CS'' LKN SERVICES''	DEVOIR SURVEILLEE du $2^{ème}$ Semestre	Classe : Tle D *Durée : 4h*
A/S : 2025-2026	Epreuve : MATHEMATIQUES	Prof : Mr BITHO

EXERCICE1: Situation problème

Mr Barigue est un agronome réputé pour la réussite de ses cultures de manioc.
Cette année, il a cultivé essentiellement **deux variétés de manioc : le manioc à teint rouge et le manioc à teint blanc**, qui sont **indiscernables au niveau du feuillage**.

Sur une portion de son domaine agricole, muni d'un **repère orthonormé** $(O; I; J)$ d'unité graphique **1 hectomètre (1 hm)**, un ingénieur topographe a modélisé la surface cultivée comme étant le **domaine délimité par** : l'axe (OJ), la droite (D) d'équation $x = 3$, l'axe (OI), et la courbe C_f, représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$ dans le repère $(O; I; J)$.

Par ailleurs, on estime que **les deux tiers de la surface cultivée sont occupés par les maniocs à teint blanc.**

Une maladie envahit malheureusement la plantation.

On estime que :

- **2 plants sur 3** de la population des maniocs rouges **résistent** aux attaques de la maladie ;
- **3 plants sur 4** de la population des maniocs blancs **résistent également** à cette maladie.

Mr Barigue prélève **au hasard un échantillon de quatre plants** dans sa gigantesque plantation. Ce choix peut être **assimilé à une répétition de prélèvements indépendants**, et il teste l'état sanitaire de ces plants.

Consigne 1: Par une démarche claire et justifiée, **calculez la surface du champ cultivé par Mr Barigue**.

★ **Etude de signe et *Double intégration par parties***

Consigne 2: Déterminez **la probabilité d'obtenir au plus un plant malade dans l'échantillon**

★ **Probabilité totale et loi binomiale**

Grille de correction

Consigne	pertinence	Cohérence	Calculs	Perfectionnement
1	$1.25pts$	$1.25pts$	$1pts$	$0.5pts$
2	$1.25pts$	$1.25pts$	$1pts$	$0.5pts$

NB : les Etoiles vous guides par rapport aux outils exploite dans chaque consigne

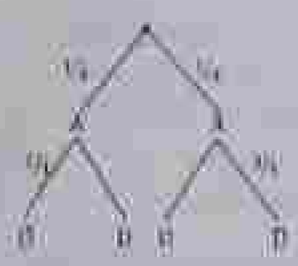
EXERCICE2

I- Choisir la bonne réponse

1) On désigne par f une conction dérivable sur $[0; +\infty[$ tels que $\int_1^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = 2\sqrt{6}$ alors $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx =$

$a)$ $\frac{\sqrt{3}(4\sqrt{2}-1)}{2}$; $b)$ $\frac{\sqrt{3}(4\sqrt{2}+1)}{2}$; $c)$ $\frac{-\sqrt{3}(4\sqrt{2}-1)}{2}$; $d)$ $\frac{-\sqrt{3}(1+4\sqrt{2})}{2}$ $(0.5pts)$

2) Soit l'arbre celle de probabilité ci contre est d'une expérience aléatoire . alors $P_D(A) =$



a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4}$;

c) $\frac{1}{16}$; d) $\frac{3}{16}$

$(0.75pts)$

e) *aucune bonne réponse*

II- Completez par les expressions manquantes

3) La solution de l'equation differentielle ordinaire $\frac{1}{2}y'' + y' + y = 0$ est : ....$(0.75pts)$

4) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $(5; \frac{1}{4})$ alors $P(X = 2) =$ $\cdots$....; $V(X) = \cdots$........ $et\ E(X) = \cdots$.....$(0.5 + 0.25 \times 2)pts$

III- Répondre par Vrai ou Faux $(0.75pts) \times 4$

5) $\int_1^e x ln^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(e-1)$

6) la primitive de la fonction f defini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ qui prend la valeur $1 - \ln(2)$ en 0 est $f(x) = x - \ln(e^x + 1) - 1$ $(0.5pts)$

7) r est la rotation de coentre $O(0;0)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ transforme le point $A(1; -\sqrt{3})$ en $A'(\sqrt{3}; -1)$

8) la fonction f defini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{\ln(2x)-1}$ a pour domaine de définition $D_f = [0; \frac{e}{2}[\cup]\frac{e}{2}; +\infty[$

EXERCICE3

I- soit les équation différentielles $(E): y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ et $(E_H): y'' + 2y' + y = 0$.
Et par $h(x) = x^2e^{-x}$ avec et on désigne par f une fonction.

1) Justifiez que h est une solution particulière de (E). $(0.25pts)$
2) Résoudre (E_H). $(0.5pts)$
3) a) justifiez que si f solution de (E) alors $f - h$ est solution de (E_H) $(0.25pts)$
   b) déduire la solution générale de (E). $(0.5pts)$
4) Donnez la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 4$ et $g'(0) = 0 (0.5pts)$

II- soit s la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$ du plan complexe associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ du plan complexe tel que

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Déterminer l'expression de z' en fonction de z. $(0.75pts)$
2) Donner les éléments caractéristiques de s. $(0.75pts)$

III- Soit f la fonction défini sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 1 + (1-x)e^x$

1) Etudiez les limites de f aux bornes de sont ensemble de définition. $(0.5pts)$
2) Calculez $f'(x)$ puis dressez sont tableau de variation$(1.0\ pts)$.
3) Justifiez que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; \frac{3}{2}]$ puis justifiez que $\alpha = \frac{1}{\ln(1-\alpha)}$. $(0.25pts)$
4) Représentez C_f dans un $R.O.N$ d'unité $1cm$ $(0.75pts)$

DRE-GRAND LOME	DEVOIR SURVEILLE DU 1ER SEMESTRE	ANNEE SCOLAIRE :2024-2025	
LYCEE DE TOKOIN2	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	CLASSE TLE D	Coef : 3 Durée :3H00

EXERCICE 1 (08pts)

Lors d'une exposition du club « scientifique », un groupe d'élèves de la classe de Terminale D ont été émerveillés par deux machines conçues par les élèves du club.

La première machine réalise sur des tissus une très jolie broderie à partir d'une portion de la courbe représentative d'une fonction saisie sur un cadran. Komi, l'un d'eux, élève très curieux saisit la fonction f suivante : $f(x) = 2\cos(x) + \cos(2x)$. Quelques instants après tous les élèves ont été très attentifs au motif de la broderie réalisée par la machine.

La deuxième machine permet de doser le taux d'alcool dans le sang et surtout de déterminer la durée en heure qu'il faut pour être totalement lucide lorsque la dose d'alcool tend à s'annihiler dans le sang, à travers l'air buccal expiré par le concerné. M. Yao, l'un des exposants leur explique que c'est la fonction D qui définisse la durée de lucidité en fonction de la dose x consommée est modélisée par : $D(x) = \frac{1-\cos(nx)}{x^2}$, avec une consommation en moyenne de n litres de bière. Il affirme qu'il faut au moins 4 heures et 30 minutes à un adolescent ayant consommé trois (3) litres de bière pour que la dose d'alcool tende à s'annihiler dans son sang.

Ensemble ils décident d'étudier et de construire la courbe (Cf) et de vérifier l'affirmation de l'exposant. Ils viennent solliciter ton aide. A partir de tes connaissances en mathématiques réponds à la préoccupation de tes camarades de classe.

Consigne 1 : Etudier les variations de la fonction f puis construire la portion de la courbe (Cf) qui représente le contour de la broderie dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Consigne 2 : Par des calculs, vérifier l'affirmation de M. Yao.

Critères	CM1	CM2	CM3	CP
Consigne 1	2,75points	1,25points	1point	1point
Consigne 2	1point	0,5point	0,5point	

EXERCICE 2 (06PTS)

PARTIE A ($4\times 0,25pt$)

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes si elles sont vraies ou fausses.

1. Soit (U_n) une suite numérique et f la fonction telle que $U_{n+1} = f(U_n)$. Si la suite (U_n) converge vers le réel l et si f est continue en l, alors l est toute solution de l'équation $f(x) = x$.
2. La fonction : $x \mapsto \cos(-3x + \frac{\pi}{4})$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$
3. Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.
4. f désigne une fonction numérique telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et (Cf)sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (Cf) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) en $+\infty$.

PARTIE B (3,75 pts)

Ceci est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, notez sur votre copie le numéro de la question et choisir la lettre correspondante à la bonne réponse.

1. Soit $f(x) = \cos(x)$. La dérivée d'ordre 10 de la fonction f est :

   a) $-\cos(x)$ b) $\cos(10x + \frac{\pi}{2})$ c) $\sin(x + 10\frac{\pi}{2})$ d) $10\cos(x)$.

2. La fonction f définie sur IR par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ réalise une bijection de $]-\infty, 2[$ vers $]-1; +\infty[$ et la forme explicite de sa bijection réciproque est :

   a) $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+1}$ b) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+1}$ c) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ d) Aucune bonne réponse

3. Soit f une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque telles que $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2$ et $f^{-1}(5) = \frac{1}{3}$. (C) et (C') désignent respectivement les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3.1) Le nombre dérivé $(f^{-1})'(5)$ est égal à :

   a) $\frac{1}{3}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$

3.2) La tangente à (C') au point d'abscisse 5 a pour équation (T') :

   a) $y = 3x + \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{6}$ c) $y = 2x + \frac{1}{6}$ d) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

4. La limite suivante $\lim_{x\to+\infty} (2x - 3 - \sqrt{4x^2 + x - 2})$ est égale à :

   a) $+\infty$ b) 0 c) $-\frac{13}{4}$ d) 2

5. f et g sont des fonctionS numériques définies respectivement sur l'intervalle I et $f(I)$. Si f et g ont des variations contraires, alors la fonction gof est :

   a) Décroissante sur I b) croissante sur I c) constante sur I d) aucune réponse juste.

6. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, l'équation $f(x) = 0$, $\forall x \in [0;2]$
   a) n'admet pas de solution b) admet une unique solution c) admet deux solutions
   d) admet une solution positive supérieure à 2
7. Soit la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{1+x}$
   a) h est continue sur $[-2;+\infty[$ b) h est dérivable sur $[-1;+\infty[$ c) h n'est pas dérivable en 0
   d) (Ch) admet une tangente en -1.

PARTIE C (1,25 pts)

Compléter sans recopier les expressions suivantes :

1. Soit a et b deux nombres réels et g une fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{3x^2 - 7x + 4} + ax + 2 \text{ si } x \leq 1 \\ g(x) = 2x^2 - 5x + 3 \quad si \quad 1 < x \leq 2 \\ g(x) = \sqrt{2x^2 + 1} + x + b \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

La fonction g est continue en 1 et en 2 SI a est égal à ……α… et b est égal à …β…

2. (U_n) et (V_n) sont deux suites numériques telle que $|U_n - \pi| \leq V_n$, à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n =$ ………

EXERCICE 3 (06PTS)

Soit g la fonction numérique définie sur IR par $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x^2 - 3x + 2|}$ et (Cg) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, I, J)$. L'unité graphique : 1cm

1. Ecrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. **(0,5pt)**
2. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition Dg de g. **(0,5pt)**
3. a) Etudier la dérivabilité de g en 1 et en 2 puis en déduire une interprétation graphique des résultats. **(1pt)**
   b) Donner l'ensemble de dérivabilité D de g. **(0,25pt)**
4. a) Calculer $g'(x)$ sur chacun des intervalles où g est dérivable. **(0,25pt x 2 = 0,5pt)**
   b) En déduire le sens de variation de g. **(0,5pt x 2 = 1pt)**
5. Dresser le tableau de variation g. **(0,5pt)**
6. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left[g(x) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right]$ puis conclure. **(0,25pt x 2 = 0,5pt)**
   b) Etudier la branche infinie de la fonction g en $-\infty$. **(0,5pt)**
7. Construire la courbe (Cg) et ses asymptotes. **(0,75pt)**

1DRE-M/IESG-VOGAN LYCEE TABLIGBO – CPL LA LUMIERE	Année Scolaire : 2024-2025 Niveau : TERMINALE

DEVOIR DE CLASSE	Série : D	Date : Mai 2025
EPRUVE DE MATHEMATIQUES	Coefficient : 3	Durée : $\int_1^2 (2x+1)dx \times 1H$

EXERCICE 1 08pts

Pour mieux organiser la semaine culturelle de l'année scolaire 2024-2025, le Comité d'Organisation d'un Lycée a aménagé un espace triangulaire ABC dont les affixes Z_A, Z_B et Z_C vérifient l'équation $(E): z^3 + (-7+i)z^2 + (26-30i)z + 88 - 64i = 0$ avec Z_A appartenant à l'axe des réels et $\arg(Z_B) \equiv -\frac{2\pi}{5}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2m Dans ce domaine est installé le groupe Sono au point O, le groupe Fanfare au point $F(Z_0 = \sqrt{3} + i)$ et le groupe Gazo au point G d'affixe $Z_0{}'$ image de F par l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point $M'(z' = x' + iy')$ telle que $z' = \alpha z$ $avec$ $\alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right]$ où $(a; b)$ est le résultat d'une épreuve qui consiste à prélever une première boule d'un sac contenant trois boules indiscernables au toucher marquées 1 ; 2 et 3 dont le numéro sera noté a , puis sans la remettre dans le sac, une seconde boule dont le numéro sera noté b. Le délégué du club Gazo souhaite que les trois groupes soient alignés mais le président d'organisation pose la condition selon laquelle les groupes seront autorisés si et seulement si le point G appartient au domaine ABC et que la probabilité d'obtenir « les points O, F et G alignés » soit supérieur à 0,3. Le président organise par ailleurs un mini championnat dénommé « Championnat Semaine C » composé de six équipes et chaque équipe doit affronter toutes les autres équipes en allé simple ; on note que trois matchs seront joués par jour. Il cherche à représenter la situation pour trouver le nombre total de matchs et connaitre la date de la première journée sachant que la dernière journée sera jouée le 17 Avril 2025 avec un jour de repos après chaque journée mais à cause de son programme chargé, il soumet le problème à son enfant Junior élève en classe de terminale D.

Le groupe de la terminale D, lors de la soirée « pique-nique » est repéré dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 5m à l'intérieur d'une sphère $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z + 5 = 0$ non loin d'une ruche repérée dans un plan passant par $A(4; 2; -1)$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}(-3; a; 2)$ et $\vec{v}(-7; -2; 4)$ avec $a = \int_0^2 |x-1|\,dx$.

Consigne 1 : En te basant sur tes connaissances mathématiques, aides le délégué du groupe Gazo à représenter le domaine ABC et vérifier si son groupe sera autorisé.

Consigne 2 : Aides Junior à trouver la date du début du championnat après avoir représenté ces confrontations par un schéma et proposes au papa de Junior un exemple de calendrier.

Consigne 3 : Vérifies si le groupe de la terminale D gardera sa position sachant qu'il sera envahi par les abeilles si la distance du centre de la sphère au plan de la ruche est inférieur à 5m.

Consignes	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
1	1.5	1.25	0.75	0,5
2	0.75	0.5	0.5	
3	0.75	0,5	0,5	

EXERCICE 2 06pts

A/ Parmi les propositions suivantes, choisis celles qui sont fausses et corriges-les :

1. Soit $f(x) = \frac{x\ln x}{1+x}, \forall x \in]0; +\infty[$ on a : a) $f'(x) = \frac{1+x+\ln x}{(1+x)^2}$; b) $f'(x) = \frac{1+x-\ln x}{(1+x)^2}$
2. Soit $z = 3i(2+8i) - 7(5-2i) + (7-8i)(1+5i)$. La forme algébrique de z est :
   a) $z = 12 + 47i$; b) $z = -12 + 47i$; c) $z = -12 - 47i$
3. L'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que $|\bar{z} + 1 + i| = |z + 2\sqrt{3} - 2i|$ est :
   a) un disque ; b) une médiatrice ; c) un cercle

4. L'ensemble de définition de $f(x) = ln|x^2 - 3x + 2|$ est :
   a) $D = \mathbb{R} - \{1; 2\}$; b) $D = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$
5. Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$; le calcul de I donne : a) 2 ; b) 3 c) 4
6. Soit $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; a) $f(x + lna) = \frac{ae^x}{1+ae^x b}$; b) $f(x + lna) = \frac{ae^x}{1+ae^x}$
7. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ sont de la forme :
   a) $f(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$; b) $f(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

B/ Compléter les pointillés :

1. La somme des degrés de tous les sommets d'un ……a…… est égale au ….b……. de la taille du graphe.
2. La dérivée d'ordre 7 de $f(x) = (2x + 3)^n$ est $f^{(7)}(x) =$……………….
3. Une suite bornée et majorée est une suite ……………………….
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) =$ …………………..
5. Une primitive de la fonction $f(x) = cos^3x\, sin^4 x$ est $F(x) =$………………
6. L'ensemble de solution du système d'équation suivant : $\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) - ln2 = 0 \\ \frac{e^x}{e^y} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$ est $S =$……………….

EXERCICE 3 06pts

Partie A :

n étant un entier naturel non nul, on note $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n. En déduire l'existence d'un réel unique α_n solution de $f_n(x) = 0$ (1pt)
2. Démontrer que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$ et exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n puis en déduire le sens de variation de la suite de terme général α_n. (0.75pt)
3. Démontrer que la suite de terme général α_n est convergente et calculer sa limite. (0.5pt)

Partie B :

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$ et la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$; (C) et (C'), désignent les représentations graphiques de g et h respectivement dans un repère orthonormé (O,I,J) du plan d'unité 2cm.

1. Calculer les limites de g lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$ (0.5pt)
2. Vérifier que $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ En déduire les variations de g. (1.25pt)
3. Préciser les positions relatives des deux courbes (C) et (C') et calculer la limite lorsque x *tend vers* $+\infty$ de $(g(x) - h(x))$. (0.5pt)
4. Tracer les courbes (C) et (C') (1pt)
5. On pose $I = \int_1^2 g(x)\, dx$. Calculer I. (0.5pt)

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve »

EXERCICE 1 : SITUATION PROBLÈME (06 pts)

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a transmis un match de football de la Ligue des Champions. Juste après le match, la chaîne a proposé une émission d'analyse de ce match. Les informations suivantes ont été relevées :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match
- Un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission
- 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission.

Par ailleurs, une étude montre que une solution f de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 4e^{x}$ permet de déterminer le chiffre d'affaire mensuel de la chaîne de télévision en francs CFA en fonction du nombre x de mégawatts consommé par les différents appareils. Cette étude montre que pour tout réel α, la fonction g définie par $g(x) = \alpha x^2 e^{x}$ vérifie l'équation (E) et la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ du plan passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -3x$.

Ton père voulant aussi se lancer dans la télécommunication te demande de lui répondre aux consignes suivantes :

Consigne 1 : Déterminer la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé le match sachant qu'il n'a pas suivi l'émission.

Consigne 2 : Déterminer le chiffre d'affaire de la chaîne de télévision pour une consommation de 10 mégawatts.

Grille de notation :

	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,5 pt	1 pt	1 pt	0,5 pt
Consigne 2	1,5 pt	1 pt	1 pt	0,5 pt

EXERCICE 2 (06 pts)

I- Répondre par vrai ou faux (Ne pas recopier la phrase). **0,25pt×2**

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}(-1; 2; 3)$ et $\vec{v}(6; 0; 2)$ sont orthogonaux.
2. Une fonction f est dérivable en un point a si et seulement si f est dérivable à gauche en a et dérivable à droite en a.

II- Choisir la bonne réponse (On relèvera sur la copie juste le numéro et la lettre correspondante). **0,5pt×4**

1. Le couple $(\alpha; \beta)$ de nombres réels pour lequel la fonction f définie par $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$ est :
   a) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$ b) $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right)$ c) $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{16}\right)$ d) Aucune bonne réponse
2. $ABCD$ est un carré de sens direct. Le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en C sont respectivement :
   a) $k = \sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ b) $k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ c) $k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ d) Aucune bonne réponse
3. La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x\ln^2 x$ sur l'intervalle $[1; e]$ est :
   a) $\mu = \frac{e-1}{4}$ b) $\mu = \frac{e^2-1}{4}$ c) $\mu = \frac{e+1}{4}$ d) Aucune bonne réponse
4. Dans l'espace, le point d'intersection du plan d'équation cartésienne $7x + y - 2z - 13 = 0$ et de la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ a pour coordonnées :
   a) $\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{13}{9}\right)$ b) $\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{13}{9}\right)$ c) $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{3}; \frac{13}{9}\right)$ d) Aucune bonne réponse

III- Compléter les pointillés suivants sans recopier la phrase. **1pt×2**

1. L'unique solution réelle de l'équation $(E) : z \in \mathbb{C},\ z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0$ est $\cdots a \cdots$
2. Pour tous réels strictement positifs x, y et z, l'ensemble solution du système $(\Sigma) : \begin{cases} \ln(x^2y^4z) = 14 \\ \ln(xyz) = 12 \\ \ln(x^3yz^2) = 14 \end{cases}$ est $\cdots b \cdots$

IV- Compléter le tableau suivant par une primitive correspondante à chacune des fonctions proposées sur l'intervalle I considéré : **0,5pt×3**

Fonction	Primitive
$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}$ sur $I=\mathbb{R}$	$F(x)=\cdots$
$g(x)=\sin^3 x\cos^4 x$ sur $I=\mathbb{R}$	$G(x)=\cdots$
$h(x)=\frac{\ln x}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$	$H(x)=\cdots$

EXERCICE 3 (06 pts)

On considère un dé cubique non pipé ayant deux faces numérotées 2 et quatre faces numérotées 3, et un dé tétraédrique régulier ayant deux faces numérotées 2 et deux faces numérotées 4. On lance simultanément les deux dés, on désigne par a le numéro apparu sur la face supérieure du dé cubique et b celui sur la face cachée du dé tétraédrique. On considère l'équation différentielle $(E_1): y''+ay'+by=0$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur du discriminant $\Delta=a^2-4b$ de l'équation caractéristique de (E_1). On dit que (E_1) admet une fonction sinusoïdale comme solution générale si $\Delta<0$.

1. (a) Déterminer toutes les valeurs prises par X. **0,5pt**
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X. **0,5pt**
   (c) Définir la fonction de répartition F de X. **0,5pt**
   (d) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal du plan. **0,75pt**
2. Déterminer la probabilité p pour que (E_1) admette pour solution générale, une fonction non sinusoïdale. **0,5pt**
3. On lance n fois de suite les deux dés. On désigne par Y le nombre de fois que l'équation (E_1) admet une fonction non sinusoïdale comme solution générale.
   Déterminer le plus petit entier naturel n pour que la probabilité $P(Y\geq 1)$ soit supérieure ou égale à 0,999. **0,5pt**
4. On pose $(a;b)=(3;2)$ et on considère l'équation différentielle $(E_2): y''+3y'+2y=\frac{1}{x^2}(x-1)e^{-x}$.
   (a) Vérifier que la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=e^{-x}\ln x$ est solution de (E_2). **0,75pt**
   (b) Résoudre l'équation différentielle $(E_3): y''+3y'+2y=0$. **0,5pt**
   (c) Soit g une fonction au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que g est solution de (E_2) si et seulement si $g-f$ est solution de (E_3). **0,75pt**
   (d) En déduire toutes les solutions de l'équation (E_2). **0,75pt**

BONNE CHANCE !

MATHEMATIQUES (Coef 3)

DEVOIR SURVEILLE DU 2e TRIMESTRE

Exercice 1 (08pts)

Les autorités municipales de la ville de KPALIME ont lancé deux projets importants pour améliorer les infrastrures de la ville :

Le premier projet concerne l'aménagement d'un chemein dans la zone montagneuse. Selon les études des ingénieurs en charge du projet : ce chemin est représenté par une ligne brisée, constituée de plusieurs segments reliés entre eux. Les points qui définissent ce chemin sont noté $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, \dots M_n, M_{n+1}$. La longueur totale est la somme des distances entre ces points successifs, ce qui est exprimé par la formule $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$. Le point de départ de ce chemin est situé à M_0 d'affixe $z_0 = 2$ dans le plan complexe $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Chaque nouveau point est l'image du précédent par la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Quant au deuxième projet, il porte sur la construction de routes qui relieront les différents secteurs de la ville. Ces routes sont modélisées par la fonction $f(x) = -x + \ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$.

Consigne 1 : Démontre que la longueur de la ligne brisée est $L_n = -2(1+\sqrt{2})\left[1 - \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$

Consigne 2 : Trace les routes principales dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Grille de notation

Consignes	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,25 pts	1 pt	1 pt	0,5 pt
Consigne 2	1,75 pts	1,5 pts	1 pt	

Exercice 2 (06pts)

I. Pour chaque affirmation, choisis la bonne réponse. (0,5pt × 4)

1. On donne I= $\int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ et J= $\int_0^1 t\sin^2(\pi t)dt$. I+J est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 0

2. L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln(x^2+19x-24)$ a pour ensemble solution :

a) $S = \left\{-1; \frac{3}{2}; 4\right\}$ b) $S = \{4\}$ c) $S = \{\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{2}; 4\right\}$

3. L'équation $z + 2i\bar{z} = 2 - 5i$ a pour solution dans :

a) 1 b) $\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i$ c) $2 - \frac{5}{2}i$ d) $-4 + 3i$

4. Une urne contient cinq boules portant le numéro 2, quatre boules portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4. On tire simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Soit l'événement A : « Tirer au moins une boule portant le numéro 3 ».Alors

a) $P(A) = \frac{8}{11}$ b) $P(A) = \frac{42}{55}$ c) $P(A) = \frac{43}{55}$ d) $P(A) = \frac{41}{55}$

II. Compléter par les mots , groupes de mots ou nombres convenables. (0,5pt × 4)

1. Les racines quatrième de l'unité sont : ....

2. Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx =$ ....

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^x$ Une expression plus simple de f est : $f(x) =$ ....

4. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2cm, on considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x+2}$. L'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_g), l'axe des abscisses et les droites respectives $x = 1$ et $x = 3$ est égale à : ....

III. Complète par le mot ou l'expression manquant(e) sans recopier la phrase (0,25pt × 8)

On considère le polynôme P définie par $P(z) = z^3 + (-5+i)z^2 + (9-4i)z - 5 + 5i$. $P(1+i) = ...$ **(a)**...... et $P(1-i) = \cdots$ **(b)** ......Donc une racine de P est $z_0 = \cdots$ **(c)**...... Les nombres réels α et β tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$ sont: $\alpha = ...$ **(d)**...... et $\beta = \cdots$ **(e)** ......Les autres racines du polynôme P sont $z_1 = \cdots$ **(f)**......et $z_2 = ...$ **(g)**...... Soit les points A, B et C les points d'affixes respectives $2 - i$; $1 - i$ et $2 + i$. Le triangle ABC est ... **(h)** ......

Exercice 3 (06pts)

I. On donne les intégrales $A = \int_0^{\pi} e^{-x}\cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$.

1. Calculer $A + B$. (0,5pt)
2. Montrer que $B - A = \int_{\pi}^{0} e^{-x}\cos 2x dx$. (0,5pt)
3. A l'aide d'une double intégration par partie calculer $B - A$ (0,75pt)
4. En déduire les valeurs exactes de A et B. (0,5pt)

II. On donne l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = (x+1)e^{-2x}$. (1)

1. Résoudre l'équation homogène : $y'' + 4y' + 4y = 0$. (2) (0,75pt)
2. On considère $h(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right).e^{-2x}$.
   a) Démontrer que h est une solution particulière de l'équation (1) (1pt)
   b) f étant une solution quelconque de l'équation (1), démontrer que f – h est une solution de l'équation homogène (2). (0,5pt)
   c) En déduire la solution générale de l'équation (1). (0,5pt)
3. Soit f une solution de l'équation (1)
   a) Vérifier que pour tout réel x, $4f(x) - (x+1)e^{-2x} = -4f'(x) - f''(x)$ (0,5pt)
   b) Déterminer en fonction de f et f ' une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 4f(x) - (x+1)e^{-2x}$. (0,5pt)

IESG : AGOE-NYIVE	DEVOIR SURVEILLE DU 2ème SEMESTRE	A/S : 2025-2026
LYCEE TOGBLEKOPE		Durée : 4 H
Classe : 1ère D	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Coef. : 3

SITUATION COMPLEXE : 8pts

I/ Dans un laboratoire de chimie, les analystes notent $\theta(t)$ la température d'une réaction chimique à l'instant t (t exprimé en heure et $\theta(t)$ en degrés Celsius). La réaction débute à 10 h du matin, heure choisie comme instant initial ($t = 0$). Les analystes admettent que la fonction θ peut être définie par $\theta(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}$. L'expérience est réussie si on retrouve la même température à midi que celle entre 10h et 18h.

II/ Une maladie atteint 10% d'une population. Un test de dépistage permet de détecter si un individu est malade. Ce test doit être positif si l'individu est malade et négatif sinon. La probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est malade est de 0,008. La probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est sain est de 0,02.

On appelle valeur diagnostique d'un test, la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade. Une erreur de test survient lorsque : « l'individu est sain et le test positif » ou « l'individu est malade et le test négatif. »

Consignes

1. Donner la variation de la température de 10h à 18h. Cette expérience est-elle réussie ? Si oui, préciser à quel(s) moment(s).
2. Après avoir déterminer la valeur diagnostique de ce test et la probabilité d'une erreur de test. Donner la probabilité de ne pas avoir une erreur de test sur 5 tests effectué

Consignes	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
1	1.5	1.5	0.75	0.25
2	1.5	1.5	0.75	0.25

EXERCICE 1 : 6pts

I/ Complète le texte suivant (ne pas recopier les texte) : 0,25pt×8 + 0.75pt×2

1) Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{[illegible]}$. On appelle succès l'évènement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ». Cette expérience qui ne comporte que deux issues est une épreuve de Bernoulli de paramètre …a …. Si on effectue 5 fois de suite cette expérience de façon identique et indépendante, on est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre …b …et …c …. On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancers. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \ldots d \ldots$ et sa variance est $V(X) = \ldots e \ldots$. La probabilité d'obtenir exactement 3 fois le chiffre 6 à l'issue des 5 lancers est $P(X = 3) = \ldots f \ldots$. La probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 à l'issue des 5 lancers est $P(X \geq 1) = 1 - P(X = \ldots g \ldots) = \ldots h \ldots$.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(-1)$, $B(-2+i)$, $C(i)$ et $D(1-2i)$. l'écriture complexe de la similitude directe S_1 qui laisse A invariant et transforme B en C est …i…

3) L'expression analytique de la transformation du plan qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ dont l'écriture complexe est donné par $z' + 3i = z + 2 + 2i$ est : …j…

***II/* Choisir la bonne réponse : 0.25ptx6**

1) La similitude directe d'écriture complexe $z' = (1+i)z - 2i$ a pour centre $\Omega(\omega)$, rapport k et angle θ.
a) $\omega = -2; k = -\sqrt{2}; \theta = \frac{\pi}{4}$ b) $\omega = 2; k = \sqrt{2}; \theta = -\frac{\pi}{4}$ c) $\omega = 2; k = \sqrt{2}; \theta = \frac{\pi}{4}$

2) L'écriture complexe de la similitude directe S de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle θ est :
a) $z' - \omega = k\theta(z - \omega)$ b) $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ c) $z' - \omega = ke^{\theta}(z - \omega)$

N°	Énoncés	Réponses		
		a	b	c
3	La probabilité de B sachant que A est réalisé se note	$P_B(A)$	$P_A(B)$	$P(A\cap B)$
4	La probabilité de B sachant que A est réalisé est égale à	$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$	$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$	$P(A\cap B)$
5	La probabilité de A et B est égale à	$P(B)\times P_A(B)$	$P(A)+P_A(B)$	$P(A)\times P_A(B)$
6	La probabilité de B est égale à	$P(A\cap B)+P(A)$	$P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$	$P(\bar{A}\cap B)\times P(\bar{A}\cap B)$

III/ **Traduis cette situation en arbre pondéré : 1pt**

Deux fournisseurs proposent du beurre de cacao. Un grossiste achète 80 % de ses boites chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.

10 % des boites provenant du fournisseur A présentent des traces de matières grasses végétales et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent des traces de matières grasses végétales. On prélève au hasard une boite du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

A : « la boite provient du fournisseur A » ;
B : « la boite provient du fournisseur B » ;
S : « la boite présente des traces de matières grasses végétales ».

EXERCICE 2 : 6pts

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(C_f) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm.

1. Justifier que f est continue en 0. (0.25pt)
2. Justifier que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.(0.5pt)
3. Calculer la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.(0.75pt)
4. Calculer la limite de $f(x)$ en $-\infty$.(0.5pt)
5. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.(0.5pt)
6. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
   (a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.(0.75pt)
   (b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.(0.75pt)
7. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on détermine.(0.5pt)
8. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h de représentation graphique (C'). Étudier la dérivabilité de h^{-1} en 0 et en donner une interprétation graphique.(0.5pt)
9. Construire (D), (C_f) et (C') dans le même repère.(1pt)

LYCEE TOKOIN 2 | **Devoir de la fête des TRAVAILLEURS** | Année Scolaire 2022 – 2023
DRE Grand Lomé | MATHEMATIQUE Terminale D | Mai 2023
IESG Golfe Ouest | Durée : 03Heures | Coef : 04

« Quand le pourquoi est clair, le comment n'a plus aucune ambiguïté.»

EXERCICE1 (5,5points)

1. a) Résoudre dans ℂ l'équation (E): $z^2 + 2z + 2 = 0$

On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative et par z_2 l'autre solution. (1pt)

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2, $z_3 = \sqrt{3} - 1$. Placer les points A, B et C. (0,5pt)

c) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $Z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. En déduire la nature du triangle ABC (1pt)

2. Trouver les fonctions numériques f, deux fois dérivables telle que : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ (1pt)

3. On considère l'équation différentielle : (1) : $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des entiers naturels appartenant à l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

On dispose de trois urnes contenant chacune 6 boules identiques numérotées de 1 à 6. On tire au hasard une boule de chaque urne et on note le numéro de la boule tirée. La première urne donne la valeur a, la deuxième celle de b et la troisième urne la valeur de c.

a) on suppose que b = c = 2a. Soient les fonctions $F(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels. Justifier que les fonctions F sont les solutions de l'Equation (1). (0,75pt)

b) Déterminer l'ensemble des triplets (a ; b ; c) pour que F soient solutions de (1). (0,5pt)

c) Montrer que la probabilité pour qu'on ait le triplet (1, 2, 2) est égale à $\frac{1}{216}$ (0,25pt)

d) Déterminer la probabilité pour que F soient solutions de (1) (0,5pt)

EXERCICE2 (4,5points)

Le tableau suivant donne l'évolution du prix en dollar de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en dollar (y_i)	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1. a) Représenter le nuage de points associés à la série statistiques (x_i ; y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité : 1cm pour une année en abscisse et 1cm pour dix dollars en ordonnée. (0,75pt)

b) Calculer les coordonnées du point G. (0,5pt)

2. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i ; y_i). Un ajustement affine est-il justifié ? (1,25pts)

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x. (0,75pt)

c) Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points. (0,25pt)

3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :

a) Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2026. (0,5pt)

b) En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 186 dollars. (0,5pt)

PROBLEME (10points)

On considère la fonction f définie sur [0; +∞[par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2cm.

A. Soit g la fonction définie sur l'intervalle J = [0 ; +∞[par : $g(x) = x + 2 - e^x$

1. Etudier le sens de variation de g sur J et déterminer la limite de g en +∞. (1pt)

2. a) Démontrer que l'équation : g(x) = 0 admet une et unique solution dans J. On note α a cette solution. (0,5pt)

b) Prouver que 1,14 < α < 1,15. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x. (0,75pt)

B. 1. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à J, $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ (0,25pt)

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur J. (0,5pt)

2. a) Démontrer que, pour tout réel positif x, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ (0,75pt)

b) En déduire la limite de f en +∞ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé. (0,5pt)

3. a) Etablir que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ (0,5pt)

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A. 2, donner un encadrement de f(α) d'amplitude 10^{-2} (0,5pt)

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 (0,5pt)

5. a) Etablir que pour tout x appartenant à J, $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x + 1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$ (0,5pt)

b) Etudier le sens de variation de φ sur J. En déduire le signe de φ(x) sur J. (1pt)

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T). Tracer (C) et (T). (1,75pts)

6. Déterminer une primitive F de f sur J, on pourra utiliser l'expression de f(x) établie en B 5,a. D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équations x = 0 et x = 1. Calculer en cm², l'aire du domaine D. (1pt)

BONUS : Enumérer les théorèmes d'inégalité des accroissements finis (1pt)

« Mettez toujours vos dons au service des autres »Mr AZOUGO

LYCEE BASSAR	DEVOIR SURVEILLE DU 1[er] SEMESTRE	CLASSE : TD
A/S : 2024-2025	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	DUREE : 3H/ COEF : 3

EXERCICE 1 (08 points)

Dans le cadre du développement de son territoire, le Maire de la commune de Bassar a décidé de faire tracer une route dans un quartier. Il lance alors un appel d'offre à l'issu duquel une entreprise de génie civil est retenue pour la réalisation des travaux. Après visite du terrain et modélisation, l'entreprise informe le Maire que la route à tracer sera une partie de la courbe représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{|x^2 - 4|}$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J) où le point O est le pied du mât de la mairie.

Le quartier possède deux espaces libres dont un pour le sport et l'autre pour les loisirs. Le maire décide également de les sécuriser car des personnes mal intentionnées les utilisent à des mauvaises fins. Pour cela, il décide d'acheter du fil barbelé pour clôturer entièrement chacun de ces deux espaces. Le rouleau de 5m lui est vendu à $3500F$. Il devra en plus remettre $3000F$ pour les piquets et la main d'oeuvre pour chacun des espaces.

L'espace 1 est de forme rectangulaire et ses dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution de l'équation : $(1+4i)z + (3-4i)\bar{z} = 4 - 8i$; $\bar{z}$ étant le conjugué de z.

L'espace 2 est formé de l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que le complexe $\frac{z}{z+2i}$ soit un imaginaire pur.

Les distances dans tous ces espaces sont exprimées en décamètre.

Le maire désire avoir une représentation de l'ouvrage ainsi que le montant à utiliser pour la clôture des deux espaces mais étant très chargé, te sollicite en tant qu'élève en classe de Terminales D.

Consigne 1 : A partir d'une étude de la fonction f, représente dans un plan le support de cette route.

Consigne 2 : A travers tes connaissances mathématiques, détermine les dépenses que fera le Maire pour clôturer l'espace 1 et l'espace 2.

Consignes	Pertinence	Correction	Cohérence	Perfectionnement
Consigne 1	1,25pt	1,25pt	1pt	0,5pt
Consigne 2	1,25pt	1,25pt	1pt	0,5pt

EXERCICE 2 (06 points)

A- *Compléter les phrases suivantes en utilisant les numéros et les lettres sans recopier toute la phrase.*

1. Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points distincts tels que : $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
   ABC est un triangle.......a........ (0,5pt)
2. La forme linéarisée de $\sin^6 x$ est ....b....... (0,5pt)
3. Les racines quatrièmes du nombre complexe $-4 + 4i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle sont .....c......... (1pt)
4. Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$,
   alors $f([0; +\infty[) =$.....d....... (0,5pt)
5. Soit (U_n) une suite numérique. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 2| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,
   alors $\lim_{n \to +\infty} U_n =$......e........ (0,5pt)
6. Toute suite .....g........ et minorée est ....h..... (0,25+0,25)pt
7. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; $a, b \in I$ tel que $a < b$.
   S'il existe un nombre réel k tel que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq k$, alors ......i........ (0,5pt)

Soyez inspirés!!

B- Sans recopier toute la phrase, indiquer à chaque question la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. Le module du nombre complexe $\frac{(3-4i)(\sqrt{3}-i)}{(1-i)^2}$ vaut : a. 5 ; b. $5\sqrt{2}$; c. $5\sqrt{3}$; d. 10. (0,5pt)
2. Soit z un nombre complexe tel que $|z| = \sqrt{2}$ et $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$. (0,5pt)
   La forme algébrique de z est : a. $1+i$; b. $-1+i$; c. $1-i$; d. $-1-i$.
3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet :
   a. Une demi-tangente horizontale au point d'abscisse x_0 ; b. Une asymptote verticale d'équation $x = x_0$; (0,5pt)
   c. Une demi-tangente verticale au point d'abscisse x_0 ; d. Aucune réponse.
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$ est égale à : a. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b. $-\frac{2}{3}$; c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (0,5pt)

EXERCICE 3 (06 points)

Partie A.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   (a) Etudier les variations de g. (1pt)
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]2;3[$ et donner un encadrement de α à 10^{-1} près. (1pt)
2. Soit h la fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ par $h(x) = \frac{1}{1+\cos x}$.
   (a) Etudier les variations de h. (1pt)
   (b) Montrer que h réalise une bijection de $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ sur un intervalle J à déterminer. (0,5pt)
   (c) h^{-1} est-elle dérivable sur J ? Justifier. (0,25pt)
   (d) Calculer $(h^{-1})'(2)$. (0,5pt)

Partie B.

On considère l'équation $(E) : z^3 - (1+i)z^2 - (2i-2)z - 8i = 0$.

1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0. (0,5pt)
2. Déterminer les nombres complexes a et b tels que :
   $z^3 - (1+i)z^2 - (2i-2)z - 8i = (z+2i)(z^2 + az + b)$. (0,5pt)
3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation (E). (0,75pt)

BON COURAGE!!!

DEVOIR DE NIVEAU
NIVEAU : Tle
Année-Scolaire : 2022-2023

MATHÉMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 3 heures
CE. MATHEMATIQUE
Date : 19 / 10 / 2022

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1; 2 et 3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, dis si elle est vraie (V) ou fausse (F).

N°	Propositions
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a ; b]$ alors $f([a ; b]) = [f(b); f(a)]$
2	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[-2 ; 3]$ et si $f(-2) \times f(3) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]-2 ; 3[$
3	Soit une fonction $S(x)$ et sa bijection réciproque $S^{-1}(x)$. Leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$
4	Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OI)

EXERCICE 2 (2 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Écris sur ta copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	Enoncés	Réponses	
1	Soit f une fonction et α un nombre réel. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \cdots$	A	0
		B	$-\infty$
		C	$+\infty$
		D	α
2	$a \in \mathbb{R}_+ , b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}}$	A	a^5b^5
		B	ab
		C	$a^{12}b^{11}$
		D	a^4b^3
3	f et g sont deux fonctions. a, b et l sont des nombres reels, soit $-\infty$ soit $+\infty$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors	A	$\lim\limits_{x \to b}(fog)(x) = -\infty$
		B	$\lim\limits_{x \to a}(gof)(x) = l$
		C	$\lim\limits_{x \to b}(fog)(x) = l$
		D	$\lim\limits_{x \to a}(gof)(x) = b$
4	Si pour tout nombre réel x non nul, $3 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + 3$, alors la limite de f en $+\infty$ est égale à :	A	0
		B	$-\infty$
		C	3
		D	$+\infty$

EXERCICE 3 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in [0\,;+\infty[$, on a : $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2. Démontrer que $\forall x \in]0\,;+\infty[$: $0 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{x}}$

3. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaisons, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent).

a) $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$; b) $f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+1}$

EXERCICE 4 (4 points)

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^3-12x+10$.

1. a) Étudier le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet 3 solutions α, β et γ sur $\mathbb{R}$ tels que : $\alpha<\beta<\gamma$.

a) Vérifier que $\beta \in]0\,;1[$

b) Encadre β par deux nombres décimaux consécutifs à 10^{-2} près.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de $]2\,;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) On note g^{-1} sa bijection réciproque, dresser le tableau de variation de g^{-1}.

EXERCICE 5 (5 points)

Une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifie $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ et a pour tableau de variation suivant :

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Déterminer D_f

2. Justifier que (C) admet deux asymptotes que l'on précisera.
3. Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera.
4. Déterminer $f(]-\infty ; 1[)$, $f(]1 ; 2[)$ et $f(]2 ; +\infty[)$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution unique α dans $\mathbb{R}$.
6. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ; 2[\cup]2 ; \alpha[$, $f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.
7. Donner l'allure générale de (C). On donne $\alpha = 3,4$.

EXERCICE 6 **(4 points)**

Un cordonnier fabrique des sacs à main. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle en centaines de francs est modélisée par la function $B(x) = x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 450x + 150$, x représentant le nombre de sacs fabriqués et vendus. Il aimerait connaître l'intervalle de sa marge bénéficiaire pour un nombre de sacs fabiqués compris entre 5 et 17.
En te basant sur tes connaissances mathématiques et à l'aide d'un raisonnement cohérent, aide ce cordonnier à répondre à sa préoccupation.