérons l'inéquation :

$$p_n \geqslant 0{,}9$$
$$\frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}} \geqslant 0{,}9$$
$$3^{50-n} \geqslant 0{,}9{\cdot}(3^{50-n}+2^{50})$$
$$3^{50-n} \geqslant 0{,}9{\times}3^{50-n}+0{,}9{\times}2^{50}$$
$$3^{50-n}-0{,}9{\times}3^{50-n} \geqslant 0{,}9{\times}2^{50}$$
$$0{,}1{\times}3^{50-n} \geqslant 0{,}9{\times}2^{50}$$
$$3^{50-n} \geqslant \frac{0{,}9{\times}2^{50}}{0{,}1}$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln\left(3^{50-n}\right) \geqslant \ln\left(\frac{0{,}9{\times}2^{50}}{0{,}1}\right)$$
$$(50-n){\cdot}\ln(3) \geqslant \ln\left(\frac{0{,}9{\times}2^{50}}{0{,}1}\right)$$
$$50-n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{0{,}9{\times}2^{50}}{0{,}1}\right)}{\ln(3)}$$
$$-n \geqslant -50+\frac{\ln\left(\frac{0{,}9{\times}2^{50}}{0{,}1}\right)}{\ln(3)}$$
$$n \leqslant 50-\frac{\ln\left(\frac{0{,}9{\times}2^{50}}{0{,}1}\right)}{\ln(3)}$$

On a la valeur approchée : $50-\frac{\ln\left(\frac{0{,}9\times2^{50}}{0{,}1}\right)}{\ln 3}\simeq 33{,}5$

$$n \leqslant 33$$

Ainsi, pour qu'au minimum 90 % des tulipes jaunes soient issues du lot A, on en déduit qu'il faut qu'on obtienne moins 33 tulipes jaunes.

16. Annales :

Exercice 3230

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes.***
*La partie **I** est la démonstration d'un résultat de cours. La partie **II** est un Q.C.M.*

Partie I : question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des question suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.

*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie **II** est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. (hors programme 2012)

On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

a. $\frac{75}{512}$ b. $\frac{13}{56}$ c. $\frac{15}{64}$ d. $\frac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

a. $\frac{1}{120}$ b. $\frac{3}{40}$ c. $\frac{1}{12}$ d. $\frac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.

Quelle est la variance de $\mathcal{X}$?

a. 2 b. 13 c. 16 d. 17

4. La durée d'attente $\mathcal{T}$, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t>0$:

$$P(\mathcal{T}<t)=\int_0^t \lambda{\cdot}e^{-\lambda x}dx \quad (\textit{avec } \lambda=\frac{1}{6})$$

où t désigne le temps exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité *(arrondie à 10^{-4})* que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

a. 0,2819 **b.** 0,3935 **c.** 0,5654 **d.** 0,6065

Correction 3230

Partie I

Les évènements B et $\overline{B}$ sont des évènements complémentaires et forment une partition de l'univers :

$$\mathcal{P}(A\cap B)+\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)$$
$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(A\cap B)$$

Les évènements A et B sont indépendants :

$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}(B)$$
$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(A)\cdot[1+\mathcal{P}(\overline{B})]$$
$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}(\overline{B})$$
$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}(\overline{B})$$

On vient d'établir que les évènements A et B sont également indépendants.

Partie II

1. Cette probabilité est obtenue par :

$$\frac{\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{10\times3}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{26}$$

La bonne réponse est **d.**.

2. Considérons les évènements suivants :
   - V : "*la personne est vaccinée*".
   - G : "*la personne est grippée*".

   On a la probabilité :

$$\mathcal{P}_V(G)=\frac{\mathcal{P}(G\cap V)}{\mathcal{P}(V)}=\frac{\mathcal{P}(G)\cdot\mathcal{P}_G(V)}{\mathcal{P}(V)}=\frac{0{,}25\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{40}\times3=\frac{3}{40}$$

La bonne réponse est **b.**.

3. Voici un tableau représentant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x	0	1	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X})=0\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)+1\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)+10\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$$
$$=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{6}=0+\frac{1}{3}+\frac{10}{6}=\frac{12}{6}=2$$

La variance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ se calcule par :

$V(\mathcal{X})$

$$=(0-2)^2\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)+(1-2)^2\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)+(10-2)^2\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$$
$$=4\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+64\times\frac{1}{6}=2+\frac{1}{3}+\frac{32}{3}=\frac{6+1+32}{3}$$
$$=\frac{39}{3}=13$$

La bonne réponse est **b.**.

4. Cherchons la valeur de la probabilité :

$$\mathcal{P}_{(\mathcal{T}>2)}(\mathcal{T}<5)=1-\mathcal{P}_{(\mathcal{T}>2)}(\mathcal{T}\leqslant5)=1-\mathcal{P}_{(\mathcal{T}>2)}(\mathcal{T}\leqslant2+3)$$

D'après la propriété de durée de vie sans vieillessement :

$$=1-\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant3)=1-\int_0^3\frac{1}{6}\cdot e^{-\frac{1}{6}\cdot x}\,dx=1-\left[-e^{-\frac{1}{6}\cdot x}\right]_0^3$$
$$=1-\left[\left(-e^{-\frac{1}{6}\times3}\right)-\left(-e^{-\frac{1}{6}\times0}\right)\right]=1-\left(-e^{-\frac{1}{2}}+e^0\right)$$
$$=1+e^{-\frac{1}{2}}-1=e^{-\frac{1}{2}}\simeq0{,}6065$$

La bonne réponse est **d.**.

Exercice 5446

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe :

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

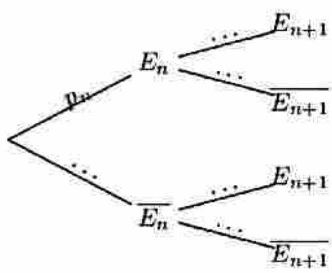
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement "*le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine*". On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi $p_1=0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0\leqslant p_n<1$

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $p_{n+1}=0{,}2\cdot p_n+0{,}04$.

   c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n=p_n-0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables : K et J sont des entiers naturels
P est un nombre réel.
Initialisation : P prend la valeur 0.
J prend la valeur 1.
Entrée : Saisir la valeur de K.
Traitement : Tant que $P<0{,}05-10^{-K}$
P prend la valeur $0{,}2\times P+0{,}04$
J prend la valeur $J+1$.
Fin tant que
Sortie : Afficher J.

A quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploi 220 salariés. Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p=0{,}05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite, c'est à dire de paramètres 0 et 1.

On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z<x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

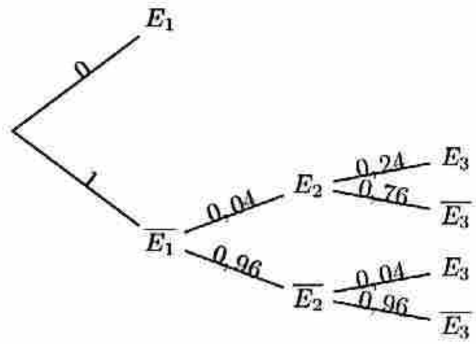
x	$-1{,}55$	$-1{,}24$	$-0{,}93$	$-0{,}62$	$-0{,}31$	$0{,}00$
$\mathcal{P}(\mathcal{Z}<x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500

x	$0{,}31$	$0{,}62$	$0{,}93$	$1{,}24$	$1{,}55$
$\mathcal{P}(\mathcal{Z}<x)$	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question **b.**, une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : "*le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15*".

Correction 5446

1. **a.** Voici l'arbre de probabilité représentant cette situation pour $n=3$:



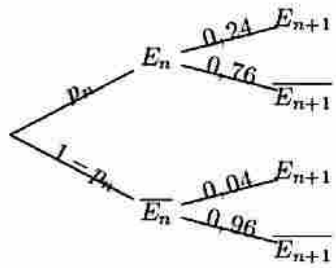
Il y a quatre évènements élémentaires qui vérifient l'évènement E_3. On en déduit :

$$\begin{aligned}p_3 = \mathcal{P}(E_3) &= \mathcal{P}(E_1\cap E_2\cap E_3)+\mathcal{P}(E_1\cap\overline{E_2}\cap E_3)\\ &\quad+\mathcal{P}(\overline{E_1}\cap E_2\cap E_3)+\mathcal{P}(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3)\\ &= 0\times0{,}24\times0{,}24+0\times0{,}76\times0{,}04\\ &\quad+1\times0{,}04\times0{,}24+1\times0{,}96\times0{,}04\\ &= 0+0+1\times0{,}04\times0{,}24+1\times0{,}96\times0{,}04\\ &= 0+0+0{,}0096+0{,}0384=0{,}048\end{aligned}$$

b. La probabilité demandée est :

$$\mathcal{P}_{E_3}(E_2)=\frac{\mathcal{P}(E_3\cap E_2)}{\mathcal{P}(E_3)}=\frac{0{,}04\times0{,}24}{0{,}048}=\frac{0{,}0096}{0{,}048}=0{,}2$$

2. **a.** Voici l'arbre représentant le passage de l'étape n à l'étape $n+1$:



b. Les évènements E_n et $\overline{E_n}$ forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales permet d'écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E_{n+1}) &= \mathcal{P}(E_n\cap E_{n+1})+\mathcal{P}(\overline{E_n}\cap E_{n+1})\\ &= p_n\times0{,}24+(1-p_n)\times0{,}04\\ &= 0{,}24\cdot p_n+0{,}04-0{,}04\cdot p_n=0{,}2\cdot p_n+0{,}04\end{aligned}$$

c. Par définition de la suite (u_n), le terme de rang $n+1$ admet pour expression :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= p_{n+1}-0{,}05=(0{,}2\cdot p_n+0{,}04)-0{,}05\\ &= 0{,}2\cdot p_n+0{,}04-0{,}05=0{,}2\cdot p_n-0{,}01\\ &= 0{,}2\cdot\Big(p_n-\frac{0{,}01}{0{,}2}\Big)=0{,}2\cdot(p_n-0{,}05)=0{,}2\cdot u_n\end{aligned}$$

La relation précédente montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme :
$u_1=p_1-0{,}05=0-0{,}05=-0{,}05$

On en déduit l'expression du terme de rang n de la suite (u_n) en fonction de n :
$u_n=-0{,}05\times0{,}2^{n-1}$

La définition de la suite (u_n) permet d'écrire la relation :

$u_n = p_n - 0{,}05$
$p_n = u_n + 0{,}05$
$p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$

d. De l'encadrement $0 \leqslant 0{,}2 < 1$, on en déduit la limite :
$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$
On en déduit la limite de la suite (p_n) :
$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$

e. L'affichage de J sera le rang par lequel la suite (p_n) arrive pour la première fois à une valeur proche de $0{,}05$ à 10^K près.
La suite (p_n) est converge vers $0{,}05$. Ainsi, il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait :
$|p_n - 0{,}05| < 10^K$
De plus, la suite (p_n) étant croissante, tous les termes de la suite sont inférieures à sa limite : à $0{,}05$. On a, pour tout entier supérieur à N :

$$|p_n - 0{,}05| < 10^K$$
$$-(p_n - 0{,}05) < 10^K$$
$$-pn + 0{,}05 < 10^K$$
$$-p_n < 10^K - 0{,}05$$
$$p_n > -10^K + 0{,}05$$
$$p_n > 0{,}05 - 10^K$$

Ainsi, on est sur qu'à partir d'un certain rang, la condition de la boucle "*Tant que*" ne sera plus vérifiée et l'algorithme sortira de cette boucle pour afficher J.

3. **a.** On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de ses collègues : ainsi, le fait de regarder si l'état de santé des 220 salariés s'apparent à un tirage avec remise.
Durant l'épidémie, la probabilité qu'un salarié soit malade est de $0{,}05$.
Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 220 et $0{,}05$:
$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(220\,;0{,}05)$
Voici les indicateurs des la variable aléatoire $\mathcal{X}$:
- $E(\mathcal{X}) = n\cdot p = 220 \times 0{,}05 = 11$
- $\mathcal{V}(\mathcal{X}) = n\cdot p\cdot(1-p) = 220 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = 10{,}45$
- $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{\mathcal{V}(\mathcal{X})} = \sqrt{10{,}45} \simeq 3{,}23$

b. La probabilité de l'évènement considéré se traduit par :
$\mathcal{P}(7 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 15) = \mathcal{P}(7-11 \leqslant \mathcal{X}-\mu \leqslant 15-11) = \mathcal{P}(-4 \leqslant \mathcal{X}-\mu \leqslant 4)$
$= \mathcal{P}\Big(-\dfrac{4}{3{,}23} \leqslant \dfrac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{4}{3{,}23}\Big)$
En acceptant que $\dfrac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale :
$= \mathcal{P}\Big(-\dfrac{4}{3{,}23} \leqslant \mathcal{Z} \leqslant \dfrac{4}{3{,}23}\Big) = \mathcal{P}\Big(\mathcal{Z} \leqslant \dfrac{4}{3{,}23}\Big) - \mathcal{P}\Big(\mathcal{Z} < -\dfrac{4}{3{,}23}\Big)$
$\simeq \mathcal{P}(\mathcal{Z} \leqslant 1{,}24) - \mathcal{P}(\mathcal{Z} < -1{,}24)$
D'après le tableau de valeurs :
$\simeq 0{,}892 - 0{,}108 = 0{,}784$

Exercice 3232

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à $0{,}02$.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle $\mathcal{X}$ le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie $\mathcal{T}_1$ *(en heures)* de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times10^{-4}$ et que la durée de vie $\mathcal{T}_2$ *(en heures)* de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ *(on pourra se reporter au formulaire ci-dessous)*

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
a. si ce composant est défectueux ;
b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} près.

2. Soit $\mathcal{T}$ la durée de vie *(en heures)* d'un composant acheté au hasard.
Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
$P(\mathcal{T} \geqslant t) = 0{,}02e^{-5\times10^{-4}t} + 0{,}98e^{-10^{-4}t}$
(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à $0{,}02$)

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire : Loi exponentielle *(ou de durée de vie sans vieillissement)* de paramètre λ sur $\big[0\,;+\infty\big[$:
- Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $\quad P([a\,;b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx$
- Pour $c \geqslant 0$, $\quad P([c\,;+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx$

Correction 3232

Partie A

1. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ compte le nombre de fois qu'un composant est défecteux dans 50 tirages indépendants entre eux et dont l'évèment comptabilisé a une probabilié de $0{,}02$.

On en déduit que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 50 et 0,02

On a la probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = \binom{50}{2}\cdot(0{,}02)^2\cdot(0{,}98)^{48} \simeq 0{,}19$$

2. On recherche la valeur de la probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)$$

$$= 1 - \binom{50}{0}\cdot 0{,}02^0\cdot 0{,}98^50 = 1 - 0{,}98^50 \simeq 0{,}64$$

3. La variable suivant une loi binomiale, son espérance est donnée par la formule :

$E(\mathcal{X}) = n\cdot p = 50\times 0{,}02 = 1.$

Ainsi, en moyenne, il y aura 1 composant défecteu.

Partie B

1. a. On a la probabilité suivante :

$\mathcal{P}(\mathcal{T}_1\geqslant 1000) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{T}_1<1000)$

La variable aléatoire $\mathcal{T}_1$ étant continue :

$$= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{T}_1\leqslant 1000)$$

$$= 1 - \int_0^{1000} 5\times 10^{-4}\cdot e^{-5\times 10^{-4}\cdot t}\,dt$$

$$= 1 - \left[-e^{-5\times 10^{-4}\cdot t}\right]_0^{1000}$$

$$= 1 - \left[-e^{-5\times 10^{-4}\cdot 1000} - \left(-e^{5\times 10^{-4}\times 0}\right)\right]$$

$$= 1 + e^{-0{,}5} - e^0 = e^{-0{,}5}$$

b. On a la probabilité suivante :

$\mathcal{P}(\mathcal{T}_2\geqslant 1000) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{T}_2<1000)$

La variable aléatoire $\mathcal{T}_2$ étant continue :

$$= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{T}_2\leqslant 1000)$$

$$= 1 - \int_0^{1000} 10^{-4}\cdot e^{-10^{-4}\cdot t}\,dt$$

$$= 1 - \left[-e^{-10^{-4}\cdot t}\right]_0^{1000}$$

$$= 1 - \left[-e^{-10^{-4}\cdot 1000} - \left(-e^{-10^{-4}\cdot 0}\right)\right]$$

$$= 1 + e^{-0{,}1} - 1 = e^{-0{,}1}$$

2. En notant D l'évènement "*le composant est défecteux*". Ainsi, les deux évènements complémentaires forment une partition de l'univers et d'après le théorème des probabilités totales, on a l'égalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant t) = \mathcal{P}\left[D\cap(\mathcal{T}\geqslant t)\right] + \mathcal{P}\left[\overline{D}\cap(\mathcal{T}\geqslant t)\right]$$

$$= \mathcal{P}(D)\cdot\mathcal{P}_D(\mathcal{T}\geqslant t) + \mathcal{P}(\overline{D})\cdot\mathcal{P}_{\overline{D}}(\mathcal{T}\geqslant t)$$

$$= \mathcal{P}(D)\cdot\mathcal{P}(\mathcal{T}_1\geqslant t) + \mathcal{P}(\overline{D})\cdot\mathcal{P}(\mathcal{T}_2\geqslant t)$$

$$= 0{,}02\cdot\mathcal{P}(\mathcal{T}_1\geqslant t) + 0{,}98\cdot\mathcal{P}(\mathcal{T}_2\geqslant t)$$

$$= 0{,}02\cdot\left[1-\mathcal{P}(\mathcal{T}_1<t)\right] + 0{,}98\cdot\left[1-\mathcal{P}(\mathcal{T}_2<t)\right]$$

Les variables $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont continues :

$$= 0{,}02\cdot\left[1-\mathcal{P}(\mathcal{T}_1\leqslant t)\right] + 0{,}98\cdot\left[1-\mathcal{P}(\mathcal{T}_2\leqslant t)\right]$$

$$= 0{,}02 - 0{,}02\cdot\mathcal{P}(\mathcal{T}_1\leqslant t) + 0{,}98 - 0{,}98\cdot\mathcal{P}(\mathcal{T}_2\leqslant t)$$

$$= 1 - 0{,}02\int_0^t 5\times 10^{-4}\cdot e^{-5\times 10^{-4}t}\,dt - 0{,}98\int_0^t 10^{-4}\cdot e^{-10^{-4}t}\,dt$$

$$= 1 - 0{,}02\left(1-e^{-5\times 10^{-4}t}\right) - 0{,}98\left(1-e^{-10^{-4}t}\right)$$

$$= 1 - 0{,}02 + 0{,}02\cdot e^{-5\times 10^{-4}t} - 0{,}98 + 0{,}98\cdot e^{-10^{-4}t}$$

$$= 0{,}02\cdot e^{-5\times 10^{-4}t} + 0{,}98\cdot e^{-10^{-4}t}$$

3. La probabilité recherchée se traduit par :

$$\mathcal{P}_{(\mathcal{T}\geqslant 1000)}(D) = \frac{\mathcal{P}\left[(\mathcal{T}\geqslant 1000)\cap D\right]}{\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant 1000)}$$

$$= \frac{\mathcal{P}(D)\times\mathcal{P}_D(\mathcal{T}\geqslant 1000)}{\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant 1000)} = \frac{\mathcal{P}(D)\times\mathcal{P}(\mathcal{T}_1\geqslant 1000)}{\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant 1000)}$$

$$= \frac{0{,}02\times e^{-5\times 10^4\times 1000}}{0{,}02\cdot e^{-5\times 10^{-4}\times 1000} + 0{,}98\cdot e^{-10^{-4}\times 1000}}$$

$$= \frac{0{,}02\times e^{-0{,}5}}{0{,}02\cdot e^{-0{,}5} + 0{,}98\cdot e^{-0{,}1}} \simeq 0{,}01$$

Exercice 4210

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu *B* aux premières et deuxième questions, *A* aux troisième et quatrième questions et *C* à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t-il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- *E* : "*le candidat a exactement une réponse exacte.*".
- *F* : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".
- *G* : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*". *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)*

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par $\mathcal{X}$ le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $n{=}28$ et $p{=}\dfrac{32}{243}$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Correction 4210

1. a. Le nombre de mots réponses possibles est de :

$3^5 = 243$

b. • Supposons que la première réponse soit à la première question. Le nombre de mot réalisant la première réponse est juste et les autres sont fausses est de :

$1\times2\times2\times2\times2 = 16$

La réponse exacte pouvant se reporter sur une des cinq questions, on en déduit qu'il y a 80 mots réalisant l'évènement E. Ainsi, on a la probabilité :

$\mathcal{P}(E) = \dfrac{80}{243}$

- Si le candidat n'a aucune bonne réponse, c'est qu'à chacune des questions, il a choisi une des deux réponses fausses.
  Ainsi, il y a deux possibilités par questions, ce qui représentent un nombre de :
  $2^5 = 32$ mots.
  La probabilité de l'évènement F est :
  $\mathcal{P}(F) = \dfrac{32}{243}$
- Pour créer un palindrome, il suffit de choisir les trois premiers lettres, les deux dernières se choisiront en fonction des premières. Il y a 3^3 façons de choisir ces trois premières lettres.
  On en déduit :
  $\mathcal{P}(G) = \dfrac{27}{243}$

2. a. La probabilité qu'un élève répondant au hasard a toutes ses réponses fausses est de $\dfrac{32}{243}$. Si chacun des élèves répondent au hasard, cela sera assimilé à une répétition d'une même expérience de manière indépendante.

La classe comportant 28 élèves, la variable $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 28 et $\dfrac{32}{243}$.

b. On cherche à déterminer la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$$
$$= \binom{28}{0}\cdot\Big(\frac{32}{243}\Big)^0\cdot\Big(\frac{211}{243}\Big)^{28} + \binom{28}{1}\cdot\Big(\frac{32}{243}\Big)^1\cdot\Big(\frac{211}{243}\Big)^{27}$$
$$= \Big(\frac{211}{243}\Big)^{28} + 28\cdot\frac{32}{243}\cdot\Big(\frac{211}{243}\Big)^{27} \simeq 0{,}10$$

Exercice 5524

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des comportes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "*compote allégée*".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est à dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %. On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

- E : "*Le petit pot provient de la chaîne F_2*" ;
- C : "*Le petit pot est conforme*".

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : "*le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1*".
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que $\mathcal{X}$ sui la loi normale d'espérance $m_1 = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

α	β	$\mathcal{P}(\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant\beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la prodution de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que $\mathcal{Y}$ suit une loi normale d'espérance $m_2=0{,}17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

   Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire définie par $Z=\dfrac{\mathcal{Y}-m_2}{\sigma_2}$.

   a. Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit-elle ?

   b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient $\mathcal{Z}$ lorsque $\mathcal{Y}$ appartient à l'intervalle $[0{,}16\,;0{,}18]$.

   c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

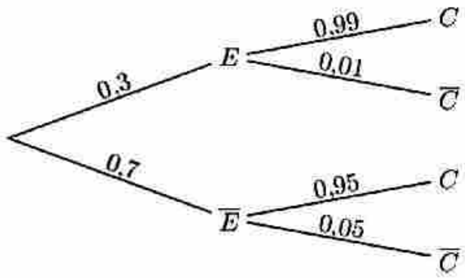
   On pourra utiliser la tableau ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$\mathcal{P}(-\beta\leqslant\mathcal{Z}\leqslant\beta)$
2,4324	0,985
2,4573	0,986
2,4838	0,987
2,5121	0,988
2,5427	0,989
2,5758	0,990
2,6121	0,991
2,6521	0,992
2,6968	0,993

Correction 5524

Partie A

1. Voici l'arbre pondéré associé à cette situation :



2. L'èènement considéré est $\overline{E}\cap C$.

On a la probabilité :
$$\mathcal{P}(\overline{E}\cap C)=\mathcal{P}(\overline{E})\times\mathcal{P}_{\overline{E}}(C)=0{,}7\times0{,}95=0{,}665$$

3. Les évènements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales :
$$\mathcal{P}(C)=\mathcal{P}(C\cap E)+\mathcal{P}(C\cap\overline{E})$$
$$=0{,}3\times0{,}99+0{,}7\times0{,}95=0{,}962$$

4. Par définition des probabilités conditionnelles :
$$\mathcal{P}_C(E)=\frac{\mathcal{P}(C\cap E)}{\mathcal{P}(C)}$$

D'après les questions **3.** :
$$=\frac{0{,}3\times0{,}99}{0{,}962}\simeq0{,}309$$

Partie B

1. L'énoncé précise que la proportion de sucre dans la compote doit être comprise entre 0,16 et 0,18. Ainsi, la probabilité qu'un pot de la chaine F_1 soit conforme est donnée par le calcul :
$$\mathcal{P}(0{,}16\leqslant\mathcal{X}\leqslant0{,}18)$$
D'après la 4ième ligne du tableau :
$$=0{,}9044$$

2. **a.** D'après la définition d'une loi normale de paramètre m_2 et σ_2, la variable aléatoire définie par $\dfrac{\mathcal{Y}-m_2}{\sigma_2}$ suit une loi normale centrée réduite :
$$\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0\,;1)$$

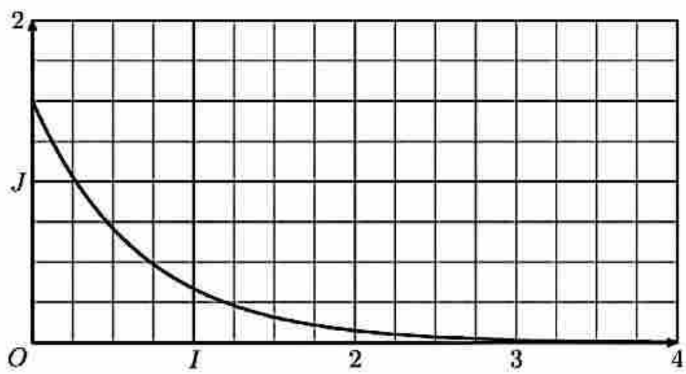
b. Considérons l'ensemble des évènements élémentaires ω vérifiant l'encadrement :
$$0{,}16\leqslant\mathcal{Y}(\omega)\leqslant0{,}18$$
$$0{,}16-0{,}17\leqslant\mathcal{Y}(\omega)-m_2\leqslant0{,}18-0{,}17$$
$$-0{,}01\leqslant\mathcal{Y}(\omega)-m_2\leqslant0{,}01$$
$$-\frac{0{,}01}{\sigma_2}\leqslant\frac{\mathcal{Y}(\omega)-m_2}{\sigma_2}\leqslant\frac{0{,}01}{\sigma_2}$$
D'après la question **a.** :
$$-\frac{0{,}01}{\sigma_2}\leqslant\mathcal{Z}(\omega)\leqslant\frac{0{,}01}{\sigma_2}$$
Ainsi, on a l'égalité suivante d'ensembles :
$$\{0{,}16\leqslant\mathcal{Y}\leqslant0{,}18\}=\Big\{-\frac{0{,}01}{\sigma_2}\leqslant\mathcal{Z}(\omega)\leqslant\frac{0{,}01}{\sigma_2}\Big\}$$

c. D'après l'énoncé, la probabilité de prélevé un pot au hasard dans la chaine F_2 est égale à 0,99 :
$$\mathcal{P}(0{,}16\leqslant\mathcal{Y}\leqslant0{,}18)=0{,}99$$
$$\mathcal{P}\Big(-\frac{0{,}01}{\sigma}\leqslant\mathcal{Z}\leqslant\frac{0{,}18}{\sigma}\Big)=0{,}99$$
D'après le tableau donné dans l'énoncé :
$$\frac{0{,}01}{\sigma}=2{,}5758$$
A l'aide du produit en croix :
$$0{,}01=2{,}5758\cdot\sigma$$
$$\sigma=\frac{0{,}01}{2{,}5758}$$
$$\sigma\equiv0{,}004$$

Exercice 3249

Partie A

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que :
$$P(\mathcal{X}\leqslant a)=\int_0^a\lambda\cdot e^{-\lambda t}dt$$
La courbe donnée en ci-dessous représente la fonction densité associée :



1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(\mathcal{X}\leqslant1)$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$.

1. Calculer $P(\mathcal{X} \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2. Calculer $P(\mathcal{X} \geqslant 2)$.

3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante :
$P(1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

4. Calculer l'intégrale $F(x) = \int_0^x 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-1{,}5t} dt$.
Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler un tirage à un tirage successif avec remise.

a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

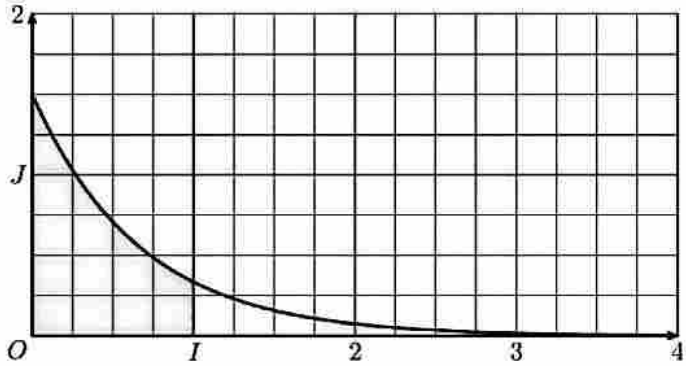
Correction 3249

Partie A

1. D'après le rappel, la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 1)$ s'obtient par le calcul intégral suivant :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 1) = \int_0^1 f(t)\, dt$$
où la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, ce calcul intégral s'interprète graphiquement par l'aire de la surface délimitée par :
- les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$;
- la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

Cette surface est représentée grisée dans la représentation ci-dessous :



2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$
où λ est le paramètre de la loi exponentielle.

L'image de 0 par la fonction f a pour valeur :
$f(0) = \lambda \cdot e^{-\lambda \times 0} = \lambda \cdot e^0 = \lambda$

Ainsi, on lit graphiquement le paramètre de la loi exponentielle suivie par la variable $\mathcal{X}$ en lisant l'image du nombre 0 par la fonction f.
Ainsi, dans cet exercice, on a :
$\lambda = f(0) = 1{,}5$

On en déduit que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{3}{2}$.

Partie B

1. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 1) = \int_0^1 1{,}5 \cdot e^{-1{,}5 \cdot t}\, dt = \left[-e^{-1{,}5 \cdot t}\right]_0^1$
$= -e^{-1{,}5 \times 1} - \left(-e^{-1{,}5 \times 0}\right) = -e^{-1{,}5} + e^0$
$= 1 - e^{-1{,}5} \simeq 0{,}777$

2. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant 2) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 2)$
La variable $\mathcal{X}$ suit une loi continue :
$= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 2) = 1 - \int_0^2 1{,}5 \cdot e^{-1{,}5 \cdot t}\, dt$
$= 1 - \left[-e^{-1{,}5 \cdot t}\right]_0^2 = 1 - \left[-e^{-1{,}5 \times 2} - \left(-e^{-1{,}5 \times 0}\right)\right]$
$= 1 - \left(-e^{-3} + e^0\right) = 1 + e^{-3} - 1 = e^{-3}$

3. On a la décomposition de l'univers :
$\Omega = \{\mathcal{X} \leqslant 1\} \cup \{1 < \mathcal{X} < 2\} \cup \{\mathcal{X} \geqslant 2\}$
où les évènements de la réunion sont disjoints entre eux.

On en déduit :
$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 1) + \mathcal{P}(1 < \mathcal{X} < 2) + \mathcal{P}(\mathcal{X} > 2)$$
La variable $\mathcal{X}$ suit une loi continue :
$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 1) + \mathcal{P}(1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2) + \mathcal{P}(\mathcal{X} > 2)$$
$$1 = \left(1 - e^{-1{,}5}\right) + \mathcal{P}(1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2) + e^{-3}$$
$\mathcal{P}(1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2) = 1 - \left(1 - e^{-1{,}5}\right) - e^{-3}$
$\mathcal{P}(1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2) = e^{-1{,}5} - e^{-3}$
$\mathcal{P}(1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2) \simeq 0{,}173$

4. L'espérance d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre λ a pour valeur $\dfrac{1}{\lambda}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = E(x) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$

Partie C

1. a. Considérons l'évènement A définit par "*le cylindre est* *accepté*".

Les évènements $\{\mathcal{X}<1\}$, $\{1\leqslant\mathcal{X}\leqslant2\}$ et $\{\mathcal{X}>2\}$ forment une partition de l'univers :

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A\cap\{\mathcal{X}<1\})+\mathcal{P}(A\cap\{1\leqslant\mathcal{X}\leqslant2\})+\mathcal{P}(A\cap\{\mathcal{X}>2\})$$

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{X}<1) + \mathcal{P}(1\leqslant\mathcal{X}\leqslant2)\cdot\mathcal{P}_{1\leqslant\mathcal{X}\leqslant2}(A) + 0$$

La variable $\mathcal{X}$ suit une loi continue :

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1) + \mathcal{P}(1\leqslant\mathcal{X}\leqslant2)\cdot0{,}8$$

D'après la partie **B** :

$$\mathcal{P}(A) = (1-e^{-1,5}) + (e^{-1,5}-e^{-3})\cdot0{,}8$$

$$\mathcal{P}(A) \simeq 0{,}915$$

b. Notons R l'évènement "*le cylindre a subi une rectification*". On recherche la valeur de la probabilité :

$$\mathcal{P}_A(R) = \frac{\mathcal{P}(A\cap R)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(R)\mathcal{P}_R(A)}{0{,}915}$$

$$= \frac{\mathcal{P}(1\leqslant\mathcal{X}\leqslant2)\times0{,}8}{0{,}915} = \frac{0{,}173\times0{,}8}{0{,}915} \simeq 0{,}151$$

2. **a.** Le choix des dix cylindres étant assimilé à un tirage successif avec remise, la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ comptant le nombre de cylindre acceptés suit une loi binomiale de paramètre 10 et 0,915 $(\mathcal{Y}\sim\mathcal{B}(10\,;\,0{,}915))$

On a la probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=10) = \binom{10}{10}\cdot0{,}915^{10}\cdot0{,}085^{0} = 1\times0{,}915^{10}\times1$$

$$= 0{,}915^{10} \simeq 0{,}411$$

b. Pour qu'au moins un cylindre soit refusé, il faut qu'au plus 9 cylindre soient acceptés :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant9) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}>9) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$$

$$= 1-0{,}411 = 0{,}589$$

Exercice 5552

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commerciable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale d'espérance $\mu=400$ et d'écart-type $\sigma=11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche

x	308	385	390	395	400	405	410	415	420
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $\mathcal{P}(390\leqslant\mathcal{X}\leqslant410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant-1{,}751) \simeq 0{,}040$$

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question **1.**, peut-on décider que l'objectif est atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite, on prendra $\lambda=0{,}003$

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Correction 5552

Partie A

1. Calcul cette probabilité :

$$\mathcal{P}(390\leqslant\mathcal{X}\leqslant410) = \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant410) - \mathcal{P}(\mathcal{X}<390)$$

La variable $\mathcal{X}$ étant continue :

$$= \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant410) - \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant390)$$

D'après le tableau de valeurs :

$$= 0{,}818 - 0{,}182 = 0{,}636$$

2. Pour qu'un pain soit commerciable, il faut que la masse du pain soit strictement supérieur ou égal à 385. Ainsi, la probabilité p qu'un pain soit commercialisable a pour valeur :

$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 385) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<385)$

La variable $\mathcal{X}$ étant continue :

$= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 385)$

D'après le tableau de valeurs :

$= 1 - 0{,}086 = 0{,}914$

3. Cherchons la valeur de l'écart-type σ vérifiant :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}'\geqslant 385) = 0{,}96$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}'-400\geqslant 385-400) = 0{,}96$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}'-400\geqslant -15) = 0{,}96$$
$$\mathcal{P}\Big(\frac{\mathcal{X}'-400}{\sigma'}\geqslant -\frac{15}{\sigma}\Big) = 0{,}96$$

D'après les propriétés des lois normales $\dfrac{\mathcal{X}'-\mu}{\sigma'}\sim\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{P}\Big(\mathcal{Z}\geqslant -\frac{15}{\sigma'}\Big) = 0{,}96$$
$$\mathcal{P}\Big(\mathcal{Z}< -\frac{15}{\sigma'}\Big) = 1 - 0{,}96$$
$$\mathcal{P}\Big(\mathcal{Z}< -\frac{15}{\sigma'}\Big) = 0{,}04$$

D'après la valeur rappelée dans l'énoncé :

$-\dfrac{15}{\sigma'} = -1{,}751$

D'après le produit en croix :

$15 = 1{,}751\cdot\sigma'$

$\sigma' = \dfrac{15}{1{,}751}$

$\sigma' = 8{,}6$

Partie B

1. Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de pain commercialisable sur chaque lot de 300 pains.
La variable $\mathcal{X}$ suit une loi aléatoire binomiale de paramètre 300 et 0,96. C'est à dire :

$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(300\,;0{,}96)$

On peut appliquer le théorème de Moivre-Laplace car :

$n=300\geqslant 30\quad;\quad n\cdot p=288>5\quad;\quad n\cdot(1-p)=12>5$

Ainsi, en notant $\mathcal{F}=\dfrac{\mathcal{X}}{n}$, on obtient l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des pains commercialisables :

$$\Big[0{,}96 - 1{,}96\cdot\frac{\sqrt{0{,}96\times 0{,}04}}{\sqrt{300}}\,;\,0{,}96 + 1{,}96\cdot\frac{\sqrt{0{,}96\times 0{,}04}}{\sqrt{300}}\Big]$$
$$= [0{,}96-0{,}02\,;\,0{,}96+0{,}02] = [0{,}94\,;\,0{,}98]$$

2. Si l'échantillon compte 283 pains commercialisables sur 300, la proportion des pains commercialisables est de :

$\dfrac{283}{300}\simeq 0{,}943$

L'échantillon est représentatif de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Partie C

1. D'après l'énoncé, le temps de fonctionnement sans dérèglement défini une variable aléatoire $\mathcal{T}$ suivant une loi exponentielle.

Si une balance ne sait pas dérégler en 30 jours, cela signifie que son temps sans dérèglement est supérieur ou égal à 30 jours.

Les données de l'énoncé permettent d'écrire l'égalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant 30) = 0{,}913$$
$$1-\mathcal{P}(\mathcal{T}<30) = 1 - 0{,}913$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{T}<30) = 0{,}087$$

La variable aléatoire $\mathcal{T}$ étant continue :

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant 30) = 0{,}087$$

La variable aléatoire $\mathcal{T}$ suit une loi exponentielle :

$$\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{T}\leqslant 30) = 0{,}087$$
$$\int_0^{30}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}\,\mathrm{d}t = 0{,}087$$
$$\big[-e^{-\lambda\cdot t}\big]_0^{30} = 0{,}087$$
$$-e^{-30\lambda} - \big(-e^{-0\times t}\big) = 0{,}087$$
$$-e^{-30\lambda}+1 = 0{,}087$$
$$-e^{-30\lambda} = -0{,}913$$
$$e^{-30\lambda} = 0{,}913$$
$$\ln\big(e^{-30\lambda}\big) = \ln 0{,}913$$
$$-30\lambda = \ln 0{,}913$$
$$\lambda = \frac{\ln 0{,}913}{30}\simeq 0{,}003$$

2. La probabilité demandée est :

$\mathcal{P}_{(\mathcal{T}\geqslant 60)}(\mathcal{T}\geqslant 90)\mathcal{P}_{(\mathcal{T}\geqslant 60)}(\mathcal{T}\geqslant 60+30)$

Une variable suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$= \mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant 30) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{T}<30)$

La variable aléatoire suit une loi exponentielle :

$$= 1-\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{T}\leqslant 30) = 1 - \int_0^{30} 0{,}003\cdot e^{-0{,}003\cdot t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 1 - \big[-e^{-0{,}003t}\big]_0^{30}$$
$$= 1 - \big[-e^{-0{,}003\times 30} - \big(-e^{-0{,}003\times 0}\big)\big]$$
$$= 1 + e^{-0{,}09} - 1 = e^{-0{,}09}\simeq 0{,}914$$

3. Déterminons pour combien de jours, une balance a une chance sur deux de ne pas encore connaître de dérèglement :

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant x) = \frac{1}{2}$$

$$1-\mathcal{P}(\mathcal{T}<x) = \frac{1}{2}$$

La variable $\mathcal{T}$ suit une loi continue :

$$1-\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant x) = \frac{1}{2}$$

La variable $\mathcal{T}$ suit une loi exponentielle :

$$1-\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{T}\leqslant x) = \frac{1}{2}$$

$$-\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{T}\leqslant x) = \frac{1}{2}-1$$

$$\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{T}\leqslant x) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^x 0{,}003\cdot e^{-0{,}003\cdot t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\left[-e^{-0{,}003t}\right]_0^x = \frac{1}{2}$$

$$-e^{-0{,}003x}-\left(-e^{-0{,}003\times 0}\right) = \frac{1}{2}$$

$$-e^{-0{,}003x}+1 = \frac{1}{2}$$

$$-e^{-0{,}003x} = -\frac{1}{2}$$

$$e^{-0{,}003x} = \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(e^{-0{,}003x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-0{,}003x = -\ln 2$$

$$x = \frac{-\ln 2}{-0{,}003}$$

$$x \simeq 231{,}0$$

Il faut attendre 231 jours pour qu'une balance est une chance sur deux d'être déréglé : le vendeur a tort.

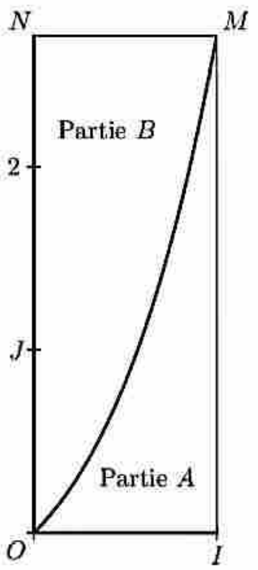
Exercice 3269

Première partie

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orhonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cdot e^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontière de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\dfrac{1}{2e}$.
Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes :

   a. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de $\mathcal{X}$. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

   b. Soit E l'évènement : "*Exactement deux fléchettes atteignent la partie A*".
   Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

   c. Soit F l'évènement : "*les trois fléchettes atteignent la partie B*". Calculer la probabilité de F *(on donnera la valeur exacte)*.
   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans partie B ?

3. On lance cette fois de manières indépendante n fléchettes.

   a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

   b. Déterminer le plus petit entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $p_n\geqslant 0{,}99$.

Correction 3269

Première partie :

Considérons les deux fonctions u et v définies par :
$u(x)=x \quad ; \quad v(x)=e^x$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=e^x$

On remarque l'égalité :
$$\int_0^1 x{\cdot}e^x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 u(x){\cdot}v'(x)\,\mathrm{d}x$$
D'après la formule d'intégration par parties :
$$=\big[u(x){\cdot}v(x)\big]_0^1-\int_0^1 u'(x){\cdot}v(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\big[x{\cdot}e^x\big]_0^1-\int_0^1 1{\cdot}e^x\,\mathrm{d}x=\big(1{\cdot}e^1-0{\cdot}e^0\big)-\big[e^x\big]_0^1$$
$$=e^1-\big(e^1-e^0\big)=1$$

Deuxième partie :

1. Le rectangle $OIMN$ a pour dimension :
$OI=1 \quad ; \quad ON=e^1$
Ainsi, ce retangle a pour aire : $\mathcal{A}_{OIMN}=e$

Les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leur aire et la somme de leurs probabilités vaut $\dfrac{1}{2}$.

Voici un tableau de proportionnalitée associé à cette situation :

Partie	A	B	$OIMN$
Surface	1	$e-1$	e
Probabilité	a	b	$\dfrac{1}{2}$

On en déduit les deux probabilités :
$a=\dfrac{1}{2{\cdot}e} \quad ; \quad b=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2{\cdot}e}$

2. a. Les lancers de fléchettes étant tirer de manière indépendante, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de fléchettes atteignant la partie A suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\dfrac{1}{2e}$.
L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par la formule :
$$E(\mathcal{X})=n{\cdot}p=3\times\frac{1}{2e}=\frac{3}{2{\cdot}e}$$

b. $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)=\dbinom{3}{2}{\cdot}\Big(\dfrac{1}{2{\cdot}e}\Big)^2{\cdot}\Big(1-\dfrac{1}{2{\cdot}e}\Big)\simeq 0{,}083$

c. On peut considérer une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ comptant le nombre de fléchettes atteignent la partie B. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2{\cdot}e}$

Ainsi, on a :
$$\mathcal{P}(F)=\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}3)=\binom{3}{3}{\cdot}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^3{\cdot}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^0$$
$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^3$$
Notons G l'évènement "*aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible*".
Déterminons la probabilité suivante :
$$\mathcal{P}_G(F)=\frac{\mathcal{P}(\mathcal{G}\cap\mathcal{F})}{\mathcal{P}(G)}=\frac{\mathcal{P}(\mathcal{F})}{\mathcal{P}(G)}=\frac{\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^3}{\frac{1}{2}}$$
$$=2{\cdot}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^3$$

3. a. Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de fléchette atteignant la partie A lorsqu'on lance n fléchettes. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètre n et $\dfrac{1}{2{\cdot}e}$.
Déterminons l'expression en fonction de n de la probabilité :
$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}{\geqslant}1)=1-\mathcal{P}(\mathcal{Z}{<}1)=1-\mathcal{P}(\mathcal{Z}{=}0)$$
$$=1-\binom{n}{0}{\cdot}\Big(\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^0{\cdot}\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n=1-\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n$$

b. Déterminons le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité suivante :
$$p_n\geqslant 0{,}99$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}{\geqslant}1)\geqslant 0{,}99$$
$$1-\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n\geqslant 0{,}99$$
$$-\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n\geqslant 0{,}99-1$$
$$-\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n\geqslant -0{,}01$$
$$\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n\leqslant 0{,}01$$
La fonction logarithme est croissante :
$$\ln\Big[\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)^n\Big]\leqslant\ln(0{,}01)$$
$$n{\cdot}\ln\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)\leqslant\ln(0{,}01)$$
Le nombre $\ln\big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\big)$ est négatif :
$$n\geqslant\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)}$$
On a la valeur approchée : $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\Big(1-\frac{1}{2{\cdot}e}\Big)}\simeq 22{,}7$
$$n\geqslant 23$$
Il faut donc au minimum 23 lancers pour que la probabilité d'atteindre la partie A soit supérieur à 99 %.

Exercice 3274

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda>0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en passe avant l'instant t est égale à :
$$P(\mathcal{X}{\leqslant}t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(\mathcal{X}{>}6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0{,}2$

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un

robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5. On considère un lot de 10 robots fonctinonant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Correction 3274

1. Déterminons la valeur du paramètre λ afin que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{X}>6) &= 0{,}3\\
1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 6) &= 0{,}3\\
-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 6) &= 0{,}3-1\\
-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 6) &= -0{,}7\\
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 6) &= 0{,}7\\
\int_0^6 \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x &= 0{,}7\\
\big[-e^{-\lambda\cdot x}\big]_0^6 &= 0{,}7\\
-e^{-6\cdot\lambda}-\big(-e^{-0\cdot\lambda}\big) &= 0{,}7\\
-e^{-6\cdot\lambda}+1 &= 0{,}7\\
-e^{-6\cdot\lambda} &= 0{,}7-1\\
e^{-6\cdot\lambda} &= 0{,}3\\
-6\cdot\lambda &= \ln(0{,}3)\\
\lambda &= \frac{\ln(0{,}3)}{-6}\\
\lambda &\simeq 0{,}2
\end{aligned}$$

2. Déterminons la valeur de t afin de réaliser l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t) &= 0{,}5\\
\int_0^t 0{,}2\cdot e^{-0{,}2\cdot t}\,\mathrm{d}t &= 0{,}5\\
\big[-e^{-0{,}2\cdot t}\big]_0^t &= 0{,}5\\
-e^{-0{,}2\cdot t}-\big(-e^{-0{,}2\times 0}\big) &= 0{,}5\\
-e^{-0{,}2\cdot t}+e^0 &= 0{,}5\\
-e^{-0{,}2\cdot t} &= 0{,}5-1\\
\ln\big[e^{-0{,}2\cdot t}\big] &= 0{,}5\\
-0{,}2\cdot t &= \ln(0{,}5)\\
t &= \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}2}\\
t &\simeq \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}2}\\
t &\simeq 3{,}47
\end{aligned}$$

Pour connaître le nombre de mois associé, il faut multiplier par 12 le nombre d'années. Ainsi, que la probabilité soit de 0,5, il faut attendre :
$3{,}47\times 12 \simeq 42$ mois.

3. Pour que le robot ne connaisse pas de panne ses deux premières années, cela signifie qu'il connaitra sa première panne après ces deux premières années.

Ainsi, déterminons la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)$

La variable $\mathcal{X}$ suivant une loi continue :

$$\begin{aligned}
&= 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = 1-\int_0^2 \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x\\
&= 1-\big[-e^{-\lambda\cdot x}\big]_0^2 = 1-\big[-e^{-0{,}2\times 2}-\big(-e^{-0{,}2\times 0}\big)\big]\\
&= 1+e^{-0{,}4}-e0 = e^{-0{,}4}
\end{aligned}$$

4. La probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans sachant qu'il n'a pas eu de panne ses deux premières années s'exprime par :
$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}\geqslant 2)}(\mathcal{X}\geqslant 6) = \mathcal{P}_{(\mathcal{X}\geqslant 2)}(\mathcal{X}\geqslant 2+4)$

D'après la propriété de durée de vie sans vieillessement :
$= \mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 4) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<4)$

La variable $\mathcal{X}$ suivant une loi continue :

$$\begin{aligned}
&= 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 4) = 1-\int_0^4 0{,}2\cdot e^{-0{,}2\cdot t}\,\mathrm{d}t\\
&= 1-\big[-e^{-0{,}2\cdot t}\big]_0^4 = 1-\big[-e^{-0{,}2\times 4}-\big(-e^{-0{,}2\times 0}\big)\big]_0^4\\
&= 1-\big(-e^{-0{,}8}+e^0\big) = 1+e^{-0{,}8}-1 = e^{-0{,}8}
\end{aligned}$$

5. Soit $\mathcal{Y}$ la variable aléatoir comptant le nombre de robot ayant eu une panne au cours des deux premières années.

- Les robots fonctionnant de manières indépendantes, on peut supposer leur première panne indépendante ;
- La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est, d'après la question **3.**, de $e^{-0{,}4}$.

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suit une loi binomiale de paramètre 10 et $e^{-0{,}4}$ $(\mathcal{Y}\sim\mathcal{B}(10,;e^{-0{,}4})$

La probabilité recherchée s'exprime par :
$\mathcal{P}(\mathcal{Y}\geqslant 1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{Y}<1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0)$

$$\begin{aligned}
&= 1-\binom{10}{0}\cdot\big(e^{-0{,}4}\big)^0\cdot\big(1-e^{-0{,}4}\big)^{10}\\
&= 1-\big(1-e^{-0{,}4}\big)^{10} \simeq 0{,}999\,8
\end{aligned}$$

Exercice 4252

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \cdots + \mathcal{X}_{40}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

2. Dans cette partie, on suppose que $p=\dfrac{1}{20}$.

a. Calculer l'espérance mathématiques de $\mathcal{X}$.

b. Calculer les probabilités :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$$

c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité :

$$\mathcal{Z} = 400 - 100{\cdot}\mathcal{X},$$

puis calculer l'éspérance de $\mathcal{Z}$ pour $p=\dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

a. Démontrer que :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = (1-p)^{38}{\cdot}(741{\cdot}p^2 + 38{\cdot}p + 1)$$

b. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = (1-x)^{38}{\cdot}(741{\cdot}x^2 + 38{\cdot}x + 1)$$

Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0;1]$ tel que :

$$f(x_0) = 0{,}01$$

Déterminer l'entier naturel n tel que :

$$\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$$

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %. *(On exprimera p en fonction de x_0)*

Correction 4252

1. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ est la somme des variables aléatoires $\mathcal{X}_i$: elle compte donc le nombre de fois où Claude est contrôlé.

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 40 et p.

2. **a.** La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale, l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ vaut :

$$E(\mathcal{X}) = n\cdot p = 40\times\frac{1}{20} = 2$$

b. On a les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \dbinom{40}{0}{\cdot}\Big(\dfrac{1}{20}\Big)^0{\cdot}\Big(\dfrac{19}{20}\Big)^{40} \simeq 0{,}1285$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \dbinom{40}{1}{\cdot}\Big(\dfrac{1}{20}\Big)^1{\cdot}\Big(\dfrac{19}{20}\Big)^{39} \simeq 0{,}2706$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \dbinom{40}{2}{\cdot}\Big(\dfrac{1}{20}\Big)^2{\cdot}\Big(\dfrac{19}{20}\Big)^{38} \simeq 0{,}2777$

c. La probabilité pour que Claude soit contrôl'e au plus deux fois se traduit par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = 0{,}1285 +$$

3. Déterminons l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$:

$$E(\mathcal{Z}) = E(400 - 100{\cdot}\mathcal{X})$$

D'après les propriétés de l'espérance :

$$= 400 - 100{\cdot}E(\mathcal{X})$$

D'après les propriétés de l'espérance :

$$= 400 - 100{\cdot}\Big(40\times\frac{1}{5}\Big)$$
$$= 400 - 800$$
$$= -400$$

4. **a.** En reprenant la question précédente :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$$
$$= \binom{40}{0}{\cdot}p^0{\cdot}(1-p)^{40} + \binom{40}{1}{\cdot}p^1{\cdot}(1-p)^{39} + \binom{40}{2}{\cdot}p^2{\cdot}(1-p)^{38}$$
$$= 1\times1{\cdot}(1-p)^{40} + 40{\cdot}p^1{\cdot}(1-p)^{39} + 780{\cdot}p^2{\cdot}(1-p)^{38}$$
$$= (1-p)^{38}{\cdot}\big[(1-p)^2 + 40{\cdot}p{\cdot}(1-p) + 780{\cdot}p^2\big]$$
$$= (1-p)^{38}{\cdot}(1 - 2p + p^2 + 40{\cdot}p - 40{\cdot}p^2 + 780{\cdot}p^2)$$
$$= (1-p)^{38}{\cdot}(741{\cdot}p^2 - 38{\cdot}p + 1)$$

b. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = (1-x)^{38} \quad ; \quad v(x) = 741{\cdot}x^2 + 38{\cdot}x + 1$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = -38(1-x)^{37} \quad ; \quad v'(x) = 1482{\cdot}x + 38$$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$$
$$= -38{\cdot}(1-x)^{37}{\cdot}(741{\cdot}x^2+38{\cdot}x+1) + (1-x)^{38}{\cdot}(1482{\cdot}x+38)$$
$$= (1-x)^{37}\big[-38{\cdot}(741{\cdot}x^2+38{\cdot}x+1) + (1-x){\cdot}(1482{\cdot}x+38)\big]$$
$$= (1\text{-}x)^{37}(\text{-}28158{\cdot}x^2\text{-}1444{\cdot}x\text{-}38+1482{\cdot}x+38\text{-}1482{\cdot}x^2\text{-}38{\cdot}x)$$
$$= -29640{\cdot}(1-x)^{37}{\cdot}x^2$$

Sur l'intervalle $[0;1]$, la fonction f' est négative, on en déduit que la fonction f est décroissante.

On a les deux valeurs :

- $f(0) = (1-0)^{38}{\cdot}(741\times0^2 + 38\times0 + 1) = 1^{38}\times1 = 1$
- $f(1) = (1-1)^{38}{\cdot}(741\times1^2 + 38\times1 + 1)$
  $= 0^{38}{\cdot}(741\times1^2 + 38\times1 + 1) = 0$

On obtient le tableau de variations :

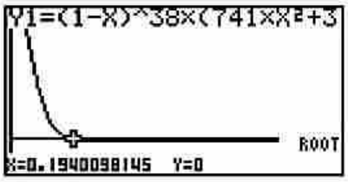
x	0	1
Variation de f	1	0

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.

De plus, le nombre 0,01 est compris entre les images aux bornes de l'intervalle $[0;1]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un seul nombre réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ tel que :
$f(x_0)=0{,}01$

D'après la calculatrice, on a : $x_0 \simeq 0{,}194$



On en déduit l'encadrement : $\dfrac{19}{100} < x_0 < \dfrac{20}{100}$

c. Le fait que Claude ait une probabilité supérieure ou égale à 99 % de subir au moins trois contrôles s'exprime par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 3) \geqslant 0{,}99$$
$$1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<3) \geqslant 0{,}99$$
$$1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) \geqslant 0{,}99$$
$$-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) \geqslant 0{,}99-1$$
$$-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) \geqslant -0{,}01$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) \leqslant 0{,}01$$

D'après la question a. :
$$f(p) \leqslant 0{,}01$$

D'après la question b. :
$$f(p) \leqslant f(x_0)$$

La fonction f étant décroissante :
$$p \geqslant x_0$$

Ainsi, il faut que p soit supérieure ou égale à x_0 pour Claude ait 99 % de subir au moins trois contrôles.

Exercice 3291

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;4)$ admettent un barycentre. On le note G.

2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E_1 : "*G appartient à la droite (BC)*" ;
   - E_2 : "*G appartient au segment $[BC]$*".

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : "*G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés*" est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1.

   On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.

Correction 3291

1. Le système pondéré $\big\{ (A\,;a)\ ;\ (B\,;b)\ ;\ (C\,;4) \big\}$ n'admet pas de barycentre si :
$a+b+4=0$

Or, on a les minorations : $a\geqslant -2$; $b\geqslant -1$

On en déduit la comparaison :
$$a+b \geqslant -2+(-1)$$
$$a+b+4 \geqslant -3+4$$
$$a+b+4 \geqslant 1$$
$$a+b+4 > 0$$

Ainsi, ce système admet toujours un barycentre.

2. a. • D'après la définition du barycentre, on a :
$$a\cdot\overrightarrow{AG}+b\cdot\overrightarrow{BG}+c\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0}$$

Le point G appartenant à la droite (BC), les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires. On a l'existence de α et β, deux nombres réels, tels que :
$$\overrightarrow{BG}=\alpha\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CG}=\beta\cdot\overrightarrow{BC}$$

Ainsi, on a l'égalité :
$$a\cdot\overrightarrow{AG}+b\cdot\overrightarrow{BG}+c\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0}$$
$$a\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})+b\cdot\alpha\cdot\overrightarrow{BC}+c\cdot\beta\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$$
$$a\cdot\overrightarrow{AB}+a\cdot\overrightarrow{BC}+(b\cdot\alpha+c\cdot\beta)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$$
$$a\cdot\overrightarrow{AB}+(a+b\cdot\alpha+c\cdot\beta)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$$
$$a\cdot\overrightarrow{AB}=-(a+b\cdot\alpha+c\cdot\beta)\cdot\overrightarrow{BC}$$

Or, les points A, B et C étant non-alignés, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non-colinéaires.

On en déduit :
$a=0$; $a+b\cdot\alpha+c\cdot\beta=0$

Ainsi, le point G appartiendra à la droite (BC) si le coefficient a vaut 0.

Ainsi, on a : $\mathcal{P}(E_1)=\dfrac{1}{5}$

• Pour le point appartient au segment $[BC]$, il faut que le coefficient a soit nul *(voir le point précédent)* et pour qu'il appartienne au segment $[BC]$, il faut que les coefficients du système $\big\{ (B\,;b)\ ;\ (C\,;4) \big\}$ soient de même signe.

On en déduit que les coefficients a et b ne peuvent prendre que deux valeurs :
$a=0$; $b=1$

On en déduit la probabilité :
$$\mathcal{P}(E_2)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

b. Pour que le barycentre G soit situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartienne à aucun de ses côtés, il faut que tous les coefficients du système soient non-nul et de même signe.

Ainsi, il y a 12 combinaisons possibles sur 30 :

$$\mathcal{P}(E_3) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

3. a. La variable $\mathcal{X}$ compte le nombre de fois que l'évènement E_3 est réalisé dans une répétition n fois de tirages indépendants. D'après la question **2.** b. , on a la probabilité $\mathcal{P}(E_3)=\frac{2}{5}$.

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{5}$: $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(n\,;\frac{2}{5}\right)$

Or, l'espérance d'une loi binomiale est donnée par la formule :

$$E(\mathcal{X}) = 4$$
$$n \cdot p = 4$$
$$n \cdot \frac{2}{5} = 4$$
$$n = 4 \times \frac{5}{2}$$
$$n = 10$$

b. Considérons l'inéquation :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant 1) \geqslant 0{,}999$$
$$1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 1) \geqslant 0{,}999$$
$$1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0) \geqslant 0{,}999$$
$$1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \geqslant 0{,}999$$
$$1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geqslant 0{,}999$$
$$-\left(\frac{3}{5}\right)^n \geqslant 0{,}999 - 1$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \leqslant 0{,}001$$

La fonction logarithme est strictement croissante :

$$\ln\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n\right] \leqslant \ln(0{,}001)$$
$$n \cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leqslant \ln(0{,}001)$$

Le nombre $\ln\left(\frac{3}{5}\right)$ est négatif :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$$

On a la valeur approchée $\frac{\ln(0{,}001)}{\ln\frac{3}{5}} \simeq 13{,}52$:

$$n \geqslant 14$$