2de

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SON ANNÉE

ellipses

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

POUR RÉUSSIR SON ANNÉE

2de

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

POUR RÉUSSIR SON ANNÉE

2de

Konrad Renard

Professeur de mathématiques
au lycée René Cassin de Gonesse

ellipses

Du même auteur chez le même éditeur

Retrouvez tous les livres du même auteur chez le même éditeur
sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-063273

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Tout en consolidant les connaissances des élèves, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances dans l'objectif de suivre la spécialité Mathématiques en première générale ou une première technologique.

Cet ouvrage est un recueil d'exercices allant de la simple application du cours à des exercices difficiles. Il s'articule autour de 4 chapitres.

1. Nombres et calculs

2. Fonctions

3. Géométrie

4. Statistiques et probabilités

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

• Des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement.

• Des exercices de synthèse, mêlant plusieurs notions du chapitre.

• Des exercices pour se préparer à la poursuite des études dans cette spécialité. Ces exercices sont plus difficiles, mêlent plusieurs notions ou abordant des thèmes qui ne sont pas au programme de seconde mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études.

• Les corrigés détaillés de tous les exercices.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres et calculs

1.1 Nombres entiers

1.1.1 Point de cours

Définitions et notations

- L'ensemble des nombres **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un entier positif : $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\}$.
- L'ensemble des nombres **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un entier : $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}$.

Remarque : tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce qui se note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Définition : Soient a et b deux entiers. S'il existe un nombre entier p tel que $a = b \times p$, on dit que :

- b divise a ou que b est un diviseur de a;
- ou que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.

Critères de divisibilité :

- Un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est 0; 2; 4; 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 4 lorsque les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 8 lorsque les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par 10 lorsque le chiffre des unités est 0.

Définition et propriété : soit n un nombre entier.
• Un **nombre pair** est un entier multiple de 2. Ainsi, n est pair si et seulement s'il existe un

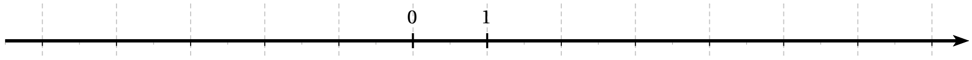
entier p tel que $n = 2 \times p$.
• Un **nombre impair** est un entier **non** multiple de 2. Ainsi, n est impair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2 \times p + 1$.

Définition : un **nombre premier** est un entier naturel possédant exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Propriété : tout entier naturel, non premier et supérieur à 2, peut s'écrire comme produit de nombres premiers.

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1 **5 minutes**
Placer les entiers relatifs suivants sur la droite numérique : 2, −3, 7, −1, −5, 5 et 4.



EXERCICE 2 **5 minutes**
On sait que $193 = 15 \times 12 + 13$.
Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 193 par 15, puis de la division euclidienne de 193 par 12.

EXERCICE 3 **5 minutes**
On sait que $2021 = 20 \times 99 + 41$.
Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 2021 par 99, puis de la division euclidienne de 2021 par 20.

EXERCICE 4 **5 minutes**
Parmi les nombres 12 ; 25 ; 36 ; 45 ; 98 ; 111 ; 285 ; 2021 ; 4238 ; 6391 et 9136, indiquer ceux qui sont divisibles par :
1. par 2 **2.** par 3 **3.** par 5 **4.** par 6 **5.** par 9

EXERCICE 5 **5 minutes**
Parmi les nombres 36; 161; 396; 495; 1818; 9876; 2835; 3456; 3795; 9192 et 89000, indiquer ceux qui sont divisibles par :
1. par 2 **2.** par 3 **3.** par 5 **4.** par 9 **5.** par 18

EXERCICE 6 **5 minutes**
Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 5, les multiples de 13 et les multiples de 6 ?
10 ; 39 ; 60 ; 65 ; 69 ; 234 ; 330 ; 390.

EXERCICE 7 **5 minutes**

Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 4, les multiples de 12 et les multiples de 17 ?

34 ; 36 ; 42 ; 65 ; 68 ; 340 ; 510 ; 4692.

EXERCICE 8 **5 minutes**

Parmi les nombres suivants, quels sont les nombres premiers ? Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres non premiers.

57 ; 67 ; 77 ; 101 ; 373 ; 1323 ; 1001 ; 3223 ; 4597.

EXERCICE 9 **5 minutes**

Parmi les nombres suivants, quels sont les nombres premiers ? Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres non premiers.

97 ; 99 ; 103 ; 123 ; 231 ; 567 ; 773 ; 1657.

EXERCICE 10 **5 minutes**

On considère les entiers $a = 35$ et $b = 45$.

1. Donner un multiple de a et un multiple de b.
2. Donner un entier multiple simultanément de a et b, c'est un multiple commun à a et b.
3. Donner le plus petit multiple commun à a et b.

EXERCICE 11 **5 minutes**

On considère les entiers $a = 42$ et $b = 63$.

1. Donner un multiple de a et un multiple de b.
2. Donner un entier multiple simultanément de a et b, c'est un multiple commun à a et b.
3. Donner le plus petit multiple commun à a et b.

EXERCICE 12 **5 minutes**

1. Donner la forme d'un entier multiple de 5.
2. Donner la forme d'un entier multiple de 13.
3. Soit a un entier naturel. Donner la forme d'un entier multiple de a.

EXERCICE 13 **10 minutes**

Dans chaque cas, donner tous les diviseurs des entiers a et b, puis tous les diviseurs communs à a et b. En déduire le plus petit diviseur commun à a et b.

1. $a = 15$ et $b = 35$
2. $a = 30$ et $b = 50$
3. $a = 120$ et $b = 40$
4. $a = 39$ et $b = 16$
5. $a = 154$ et $b = 99$
6. $a = 380$ et $b = 171$

EXERCICE 14 **10 minutes**
Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants : 64, 162, 250, 1000 et 3630.

1.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 15 **10 minutes**
Soit a un entier naturel. Démontrer que la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

EXERCICE 16 **10 minutes**
Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

EXERCICE 17 **5 minutes**
Soient $a = 14k$ et $b = 18k$ avec k entier.

1. Démontrer que a est un multiple de 2.
2. Démontrer que b est un multiple de 9.
3. 16 est-il un diviseur de $a + b$?

EXERCICE 18 **5 minutes**
Démontrer que le carré d'un nombre pair est divisible par 4.

EXERCICE 19 **10 minutes**
Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que si n est pair alors $n(n+1)$ est pair.
2. Démontrer que si n est impair alors $n(n+1)$ est pair.
3. Que peut-on en conclure sur le produit de deux entiers consécutifs ?

EXERCICE 20 **10 minutes**
Démontrer que si n est un entier naturel impair supérieur ou égal à 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

EXERCICE 21 **10 minutes**
Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

EXERCICE 22 **10 minutes**
Tom dispose de 75 plaques carrées. Il veut les disposer de manière à former un rectangle.

1. Quelles sont les dimensions possibles de ce rectangle ?
2. Quel est le rectangle de plus grand périmètre ?

EXERCICE 23 **10 minutes**
Lors d'un tournoi de foot, 45 filles et 60 garçons sont inscrits. L'organisateur veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant toutes le même nombre de garçons et le même nombre

de filles.
Combien d'équipes peut-il constituer ?

EXERCICE 24 **10 minutes**

Emma et Arthur ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.

1. Arthur propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles.
   Chaque corbeille doit avoir la même composition. Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées ?
2. Emma et Arthur changent d'avis et décident de proposer des petits ballotins* dont la composition est identique. Ils souhaitent qu'il ne leur reste pas de dragées.
   a. Emma propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
   b. Ils se mettent d'accord pour faire un maximum de ballotins.
      Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?

** Un ballotin est un emballage pour confiseries, une boîte par exemple.*

EXERCICE 25 **10 minutes**

Un enfant range ses billes par rangées de 6, il lui en reste 3. Il les range ensuite par rangées de 5, il n'en reste pas.

1. Si l'enfant place ses billes par rangées de 3, va-t-il lui en rester ?
2. Quel est le nombre de billes que possède l'enfant, sachant que ce nombre est inférieur à 30 ?

EXERCICE 26 **10 minutes**

Quatre affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune, indiquer si elle est vraie ou fausse en argumentant la réponse.
Affirmation 1 : le PGCD de 52 et 39 est 13.
Affirmation 2 : 72 a exactement cinq diviseurs.
Affirmation 3 : si n est un entier, $(n-1)(n+1)+1$ est toujours égal au carré d'un entier.
Affirmation 4 : deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

EXERCICE 27 **10 minutes**

L'entreprise « Punu Pua Toro » vend des boîtes de corned-beef. Ces dernières sont de forme cylindrique de 12 cm de diamètre et de 5 cm de hauteur. Elles sont rangées dans un carton de 84 cm de long, 60 cm de large et 5 cm de hauteur de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres.

1. Combien de boîtes peut-on ranger au maximum dans un carton ?
2. Calculer le PGCD de 84 et 60.
3. L'entreprise peut-elle ranger dans ce carton des boîtes cylindriques de plus grand diamètre de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres ? Justifier la réponse.

EXERCICE 28 **10 minutes**

1. Déterminer le PGCD de 186 et 155 .

2. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats.Les colis sont constitués ainsi :

- Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
- Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
- Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

a. Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?
b. Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

EXERCICE 29 **10 minutes**
Un chocolatier dispose de 1 575 bonbons au chocolat blanc et de 4 410 bonbons au chocolat noir.
Afin de préparer les fêtes de fin d'année, il veut répartir ses chocolats dans des boîtes de la manière suivante :

- tous les chocolats doivent être utilisés
- toutes les boîtes doivent avoir la même composition.

De plus il veut réaliser le plus grand nombre de boîtes possible.

1. Combien pourra-t-il faire de boîtes ? Justifier votre réponse.
2. Dans chaque boîte, combien y aura-t-il de chocolats blancs et de chocolats noirs ? Justifier.

1.2 Nombres décimaux - Nombres rationnels

1.2.1 Point de cours

Définition 1 : pour tout entier naturel n, non nul, pour tout entier relatif a,
$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
Et, si a est non nul, $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.
Par convention, $a^0 = 1$.

Propriété : soient n et m deux entiers relatifs, a et b deux nombres.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\left(a^n\right)^m = a^{n \times m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$

Définition 2 :
• L'ensemble des nombres **décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^k}$, où a est un entier relatif et k un entier naturel.

• L'ensemble des nombres **rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul.

Remarque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Propriété : tout rationnel R a une **forme irréductible** unique, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif p et un unique entier naturel q non nuls tels que $R = \dfrac{p}{q}$ et tels que le seul diviseur positif commun à p et q soit 1.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 30 **5 minutes**

Compléter les égalités suivantes :

1. $10^6 \times 10^5 = 10^?$

2. $10^3 \times 10^5 \times 10^? = 10^4$

3. $\dfrac{13^2 \times 5}{3 \times 7} = 3^? \times 5^? \times 7^? \times 13^?$

4. $\left(\dfrac{11^4 \times 3^2}{2^3 \times 5}\right)^3 = 2^? \times 3^? \times 5^? \times 11^?$

5. $3^6 \times (2 \times 3)^5 = 2^? \times 3^?$

6. $4^3 \times 7^5 \times 2^7 = 2^? \times 7^?$

7. $\dfrac{3^2 \times 15^3}{2^4 \times 7^3} = 2^? \times 3^? \times 5^? \times 7^?$

8. $\left(\dfrac{13^2 \times 5^4}{2^7 \times 5^8}\right)^3 = 2^? \times 5^? \times 13^?$

EXERCICE 31 **5 minutes**

1. Quelle est l'écriture décimale du nombre $A = \dfrac{10^5 + 1}{10^5}$?

2. Antoine utilise sa calculatrice pour calculer le nombre A. Le résultat affiché est 1. Antoine pense que ce résultat n'est pas exact. A-t-il raison ?

EXERCICE 32 **10 minutes**

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 7 476 puis de 6 300.

2. En déduire, sans calculatrice, la forme irréductible de $A = \dfrac{7\,476}{6\,300}$.

EXERCICE 33 **10 minutes**

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 448 035 puis de 1 131 690.

2. En déduire, sans calculatrice, la forme irréductible de $A = \dfrac{448\,035}{1\,131\,690}$.

EXERCICE 34 **5 minutes**

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.

1. $A = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

2. $B = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

3. $C = 625 \times 512$

4. $D = \dfrac{25}{16}$

EXERCICE 35 **10 minutes**

Dans chaque cas, décomposer en produit de facteurs premiers le numérateur et le dénominateur puis simplifier au maximum la fraction.

1. $\frac{40}{15}$ **2.** $\frac{48}{56}$ **3.** $\frac{56}{63}$ **4.** $\frac{63}{48}$ **5.** $\frac{180}{108}$ **6.** $\frac{650}{800}$ **7.** $\frac{204}{595}$ **8.** $\frac{2\,261}{323}$

EXERCICE 36 **10 minutes**

Ecrire sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs.

1. $5^3 \times 5^6 \times 5^{-15}$

2. $-2 \times (-2)^{-3} \times (-2)^5$

3. $2,5^{-3} \times 4,4^{-3}$

4. $\frac{7^8}{2^8} \times \left(5,6^{-4}\right)^{-2}$

5. $\frac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

6. $\frac{60 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{30 \times 10^2 \times 24 \times 10^{-5}}$

7. $\frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times \left(10^{-3}\right)^4}{0,2 \times 10^{-7} \times 18}$

EXERCICE 37 **5 minutes**

1. Déterminer le PGCD de 238 et 170 par la méthode de votre choix.

2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{170}{238}$.

EXERCICE 38 **5 minutes**

Donner l'écriture décimale, puis l'écriture scientifique des nombres suivants :

1. $A = \frac{4 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2}$ **2.** $B = \frac{3 \times 10^5 \times 4 \times \left(10^{-3}\right)^2}{16 \times 10^{-4}}$ **3.** $C = \frac{25 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^2}$

EXERCICE 39 **5 minutes**

1. Calculer le nombre A ci-dessous et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\text{A} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{3}}.$$

2. Donner l'écriture scientifique de B :

$$\text{B} = \frac{81 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{18 \times 10^{-2}}.$$

EXERCICE 40 **5 minutes**

1. Soit le nombre $\text{A} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5} \times \frac{10}{4}$.

Calculer A. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible, puis on donnera sa valeur décimale.

2. Soit le nombre $B = \dfrac{3 \times 10^{-4} \times 5 \times \left(10^{2}\right)^{6}}{25 \times 10^{-2}}$.
Calculer B. On donnera le résultat sous la forme d'une écriture scientifique.

EXERCICE 41 **5 minutes**

Trois points A, B et C d'une droite graduée ont respectivement pour abscisse : $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{5}{12}$.
Ces trois points sont-ils régulièrement espacés sur la droite graduée ? Justifier la réponse.

EXERCICE 42 **5 minutes**

Soit $E = \dfrac{2}{3} + \dfrac{17}{2} \times \dfrac{4}{3}$

1. Exprimer E sous forme d'une fraction irréductible.
2. On donne $F = \left(10^{-1} + a\right) \times 10^{2}$. Calculer le nombre a pour que l'égalité E = F soit vraie.

EXERCICE 43 **10 minutes**

1. On pose $A = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4}$; $B = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{4}$ et $C = \dfrac{A}{B}$.

Ecrire le nombre C sous la forme d'une fraction irréductible.

2. On pose $D = \left(2^{3}\right)^{2}$; $E = 4^{5} \times 3^{5}$; $F = \dfrac{5^{26}}{5^{17}}$.
Ecrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier chacun des nombres D, E et F.

EXERCICE 44 **5 minutes**

1. Ecrire A sous forme d'une fraction irréductible : $A = \dfrac{\dfrac{4}{3} - 1}{\dfrac{7}{6} - 2}$.

2. On donne : $B = \dfrac{4 \times 10^{-2} \times 9 \times 10^{6}}{6 \times 10^{7} \times 10^{2} \times \left(10^{3}\right)^{2}}$.
Donner l'écriture scientifique de B.

EXERCICE 45 **5 minutes**

On considère les trois nombres A, B et C :
$A = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{5}$ $B = \dfrac{7}{4} \div \dfrac{21}{9}$ $C = -2 \times \left(60 - 5 \times 4^{2}\right) - (8 - 15)$

1. Calculer A et B et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer C

EXERCICE 46 **10 minutes**

1. Donner l'écriture scientifique du nombre : $A = \dfrac{500 \times \left(10^{-3}\right)^{2} \times 2,4 \times 10^{7}}{8 \times 10^{-4}}$.
2. **a.** Calculer le PGCD de 854 et de 1 610.
b. Donner la fraction irréductible égale à $\dfrac{854}{1\,610}$.

EXERCICE 47 **10 minutes**

On appelle développement décimal d'un nombre une façon de l'écrire à l'aide de puissances de 10.
Par exemple, le développement décimal du nombre 13,675 est :
$13{,}675 = 1\times10^1 + 3\times10^0 + 6\times10^{-1} + 7\times10^{-2} + 5\times10^{-3}$.

1. Donner le développement décimal de : $17{,}2$; $1053{,}42$; $0{,}003$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{112}{25}$.

2. A quels nombres sont égaux les développements décimaux suivants :

a. $A = 2\times10^3 + 3\times10^1 + 4\times10^0 + 9\times10^{-3}$
b. $B = 4\times10^5 + 1\times10^2 + 1\times10^1 + 9\times10^{-1}$
c. $C = 9\times10^2 + 3\times10^1 + 4\times10^0 + 3\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$.

EXERCICE 48 **10 minutes**

1. Donner le développement décimal de : 2022 ; $987{,}65$; $0{,}9002$; $\dfrac{25}{40}$; $\dfrac{2022}{25}$.

2. A quels nombres sont égaux les développements décimaux suivants :

a. $A = 9\times10^6 + 9\times10^3 + 9\times10^1 + 9\times10^{-3}$
b. $B = 1\times10^5 + 1\times10^4 + 1\times10^3 + 1\times10^2 + 1\times10^1 + 1\times10^0 + 1\times10^{-1} + 1\times10^{-2}$
c. $C = 1\times10^2 + 2\times10^1 + 3\times10^0 + 2\times10^{-1} + 1\times10^{-2}$.

EXERCICE 49 **5 minutes**

Voici les distances (en km) qui séparent le Soleil de trois planètes du système solaire :

Vénus : 105×10^6 Mars : $2\,250\times10^5$ Terre : $1{,}5\times10^8$

Parmi ces trois planètes, quelle est celle qui est la plus éloignée du Soleil ? Justifier la réponse.

1.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 50 **5 minutes**

Démontrer que le nombre rationnel $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

EXERCICE 51 **10 minutes**

Démontrer que si n est un entier naturel alors $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

EXERCICE 52 **10 minutes**

1. Calculer $A = \dfrac{8+3\times4}{1+2\times1{,}5}$.

2. Pour calculer A un élève a tapé sur sa calculatrice la succession de touches ci-dessous :

$\boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

Expliquer pourquoi il n'obtient pas le bon résultat.

EXERCICE 53 **10 minutes**

Sachant que $a = \dfrac{-2}{21}$ et $b = \dfrac{5}{-7}$, calculer $\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{b}{a}$; $a \times b$; $a + b$ et $a - b$.
Donner les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

EXERCICE 54 **15 minutes**

Un rappel pour débuter : le tableau de conversion.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
											2	3	5	7						

2,357 m^3 = 2357 dm^3 = 2357 L ; 1 dm^3 = 1000 cm^3 ; 1 m^3 = 1000 L ; 1 cm^3 = 1 mL

Le volume V d'un tonneau est donné par $V = \pi L\left[\dfrac{d}{2} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{D}{2} - \dfrac{d}{2}\right)\right]^2$.

1. On donne $L = 1,60$ m ; $d = 0,85$ m ; $D = 1,34$ m.
   Calculer le volume de ce tonneau en m^3 puis donner la valeur approchée à $0,001 m^3$ par excès, et enfin en litres, à 1 litre près par excès.
2. Un viticulteur décide d'utiliser ce tonneau pour faire fermenter son raisin. Combien de bouteilles de 75 cL pourra-t-il remplir pour commercialiser son vin ?

EXERCICE 55 **10 minutes**

Soit l'expression numérique $A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$.

1. Donner l'écriture décimale de A.
2. Donner l'écriture scientifique de A.
3. Ecrire A sous la forme d'un produit d'un nombre entier par une puissance de 10.
4. Ecrire A sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction irréductible inférieur à 1.

EXERCICE 56 **10 minutes**

1. Comment, sans calcul, peut-on justifier que la fraction $\dfrac{1848}{2040}$ n'est pas irréductible ?
2. Calculer le PGCD des nombres 1848 et 2040.
3. Simplifier la fraction $\dfrac{1848}{2040}$ pour la rendre irréductible.

EXERCICE 57 **15 minutes**

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

1. $\dfrac{3}{25}$ est un nombre décimal.
2. Les nombres 570 et 795 sont premiers entre eux.
3. La somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5.
4. Ariane affirme que 2^{40} est le double de 2^{39}.
5. Loïc affirme que le PGCD d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours égal à 1.

EXERCICE 58 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
Question 1	Les diviseurs communs à 30 et 42 sont :	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 et 7.	1 ; 2 ; 3 et 6.	1 ; 2 ; 3 ; 5 et 7
Question 2	$\dfrac{\left(10^{-3}\right)^2 \times 10^4}{10^{-5}}$ est égal à	10^{-7}	10^{-15}	10^3
Question 3	Que vaut $5^n \times 5^m$?	5^{nm}	5^{n+m}	25^{n+m}
Question 4	A quelle autre expression le nombre $\dfrac{7}{3} - \dfrac{4}{3} \div \dfrac{5}{2}$ est-il égal ?	$\dfrac{3}{3} \div \dfrac{5}{2}$	$\dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5}$	$\dfrac{27}{15}$

EXERCICE 59 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
Question 1	Quels sont les nombres premiers entre eux ?	774 et 338	63 et 44	1 035 et 774
Question 2	Quel nombre est en écriture scientifique ?	$17,3 \times 10^{-3}$	$0,97 \times 10^7$	$1,52 \times 10^3$
Question 3	$3^{-2} \times 3^3 - 3 =$	0	3^0	3^{-5}
Question 4	$\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3} \times \dfrac{27}{24} =$	0	$\dfrac{5}{3}$	$-\dfrac{1}{6}$
Question 5	$\dfrac{6 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}} =$	12×10^{-9}	$0,12$	12×10^4

EXERCICE 60 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

		A	B	C	D
Question 1	$\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$ est égal à :	$\frac{2}{15}$	$0,277$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{15}$
Question 2	Quelle est la notation scientifique de $\left(4\times 10^{-3}\right)^2$?	$1,6\times 10^{-5}$	8×10^{-3}	6×10^{-1}	4×10^{6}
Question 3	$\frac{12}{25}\times\frac{7}{10}$	$\frac{19}{35}$	$\frac{41}{125}$	$\frac{84}{250}$	$\frac{175}{250}$
Question 4	Quelle est la notation scientifique de $\left(3\times 10^{-2}\right)^3\times 5\times 10^4$?	$4,5\times 10^{7}$	$1,35\times 10^{-4}$	$4,5\times 10^{12}$	$1,35\times 10^{-2}$

EXERCICE 61 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$\frac{3}{2}+\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{29}{10}$
$\frac{10^5}{10^2}$	10^3	10^7	10^{-3}
$\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\div\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{26}{3}$	$-\frac{20}{3}$
$\left(10^5\right)^2$	10^7	10^3	10^{10}

EXERCICE 62 **10 minutes**

Un nombre possède un développement décimal illimité périodique lorsque son développement décimal est illimité et qu'une séquence de nombres se répère.

Par exemple $\frac{13}{7}=1,857142857142\ldots$

La période est 857142 et on note : $\frac{13}{7}=1,\overline{857142}$.

1. Quelle est la période des rationnels $\frac{1}{3}$, $\frac{83}{70}$ et $\frac{12}{13}$.

2. Soit $A=27,\overline{27}$.

  a. Calculer $100\times A$.

b. En déduire la valeur exacte de $99 \times A$.
c. Démontrer que A est un nombre rationnel.

EXERCICE 63 **10 minutes**

Soit $A = 3,45\overline{678}$.

1. Calculer $100 \times A$ et $100\,000 \times A$.
2. En déduire la valeur exacte de $99\,900 \times A$.
3. Démontrer que A est un nombre rationnel.

EXERCICE 64 **10 minutes**

En utilisant la méthode des deux exercices précédents, écrire sous fractionnaire les nombres suivants : $A = 0,\overline{6}$ $\quad B = 4,152\overline{45}$ $\quad C = 9,\overline{7531}$

1.3 Nombres réels

1.3.1 Point de cours

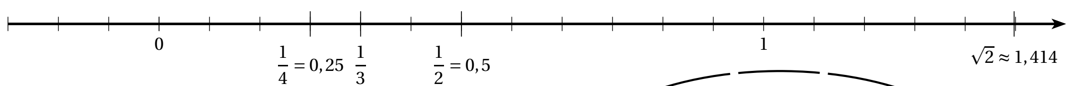
Définition 1 : la **racine carrée d'un nombre positif** a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Propriété 1 : pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$.

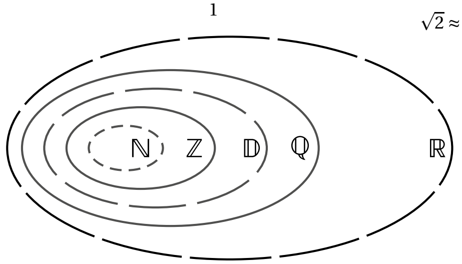
Propriété 2 : soient a et b deux réels positifs.

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$.

Définition 2 : soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.
L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle l'**ensemble des nombres réels** et se note $\mathbb{R}$. Un tel axe est appelé **droite des réels**.



Tout nombre rationnel est un nombre réel.
On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



1.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 65 **5 minutes**

Placer les nombres réels suivants sur la droite numérique : $1,2$; $-0,8$; $2,7$; $-3,15$; $-1,8$; $3,15$; $-2,5$ et $0,8$.

EXERCICE 66 **5 minutes**

Parmi les nombres réels suivants citer tous ceux appartenant à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{D}$, à $\mathbb{Q}$:
$-10;\ 2,03;\ \sqrt{5};\ -\dfrac{2}{3};\ \sqrt{9};\ \dfrac{1}{5};\ -\sqrt{121};\ \pi;\ 14;\ \dfrac{1}{6}.$

EXERCICE 67 **5 minutes**

1. Calculer les expressions suivantes :
$A = 8^2$ $C = 12^2$ $E = 9^2$
$B = 6^2$ $D = 10^2$ $F = 3^2$

2. Simplifier les racines suivantes :

- $\sqrt{16}$ • $\sqrt{49}$ • $\sqrt{121}$ • $\sqrt{81}$ • $\sqrt{169}$ • $\sqrt{256}$.

EXERCICE 68 **5 minutes**

1. Décomposer les nombres suivants en produit de deux entiers naturels dont l'un est le plus grand carré parfait possible.
$A = 8$ $C = 125$ $E = 128$
$B = 72$ $D = 48$ $F = 363$

2. En déduire, pour chaque racine, une écriture de la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels, a étant le plus grand entier possible.

- $\sqrt{8}$ • $\sqrt{72}$ • $\sqrt{125}$ • $\sqrt{48}$ • $\sqrt{128}$ • $\sqrt{363}$.

EXERCICE 69 **5 minutes**

Exprimer les quotients suivants de sorte à ne pas laisser de radical au dénominateur :

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ • $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ • $\dfrac{3}{\sqrt{12}}$ • $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ • $\dfrac{3}{2\sqrt{13}}$ • $\dfrac{7}{\sqrt{14}}$

EXERCICE 70 **5 minutes**

Exprimer les quantités suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers, a étant le plus grand possible.

1. $A = \sqrt{14} \times \sqrt{2}$

2. $B = \sqrt{18} \times \sqrt{6}$

3. $C = \sqrt{3} \times \sqrt{15}$

4. $D = \sqrt{45} \times \sqrt{35}$

EXERCICE 71 **5 minutes**

Exprimer les quantités suivantes sous la forme $\dfrac{a}{c}\sqrt{b}$ avec a, b et c des entiers, b étant le plus petit possible.

1. $A = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ **2.** $B = \dfrac{\sqrt{10}}{46} \times \dfrac{23}{\sqrt{5}}$ **3.** $C = \dfrac{\sqrt{240}}{\sqrt{75}}$ **4.** $D = \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}} \times \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}}$

EXERCICE 72 **5 minutes**

1. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{6}$, avec a entier naturel : $\sqrt{96}$, $\sqrt{150}$.
2. En déduire une expression simplifiée de $A = \sqrt{96} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{150}$.

EXERCICE 73 **5 minutes**

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} des nombres suivants : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

EXERCICE 74 **5 minutes**

1. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} des nombres suivants : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$.
2. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-3} de $A = \sqrt{8}$ et $B = \sqrt{14}$.

1.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 75 **10 minutes**

Soit a et b deux réels positifs. Démontrer que :

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. Pour $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

EXERCICE 76 **10 minutes**

Soit a et b deux réels positifs. Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

EXERCICE 77 **10 minutes**

Démontrer que le réel $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 78 **5 minutes**

1. Ecrire chacun des trois nombres $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$ et $\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec dans chaque cas a et b entiers et a entier le plus grand possible.
2. Soit $A = 4\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{75}$. Donner une écriture simplifiée de A.

EXERCICE 79 **5 minutes**

Soient $A = 2\sqrt{180} + 5\sqrt{80} - 3\sqrt{125}$ et $B = \sqrt{500} + 7\sqrt{20} - 6\sqrt{45}$.
Ecrire A et B sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier.

EXERCICE 80 **5 minutes**

Soient $A = \sqrt{75} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48}$ et $B = -3\sqrt{27} + \sqrt{75} - 2\sqrt{108}$.
Ecrire A et B sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un nombre entier.

EXERCICE 81 **5 minutes**

Soient $A = 2\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 3\sqrt{200}$ et $B = 2\sqrt{128} - 3\sqrt{162} + 2\sqrt{98}$.
Ecrire A et B sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un nombre entier.

EXERCICE 82 **10 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sqrt{396}-\sqrt{539}+\sqrt{704}-\sqrt{275}+\sqrt{176}-\sqrt{891}$

$B=\sqrt{252}-\sqrt{45}+\sqrt{175}-\sqrt{125}+\sqrt{63}-\sqrt{320}$.

EXERCICE 83 **10 minutes**

Simplifier les racines suivantes :

- $\sqrt{48+16}$
- $\sqrt{48\times 16}$
- $\sqrt{34-33}$
- $\sqrt{13^2-12^2}$
- $\sqrt{13^2}-\sqrt{12^2}$
- $\sqrt{13^2}\times\left(\sqrt{144}-\sqrt{36}\right)$
- $-\sqrt{30}\times\left(\sqrt{6}+\sqrt{54}\right)$
- $\left(\sqrt{14}\right)^2-2\sqrt{36}$
- $\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{12+13}$.

EXERCICE 84 **10 minutes**

Simplifier les racines suivantes :

- $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\times 2\sqrt{6}$
- $\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{54}\right)$
- $\left(-3\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2$
- $\left(5\sqrt{5}\right)^2-\left(-2\sqrt{2}\right)^2$
- $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\times\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)$
- $\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)\times\left(\sqrt{24}-\sqrt{2}\right)$.

EXERCICE 85 **10 minutes**

Simplifier les racines suivantes :

- $2\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}$
- $2\sqrt{5}\times 4\sqrt{15}$
- $\sqrt{5}\times 2\sqrt{45}$
- $6\sqrt{12}\times\sqrt{3}$
- $2\sqrt{6}\times\sqrt{42}$
- $2\sqrt{7}\times\sqrt{14}$
- $\dfrac{3\sqrt{20}}{\sqrt{10}}$
- $\dfrac{3}{\sqrt{27}}\times\sqrt{75}$
- $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{25}}$.

EXERCICE 86 **10 minutes**

Exprimer les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a et b entiers relatifs, c entier naturel le plus petit possible.

- $A=\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$
- $B=5\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}-7\sqrt{5}\right)$
- $C=\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\times\left(2\sqrt{5}+6\sqrt{2}\right)$
- $D=\left(3\sqrt{7}-7\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}+2\sqrt{7}\right)$.

EXERCICE 87 **10 minutes**

Exprimer les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a et b entiers relatifs, c entier naturel le plus petit possible.

- $A=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$
- $B=\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)^2$
- $C=\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$
- $D=\left(3\sqrt{7}-7\sqrt{3}\right)^2$.

EXERCICE 88 **10 minutes**

Développer et écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

$A=\left(4+5\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}+3\right)\times\left(3\sqrt{2}+7\right)$

$B=\left(3-2\sqrt{5}\right)^2+\left(3\sqrt{5}+1\right)\times\left(5\sqrt{5}-3\right)$.

EXERCICE 89 **15 minutes**

Sans calculatrice, donner la valeur exacte des expressions suivantes :

$$A=\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}} \qquad B=\sqrt{5\times\sqrt{5\times\sqrt{5\times\sqrt{5^2}}}}$$

$$C=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}} \qquad D=\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$$

EXERCICE 90 **15 minutes**

1. Soit a et b deux réels, calculer $(a+b)\times(a-b)$.

2. En déduire la valeur des expressions suivantes :
- $\left(\sqrt{5}-1\right)\times\left(\sqrt{5}+1\right)$
- $\left(2-\sqrt{3}\right)\times\left(2+\sqrt{3}\right)$
- $\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$
- $\left(\sqrt{2}-3\right)\times\left(\sqrt{2}+3\right)$
- $\left(5-\sqrt{6}\right)\times\left(5+\sqrt{6}\right)$
- $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\times\left(2\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$

EXERCICE 91 **15 minutes**

Soit a, b et c trois réels, b étant positif, $A=\dfrac{c}{a-\sqrt{b}}$ et $B=\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}$.

1. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $a+\sqrt{b}$, vérifier que $A=\dfrac{a\times c+c\times\sqrt{b}}{a^2-b}$.

☞ $a-\sqrt{b}$ est « l'expression conjuguée » de $a+\sqrt{b}$.

2. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $a-\sqrt{b}$, vérifier que $B=\dfrac{a\times c-c\times\sqrt{b}}{a^2-b}$.

3. En utilisant les résultats précédents, écrire sans racines carrées au dénominateur, les nombres suivants :

$$C=\frac{1}{1-\sqrt{5}} \qquad D=\frac{3}{2+\sqrt{6}} \qquad E=\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

EXERCICE 92 **15 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, écrire sans racines carrées au dénominateur, les nombres suivants :

- $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$
- $\dfrac{3}{1-\sqrt{3}}$
- $\dfrac{2}{4+\sqrt{5}}$
- $\dfrac{5}{5-\sqrt{3}}$
- $\dfrac{-7}{\sqrt{10}-5}$
- $\dfrac{-2}{\sqrt{3}-8}$.

EXERCICE 93 **15 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, écrire sans racines carrées au dénominateur, les nombres suivants :

- $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$
- $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
- $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$
- $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-5}$
- $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

EXERCICE 94 **15 minutes**

Soit $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce nombre est connu sous le nom de « nombre d'or ».

1. Calculer φ^2.

2. Démontrer que $\varphi^2=\varphi+1$.

3. Démontrer que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

4. Vérifier que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.

EXERCICE 95 **10 minutes**

Un carré est magique lorsqu'on retrouve la même somme sur les lignes, les colonnes et les diagonales.
Compléter les carrés suivants pour qu'ils soient magiques.

	$\sqrt{162}$	$\sqrt{8}$
	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{128}$		

	$\sqrt{3}$	$\sqrt{192}$
	$\sqrt{75}$	
	$\sqrt{243}$	

EXERCICE 96 **10 minutes**

Un carré est multi-magique lorsqu'on retrouve le même produit sur les lignes, les colonnes et les diagonales.

1. Le carré suivant est-il multi-magique ?

1	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{35}$
$\sqrt{10}$	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	3
$\sqrt{21}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}$	2
6	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{6}$

2. Compléter le carré suivant pour qu'il soit multi-magique.

$16\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
		16

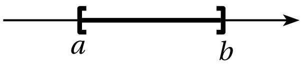
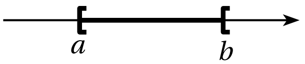
1.4 Intervalles

1.4.1 Point de cours

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

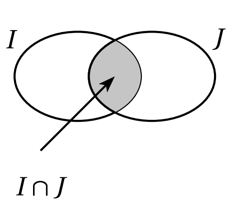
Notations : soient a et b deux nombres, I un ensemble.
$a \leqslant b$ est une inégalité large, elle se lit « a inférieur ou égal à b ».
$a < b$ est une inégalité stricte, elle se lit « a strictement inférieur à b ».
$a \in I$ se lit « a appartient à I ».
$a \notin I$ se lit « a n'appartient pas à I ».

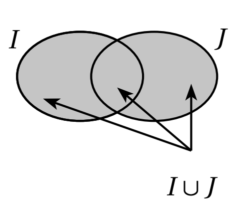
Les quatre écritures suivantes sont équivalentes :

Langage naturel	Intervalle	Inégalité	Représentation (en gras) :
x est compris entre a et b	$[\,a\,;\,b\,]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
x est supérieur ou égal à a et strictement inférieur à b	$[\,a\,;\,b\,[$	$a \leqslant x < b$	
x est strictement supérieur à a et inférieur ou égal à b	$]\,a\,;\,b\,]$	$a < x \leqslant b$	
x est strictement compris entre a et b	$]\,a\,;\,b\,[$	$a < x < b$	
x est supérieur ou égal à a	$[\,a\,;\,+\infty\,[$	$x \geqslant a$	
x est strictement supérieur à a	$]\,a\,;\,+\infty\,[$	$x > a$	
x est inférieur ou égal à a	$]\,-\infty\,;\,a\,]$	$x \leqslant a$	
x est strictement inférieur à a	$]\,-\infty\,;\,a\,[$	$x < a$	

a et b sont appelés les **bornes** de l'intervalle.
Le sens des crochets indique si la borne de l'intervalle appartient ou non à l'intervalle.
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Intersection - Réunion d'intervalles
Soient I et J deux ensembles.
• L'**intersection de** I **et** J, notée $I \cap J$ (on lit « I inter J »), est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I **et** à J.
• La **réunion de** I **et** J, notée $I \cup J$ (on lit « I union J »), est l'ensemble des éléments appartenant à I **ou** à J, c'est-à-dire à au moins un des deux.





1.4.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 97 **5 minutes**

Compléter avec le symbole $\in$ ou $\notin$:

- $1,5 \cdots [0\,;\,5]$
- $6 \cdots \left]\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$
- $\frac{24}{6} \cdots [6\,;\,24]$
- $1,33 \cdots \left[\frac{4}{3}\,;\,10\right]$
- $\sqrt{2} \cdots [1,4\,;\,24]$
- $\pi \cdots]0\,;\,3,14]$
- $\frac{1}{6} \cdots \left[\frac{1}{8}\,;\,\frac{1}{4}\right]$
- $-\frac{1}{3} \cdots]-0,3\,;\,0,3[$

EXERCICE 98 **5 minutes**

Sans calculatrice, dire si $\frac{2}{3}$ appartient aux intervalles suivantes :

- $\left[0\,;\,\frac{4}{5}\right]$
- $\left[\frac{3}{5}\,;\,1\right]$
- $\left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{5}\right]$
- $\left]-1\,;\,\frac{7}{9}\right[$

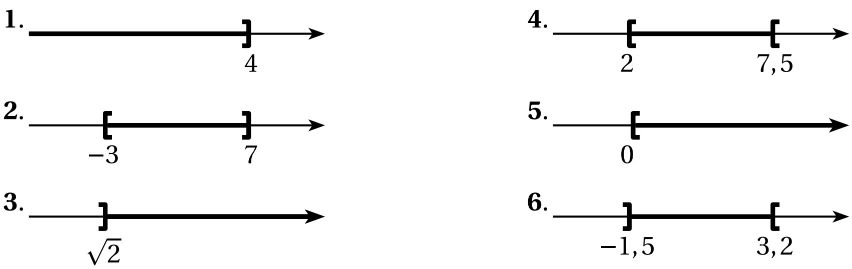
EXERCICE 99 **5 minutes**

Représenter sur l'axe des réels, puis sous forme d'un intervalle, l'ensemble des x vérifiant les conditions données :

1. x est strictement inférieur à 3.
2. x est supérieur à -1.
3. x est compris entre -2 et 5.
4. x est strictement inférieur à 0.
5. x est compris strictement entre 2 et 7.
6. x est inférieur à 3.
7. x est supérieur à -1 et strictement inférieur à 6.

EXERCICE 100 **5 minutes**

Décrire par une phrase, puis sous forme d'un intervalle, les ensembles représentés ci-dessous :



EXERCICE 101 **5 minutes**

Représenter sur l'axe des réels, puis sous forme d'intervalles, l'ensemble des x vérifiant les conditions :

1. $2 \leqslant x < 4$
2. $2 < x \leqslant 4$
3. $2 \leqslant x \leqslant 4$
4. $x > -3$
5. $x \leqslant -3$
6. $x \geqslant -3$
7. $x < -3$
8. $4 > x > 2$
9. $-7 \geqslant x$

EXERCICE 102 **5 minutes**

Ecrire sous forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles, l'ensemble des x vérifiant les conditions :

1. $x \leqslant 3$ et $x \geqslant 2$

2. $x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 3$

3. $x < 8$ et $x \geqslant -1$

4. $x < 8$ ou $x \geqslant -1$

5. $x \leqslant 4$ ou $x \geqslant 6$

6. $x \geqslant 4$ et $x \leqslant 6$

EXERCICE 103 **5 minutes**

Simplifier, lorsque c'est possible, l'écriture des ensembles suivants :

1. $[-2\ ;\ 3] \cap [1\ ;\ 5]$

2. $[-2\ ;\ 3] \cup [1\ ;\ 5]$

3. $]-\infty\ ;\ 5] \cap [5\ ;\ +\infty]$

4. $]-\infty\ ;\ 5] \cup [5\ ;\ +\infty]$

5. $[-5\ ;\ 0] \cap]3\ ;\ +\infty[$

6. $[-5\ ;\ 0] \cup]3\ ;\ +\infty[$

1.4.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 104 **10 minutes**

Les propositions conditionnelles suivantes sont-elles vraies ?

1. Si $x \leqslant \dfrac{1}{3}$ alors $x \leqslant 0,3$

2. Si $x \in \left[\dfrac{2}{3};3\right]$ alors $x \in [0,7;2]$

3. Si $x > \sqrt{2}$ alors $x > 1,4$

4. Si $x \in \left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ alors $x \in [0;1]$

5. Si $x < \sqrt{2}$ alors $x \leqslant \sqrt{2}$

6. Si $x \in [0;1]$ alors $x \in \left[\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right]$.

EXERCICE 105 **10 minutes**

Déterminer deux intervalles A et B sachant que :

1. $A \cap B = [14\ ;\ 18]$ et $A \cup B = [5\ ;\ 20]$

2. $A \cap B =]-2\ ;\ 7]$ et $A \cup B = [-2\ ;\ 10[$

3. $A \cap B = [1\ ;\ 2[$ et $A \cup B =]-3\ ;\ 5[$

EXERCICE 106 **15 minutes**

Ecrire sous forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles, l'ensemble des x vérifiant les conditions :

1. $(x \leqslant 4$ ou $x \geqslant 6)$ et $x < 0$

2. $(x \geqslant 4$ et $x \leqslant 6)$ ou $x < 0$

3. $(x \geqslant 2$ ou $x \leqslant 1)$ et $x \geqslant 0$

4. $(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 1)$ et $x \geqslant 0$

5. $(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 4)$ ou $(x \geqslant 0$ et $x \leqslant 3)$

6. $(x \geqslant 2$ ou $x \leqslant 4)$ et $(x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 3)$

7. $(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 4)$ et $(x \geqslant 0$ et $x \leqslant 3)$

8. $(x \geqslant 2$ ou $x \leqslant 4)$ ou $(x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 3)$

EXERCICE 107 **10 minutes**

Soit $A = [-5\ ;\ 5]$ et $B =]1\ ;\ 50[$.

Pour chaque nombre, dire s'il appartient à A, à B, à $A \cap B$, à $A \cup B$.

• -9 • -3 • 1 • 0 • 5 • 49 • 60

1.5 Valeur absolue d'un nombre réel

1.5.1 Point de cours

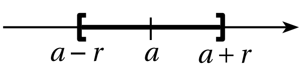
Définition 1 : on appelle **distance** entre deux réels x et y, la distance sur la droite des réels entre les points d'abscisses x et y : on la note $d(x,y)$.

Définition 2 : on appelle **valeur absolue** d'un réel x, et on note $|x|$, la distance de x à zéro.
On a indifféremment :
• $|x| = d(x,0)$
• $|x|$ est le nombre positif parmi x et $-x$
• $|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ si x est négatif.

Théorème : quels que soient les réels x et y, on a $d(x,y) = \left|y-x\right|$.

Inégalités : soit un réel x, les énoncés suivants ont la même signification :
• $|x-a| \leqslant r$ (en termes de **valeur absolue**)
• $d(a,x) \leqslant r$ (en termes de **distance**)
• $x \in [a-r\ ;\ a+r]$ (en termes d'**intervalle**)
• $a-r \leqslant x \leqslant a+r$ (en termes d'**encadrement**)

par une **représentation graphique** :



Egalités : soit un réel x, les énoncés suivants ont la même signification :
• $|x-a| = r$ • $d(a,x) = r$ • $x = a-r$ ou $x = a+r$.

Définitions 3 : soient a et x deux réels et ϵ un réel **strictement positif**.
• On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) de x à ϵ près (ou à la précision ϵ) lorsque $|x-a| \leqslant \epsilon$.
• a est une valeur **approchée par défaut** de x à ϵ près, lorsque $a \leqslant x \leqslant a+\epsilon$.
• a est une valeur **approchée par excès** de x à ϵ près, lorsque $a-\epsilon \leqslant x \leqslant a$.

1.5.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 108 **5 minutes**

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

$A = |-3]$ $C = |7-9]$ $E = \left|1-\sqrt{2}\right]$ $G = \left|\sqrt{5}-\sqrt{6}\right]$

$B = |6| -$ $D = \left|\sqrt{2}-1\right| -$ $F = \left|-\dfrac{25}{3}\right|$ $H = \left|\dfrac{5}{3}\right|$

EXERCICE 109 **5 minutes**

Sans calculatrice, écrire les expressions suivantes sans valeur absolue :

• $|5-\pi|$ • $|\pi-3|$ • $\left|2-\dfrac{9}{2}\right|$ • $|-3-6|$

• $|2+3|$ • $\left|1-\dfrac{2}{3}\right|$ • $\left|3+\dfrac{1}{2}\right|$ • $\left|\dfrac{1}{2}-5\right|$

EXERCICE 110 **5 minutes**

Ecrire sous forme d'intervalle les expressions suivantes :

- $|x| \leqslant 1$
- $|x-3| \leqslant 2$
- $|x-8| \leqslant 3$
- $|x-2,5| \leqslant 5$.

EXERCICE 111 **5 minutes**

Ecrire en terme de valeur absolue les intervalles suivants :

- $x \in [-4\,;\,4]$
- $x \in [0\,;\,4]$
- $x \in [1\,;\,5]$
- $x \in [0\,;\,1,2]$.

EXERCICE 112 **10 minutes**

Soient les points M d'abscisse x et A d'abscisse a, r un réel positif tel que la distance sur la droite des réels entre les points A et M est égale à r.

Dans chacun des cas suivants traduire l'énoncé sous forme d'une valeur absolue, puis sans valeur absolue :

1. $a=0$ et $r=3$
2. $a=2$ et $r=1,2$
3. $a=-\dfrac{1}{3}$ et $r=1$
4. $a=\sqrt{3}$ et $r=0,1$
5. $a=-2$ et $r=0,2$
6. $a=\dfrac{3}{5}$ et $r=\dfrac{1}{3}$
7. $a=0$ et $r=\sqrt{3}$
8. $a=-\sqrt{2}$ et $r=\sqrt{2}$
9. $a=-\dfrac{9}{5}$ et $r=\dfrac{1}{100}$

EXERCICE 113 **10 minutes**

Soient les points M d'abscisse x et A d'abscisse a, r un réel positif tel que la distance sur la droite des réels entre les points A et M est inférieure ou égale à r.

Dans chacun des cas suivants traduire l'énoncé sous forme d'une valeur absolue, puis sous forme d'inégalités et enfin sous forme d'intervalles :

1. $a=0$ et $r=3$
2. $a=2$ et $r=1,2$
3. $a=-\dfrac{1}{3}$ et $r=1$
4. $a=\sqrt{3}$ et $r=0,1$
5. $a=-2$ et $r=0,2$
6. $a=\dfrac{3}{5}$ et $r=\dfrac{1}{3}$
7. $a=0$ et $r=\sqrt{3}$
8. $a=-\sqrt{2}$ et $r=\sqrt{2}$
9. $a=-\dfrac{9}{5}$ et $r=\dfrac{1}{100}$

EXERCICE 114 **10 minutes**

Soient les points M d'abscisse x et A d'abscisse a, r un réel positif tel que la distance sur la droite des réels entre les points A et M est strictement supérieure à r.

Dans chacun des cas suivants traduire l'énoncé sous forme d'une valeur absolue, puis sans valeur absolue et enfin sous forme de réunion d'intervalles :

1. $a=0$ et $r=3$
2. $a=2$ et $r=1,2$
3. $a=-\dfrac{1}{3}$ et $r=1$
4. $a=\sqrt{3}$ et $r=0,1$
5. $a=-2$ et $r=0,2$
6. $a=\dfrac{3}{5}$ et $r=\dfrac{1}{3}$
7. $a=0$ et $r=\sqrt{3}$
8. $a=-\sqrt{2}$ et $r=\sqrt{2}$
9. $a=-\dfrac{9}{5}$ et $r=\dfrac{1}{100}$

EXERCICE 115 **10 minutes**

Les dimensions L et ℓ terrain rectangulaire, données avec une précision égale à 0,1 m sont respectivement égales à 160 m et 90 m.

1. Donner un encadrement de chacune des dimensions.
2. En déduire un encadrement du périmètre du terrain.
3. Donner un encadrement de l'aire, en m^2, du terrain, à l'aide de nombres entiers, puis une valeur approchée de cette aire ainsi que la valeur de la précision obtenue.

EXERCICE 116 **10 minutes**

Traduire à l'aide d'inégalités chacune des affirmations suivantes :

1. $1,78$ est une valeur approchée de x à la précision 10^{-2}.
2. $3,123$ est une valeur approchée de x à la précision 10^{-3}.
3. $-0,43$ est une valeur approchée de x à la précision $0,02$.
4. $0,55$ est une valeur approchée de x, **par défaut**, à 10^{-2} près.
5. $1,42$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, **par excès**, à 10^{-2} près.
6. $1,73$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$, **par excès**, à 10^{-2} près.

1.5.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 117 **10 minutes**

Ecrire une inégalité vérifiée par x utilisant une valeur absolue dans les cas suivants :

• $x \in [21\ ;\ 43]$ • $x \in [-2,8\ ;\ -1,6]$ • $x \in [0,815\ ;\ 2,019]$ • $x \in]3,5\ ;\ 7,3[$

EXERCICE 118 **15 minutes**

1. Que fait la fonction suivante?

```
def abs(x, y) :
    c = (x + y)/2
    r = (y − x)/2
    print("c = ", c, ", r = " , r)
```

2. Quel est le résultat de abs$(3,7)$?
3. Ecrire une fonction intervalle(c, r) qui prend en entrée deux paramètres : c le centre et r le rayon de l'intervalle et affiche l'intervalle.

EXERCICE 119 **15 minutes**

Déterminer l'ensemble des x tels que :

1. $|x-2| \leqslant 3$ et $|x-1| \leqslant 2$
2. $|x-2| \leqslant 3$ ou $|x-1| \leqslant 2$
3. $|x+1| \leqslant 2$ et $|x-3| < 5$
4. $|x-2| \leqslant 3$ et $|x| \geqslant 2$
5. $\left|x+\sqrt{2}\right| \leqslant 2\sqrt{2}$ ou $\left|x-\sqrt{2}\right| \leqslant \sqrt{2}$
6. $|x+0,5| \leqslant 1$ et $|x-0,5| \leqslant 1$

EXERCICE 120 **15 minutes**

Déterminer les réels x vérifiant les équations :

1. $|x-2| = |x-5|$
2. $|x+3| = |x-7|$
3. $|x-1| = |x+1|$
4. $|x-2| = |2x-6|$

EXERCICE 121 **15 minutes**

En utilisant une méthode géométrique, résoudre les équations suivantes :

1. $|x-2| + |x-5| = 8$
2. $|x-2| + |x-5| = 3$
3. $|x-1| + |x+1| = 5$
4. $|x-1| + |x+1| = 2$

EXERCICE 122 **15 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|2x+3|+|x-5| \leqslant -5$

2. $|2x+4| \leqslant 6$

3. $|3x+9| \geqslant 12$

4. $|5x-10| < 5$

EXERCICE 123 **5 minutes**

On sait que :

• $4,57$ est une valeur approchée de a par défaut à $0,01$ près;

• $4,59$ est une valeur approchée de b par excès à $0,01$ près.

A-t-on $a < b$?

EXERCICE 124 **20 minutes**

1. Démontrer que, pour tout $x \neq -1$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$

2. Démontrer que, pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$:

a. $0 \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$;

b. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 2$;

c. $0 \leqslant \dfrac{x^2}{1+x} \leqslant 2x^2$.

3. Déduire des résultats précédents que, pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $\dfrac{1}{1+x}$ à $2x^2$ près.

4. Donner, à l'aide de cette méthode, des valeurs approchées des nombres, en indiquant la précision.

a. $\dfrac{1}{1,003}$

b. $\dfrac{1}{0,9992}$

c. $\dfrac{1}{2,005}$.

1.6 Calcul littéral

1.6.1 Point de cours

Définition 1

• **Développer un produit**, c'est écrire ce produit sous la forme d'une somme.

• **Factoriser une somme**, c'est écrire cette somme sous la forme d'un produit.

Propriété 1 : pour tous réels a, b, c, d et k :

• $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$

• $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

☞ $(a+b) \times (c+d)$ est la forme factorisée

$a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ est la forme développée.

Remarque : lorsqu'on écrit le produit de deux lettres, une lettre et une parenthèse ou deux parenthèses le symbole de la multiplication est souvent omis.

Ainsi le produit entre a et b s'écrit indifféremment $a \times b$ ou $a \cdot b$ ou ab.

Propriété 2 : pour tous réels a et b, on a les **identités remarquables** suivantes :
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.6.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 125 **5 minutes**

Développer les expressions suivantes :

1. $A = 2(3x+6)$
2. $B = 5x(3-y)$
3. $C = -3(x-5)$
4. $D = -x(3-2x)$

EXERCICE 126 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = a(b-2) + b(2-a) + 2(a-b)$
2. $B = (a-b)(b-2) + (b-2)(2-a)$
3. $C = (2-a)(a-b) - (b-2)(a+2)$
4. $D = (a+b)(a-3) - (b-3)(a+3)$

EXERCICE 127 **5 minutes**

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (x-1)(x-2) + (x-2)(x-3)$
2. $B = (3x-1)(2-x) - (2x+3)(1-x)$
3. $C = \left(x^2 - y\right)(x+y) + xy(1-x)$
4. $D = (x-2)\left(x^2+3\right) - (x+2)\,x^2$

EXERCICE 128 **10 minutes**

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (x+1)^2$
2. $B = (x-1)^2$
3. $C = (2-y)^2$
4. $D = (x-2)(x+2)$

EXERCICE 129 **10 minutes**

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (2x+3)^2$
2. $B = (3x-2)^2$
3. $C = (2x+5)(2x-5)$
4. $D = (9x-2)(9x+2)$

EXERCICE 130 **10 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 2x + 2y$
2. $B = 9y - 9x$
3. $C = ab + 3b$
4. $D = 91x - 13y$

EXERCICE 131 **10 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (2a)^2 - 4ab$
2. $B = x^2y - xy^2$
3. $C = (2a+b)(2b-a) + (2b-a)(b+2a)$
4. $D = (x-2)(x+3) - 4(x-2)^2$

EXERCICE 132 **10 minutes**

Compléter les égalités par des entiers :

1. $(2x-\cdots)(x+\cdots) = \cdots x^2+5x-3$
2. $(x-2)(\cdots x+\cdots) = 2x^2-x-6$
3. $(x+\cdots)(\cdots x-4) = x^2-\cdots x-12$
4. $(2x+\cdots y)(\cdots x-3y) = 8x^2+\cdots xy-9y^2$

EXERCICE 133 **10 minutes**

En utilisant les égalités remarquables, factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2+6x+9$
2. $B = x^2-10x+25$
3. $C = x^2-81$
4. $D = 16-y^2$

EXERCICE 134 **5 minutes**

En utilisant les égalités remarquables, factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 4x^2+4x+1$
2. $B = 9x^2-12x+4$
3. $C = 9-6x+x^2$
4. $D = 25-36x^2$

EXERCICE 135 **5 minutes**

En utilisant les égalités remarquables, factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 169x^2-64$
2. $B = (2x-1)^2-(2-3x)^2$
3. $C = 9x^2-(x+3)^2$
4. $D = (x+1)^2-6(x+1)+9$

1.6.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 136 **10 minutes**

1. En développant chaque expression, démontrer que pour tous réels a et b, on a :
   - **a.** $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
   - **b.** $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
   - **c.** $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
2. En utilisant un carré de côté $a+b$, démontrer géométriquement que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

EXERCICE 137 **10 minutes**

Démontrer que pour tous réels a et b, on a :

1. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^2$
2. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
3. $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3-b^3$

EXERCICE 138 **10 minutes**

Démontrer que pour tous réels a et b, on a :

1. $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
2. $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
3. $(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) = a^4-b^4$

EXERCICE 139 **5 minutes**

En factorisant $n^3 - n$, démontrer que, quel que soit n entier, $n^3 - n$ est le produit de trois entiers consécutifs.

EXERCICE 140 **5 minutes**

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, le nombre $A = n(n-1)(n+1)+n$ est le cube d'un entier que l'on précisera.

EXERCICE 141 **15 minutes**

Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

2. $-x^2 + 2x - 1 = (1-x)^2$

3. $x^2 + 26x + 169$ est le carré de $-x - 13$

4. $122\,237\,958 \times 122\,237\,960 = 122\,237\,959^2 - 1$

EXERCICE 142 **10 minutes**

Démontrer les égalités suivantes :

1. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

2. $(x+1)^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2 + y^2\right)$

3. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

☞ Pour **démontrer** une égalité, on part du premier membre de l'égalité et en factorisant on retrouve le second membre (le résultat).

EXERCICE 143 **10 minutes**

Vérifier les égalités suivantes :

1. $x^2 - y^2 - 2y - 1 = (x+y+1)(x-y-1)$

2. $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = (xy+1)^2 + (y-x)^2$

3. $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) = (xy+1)^2 - (x+y)^2$.

☞ Pour **vérifier** une égalité, on part du second membre de l'égalité (le résultat) et en développant on retrouve le premier membre.
Vérifier $\neq$ démontrer !

EXERCICE 144 **10 minutes**

On considère l'expression suivante : $E(x) = (3x-5)^2 + (3x-5)(7x-4)$.

1. Développer, puis réduire $E(x)$.

2. Factoriser $E(x)$.

3. Calculer $E(x)$ pour $x = 0$, $x = 0{,}9$ et $x = \sqrt{3}$.

EXERCICE 145 **10 minutes**

On considère l'expression suivante : $E(x) = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7)$.

1. Développer, puis réduire $E(x)$.

2. Factoriser $E(x)$.

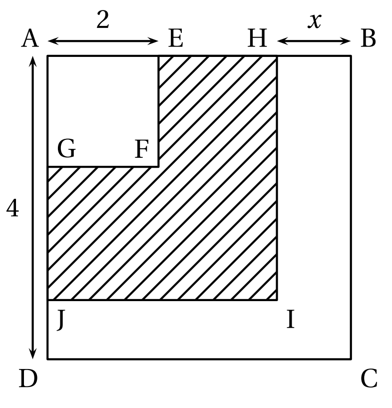
3. Calculer $E(x)$ pour $x = -\dfrac{2}{3}$, $x = 0$ et $x = 2{,}5$.

EXERCICE 146 **10 minutes**

On considère l'expression suivante : $A(x) = 9x^2 - 4 + (3x - 2)(x - 3)$.

1. Développer, puis réduire $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Calculer $A(x)$ pour $x = \frac{2}{3}$, $x = 3$ et $x = 0$.

EXERCICE 147 **15 minutes**



1. Dans la figure ci-contre AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés. Calculer AH en fonction de x. En déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie hachurée.
   $M = (4 - x)^2 - 2^2$
   $N = (4 - x - 2)^2$
   $P = 4^2 - x^2 - 2^2$
2. Développer et réduire l'expression $Q = (4 - x)^2 - 4$.
3. Factoriser Q.
4. Calculer Q pour $x = 2$. Que traduit ce résultat pour la figure ?

EXERCICE 148 **10 minutes**

Soit $A = x^2 - (x - 1)(x + 1)$.

1. Calculer A pour $x = 5$ puis pour $x = \frac{1}{3}$
2. Justifier les résultats précédents.
3. Calculer A pour $x = 1\,234\,567\,890$.

EXERCICE 149 **10 minutes**

1. Démontrer les égalités suivantes :
   - **a.** $2^2 + 2 = 3^2 - 3$
   - **b.** $3^2 + 3 = 4^2 - 4$
   - **c.** $15^2 + 15 = 16^2 - 16$
2. $115^2 + 115 = ?$
3. Enoncer un résultat général et le démontrer.

EXERCICE 150 **10 minutes**

1. Ecrire 7 comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs. Faire de même pour 17 puis pour 45.
2. Démontrer que tout entier impair est la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

EXERCICE 151 **10 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (3x+7)(2-x)+(2x+1)(x-2)$

2. $B = (x-6)(2x+1)-6+x$

3. $C = (4x+1)^2-(5x+2)(1+4x)-1-4x$

4. $D = (3-2x)^2+(2x-3)(2x-1)-6x+9$

EXERCICE 152 **10 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (7x-3)(x-2)+5(2-x)$

2. $B = 2(x-1)^2+(3x-3)$

3. $C = (25-15x)-9(3x-5)-(x+1)(3x-5)$

4. $D = (2x+8y)+x(3x+12y)$

EXERCICE 153 **10 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (x+1)(x+2)-5\left(x^2+4x+4\right)$

2. $B = 5(2x-1)+4x^2-1$

3. $C = x^2-2x+1-(x-3)^2$

4. $D = (2x+1)^2-9(2x+1)$

EXERCICE 154 **10 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2-9+(x+3)(x-9)$

2. $B = 16x^2-25-(4x-5)(16x-25)$

3. $C = 8\left(x^2-10x+25\right)+3(x-1)(x-5)$

4. $D = x^2-16-(2x+8)(x-16)$

EXERCICE 155 **10 minutes**

Trouver trois entiers naturels consécutifs dont le produit divisé par la somme est égal à 16.

EXERCICE 156 **10 minutes**

Que vaut $S = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{2021^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2022^2}\right)$?

☞ On pourra utiliser, après l'avoir justifié, que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}$.

EXERCICE 157 **10 minutes**

Observer, vérifier, généraliser et démontrer :

• $1^2+2^2=\dfrac{3^2+1}{2}$; • $2^2+3^2=\dfrac{5^2+1}{2}$; • $3^2+4^2=\dfrac{7^2+1}{2}$; • $4^2+5^2=\dfrac{9^2+1}{2}$; $\cdots$.

EXERCICE 158 **10 minutes**

Observer, vérifier, généraliser et démontrer :

• $1\times2\times3\times4+1=(1\times4+1)^2$; • $2\times3\times4\times5+1=(2\times5+1)^2$;

• $3\times4\times5\times6+1=(3\times6+1)^2$; • $4\times5\times6\times7+1=(4\times7+1)^2$; $\cdots$

EXERCICE 159 **10 minutes**

Observer, vérifier, généraliser et démontrer :

• $1^2+2^2+(1\times2)^2=(1\times2+1)^2$; • $2^2+3^2+(2\times3)^2=(2\times3+1)^2$;

• $3^2+4^2+(3\times4)^2=(3\times4+1)^2$; • $4^2+5^2+(4\times5)^2=(4\times5+1)^2$; $\cdots$

EXERCICE 160 **10 minutes**

Calculer la somme suivante :

$$\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right)+\left(5^2-6^2-7^2+8^2\right)+\left(9^2-10^2-11^2+12^2\right)+\cdots+\left(2021^2-2022^2-2023^2+2024^2\right)$$

EXERCICE 161 **15 minutes**

1. En utilisant le développement de $(a-b)^2$, démontrer que $2ab \leqslant a^2+b^2 \quad (1)$.
2. En déduire que $(a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2+b^2\right) \quad (2)$.
3. a, b et c étant trois réels quelconques, écrire deux autres inégalités analogues à (1).
En déduire que $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$

1.7 Equations - Inéquations

1.7.1 Point de cours

Définitions

- Une équation du premier degré d'inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax+b=0$ avec $a \neq 0$.
- **Résoudre une équation** d'inconnue x signifie déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie : c'est l'**ensemble des solutions** de l'équation.
- Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Propriété 1 : si on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, si on multiplie ou on divise les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, on obtient une équation équivalente.

Propriété 2 : $A(x) \times B(x) = 0$ si et seulement si $A(x) = 0$ **ou** $B(x) = 0$.

Propriété 3

- Quelle que soit la valeur du réel c, l'inégalité $a<b$ est équivalente à $a+c<b+c$.
- Si $a<b$ et $c<d$, alors $a+c<b+d$.
- Pour tout réel $a>0$, l'inégalité $b<c$ est équivalente à $a \times b < a \times c$.
- Pour tout réel $a<0$, l'inégalité $b<c$ est équivalente à $a \times b > a \times c$.

1.7.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 162 **5 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $3x+2=0$ **2.** $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ **3.** $5x-8=0$ **4.** $\dfrac{1}{3}x+3=0$

EXERCICE 163 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $2x-3=x+7$

2. $-5x+2=9x-5$

3. $4(x+2)=3(5x-3)$

4. $3(x-2)=7(2-3x)$

EXERCICE 164 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $2(x+2)-3(x-1)=4(3-x)$

2. $3(2x-1)-4(1+x)=2(x+3)$

3. $5(3x-1)-(1-2x)=3(5x-2)$

4. $7(x-9)-3(2-3x)=5(6-4x)$

EXERCICE 165 **15 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{x-1}{6}$

2. $\dfrac{1-x}{4}-\dfrac{3x-2}{3}=\dfrac{2x+5}{6}$

3. $\dfrac{5(x-2)}{8}+\dfrac{3(1-2x)}{5}=\dfrac{2x-5}{10}$

4. $\dfrac{4x-3}{4}-\dfrac{3x-8}{8}=\dfrac{5x+2}{2}+\dfrac{2(3x-5)}{7}$

EXERCICE 166 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $(x+4)(x+1)=0$

2. $(x+3)(3x-2)=0$

3. $(2x+3)(3x+2)=0$

4. $(4x-7)(3x+4)=0$

EXERCICE 167 **15 minutes**

Factoriser le membre de gauche puis résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $4x^2-(x+1)^2=0$

2. $(2x+1)^2-(x+3)^2=0$

3. $\left(4x^2+4x+1\right)-(x-2)(2x+1)=0$

4. $(x+2)(x+3)+(x-5)(x+2)=0$

EXERCICE 168 **5 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $2x+3\geqslant 0$

2. $3x-5\leqslant 0$

3. $6-9x<0$

4. $-2x-6>0$

EXERCICE 169 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $2(x+1)\leqslant 3x-4$

2. $3(x-1)>5(x-2)$

3. $0,9x-2,5\geqslant 2-3,6x$

4. $-3,5x+3\leqslant 1,5x-8$

EXERCICE 170 **15 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $2(x+3)+6(x-2)\leqslant 3(x-3)$

2. $9(2-3x)\geqslant 2(5x-3)+3(3-2x)$

3. $3(2+5x)-x-3\leqslant 14x+7$

4. $-7x+3+6(2x-3)<5+2x$

5. $4(x+1)+2(x-2)>3-2(x+2)$

6. $5x+2+3(x-9)\geqslant 8x+5$

EXERCICE 171 **15 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{7x-3}{2}+\dfrac{9x+4}{8}>0$
2. $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{3x-1}{5}\leqslant\dfrac{x+1}{6}$
3. $\dfrac{5x-2}{9}-\dfrac{2-5x}{3}>x+2$
4. $\dfrac{x-1}{3}+3\geqslant 5-\dfrac{3-5x}{2}$

EXERCICE 172 **15 minutes**

On considère l'inéquation : $2x-5\leqslant\dfrac{3}{2}-11x$.

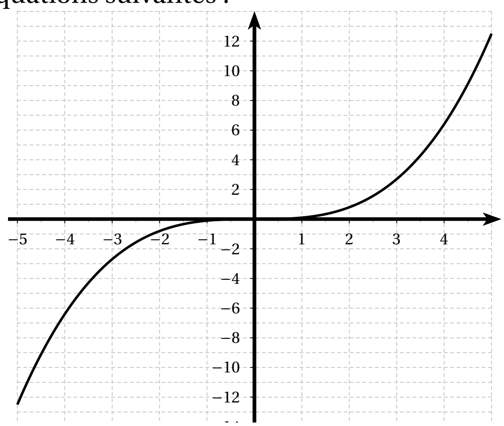
1. Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
2. Le nombre 1 est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
3. **a.** Résoudre l'inéquation : $2x-5\leqslant\dfrac{3}{2}-11x$.
   b. Représenter les solutions sur une droite graduée.

EXERCICE 173 **5 minutes**

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5;5]$.

Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes :

1. $f(x)=2$
2. $f(x)=-3$
3. $f(x)=4$
4. $f(x)=-1$
5. $f(x)\geqslant 0$
6. $f(x)<3$
7. $-6\leqslant f(x)\leqslant -2$

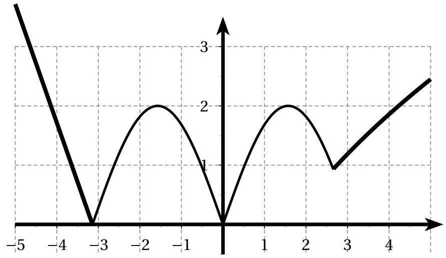


EXERCICE 174 **5 minutes**

Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-5;5]$.

Déterminer le nombre de solutions des équations.

1. $g(x)=2$
2. $g(x)=0,5$
3. $g(x)=3$
4. $g(x)=-1$
5. $g(x)=0$
6. $g(x)=1,5$



1.7.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 175 **10 minutes**

L'objectif de l'exercice est de résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0 \quad (E)$.

1. Démontrer que (E) est équivalente à $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$.

2. Résoudre (E).

EXERCICE 176 **10 minutes**

1. Démontrer que $\left(\dfrac{x}{8}\right)^2 - x + 12 = 0$ est équivalent à $\left(\dfrac{x}{8} - 4\right)^2 - 4 = 0$.

2. Séparés en deux groupes, des enfants s'amusaient. Un huitième d'entre eux au carré jouait aux billes et douze autres jouaient au foot.
Combien y avait-il d'enfants au total ?

EXERCICE 177 **15 minutes**

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} 1,5(x+2) \leqslant 3(0,8x+2) \\ 5(x+2) - 2x \leqslant 2(x+4) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3(14x-3) > 3x+4 \\ 4(x-4) > 3x-14 \end{cases}$

EXERCICE 178 **15 minutes**

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x+7 \\ 2x+16 > \dfrac{9x+2}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 15x-2 > x + \dfrac{1}{3} \\ 4(x-2) < 3x-15 \end{cases}$

EXERCICE 179 **15 minutes**

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} (2x+1)^2 - (x+2)^2 > 0 \\ 4x^2 - 16 < 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (2-3x)^2 - (3x+1)^2 \leqslant 0 \\ 36x^2 - 81 \leqslant 0 \end{cases}$

EXERCICE 180 **10 minutes**

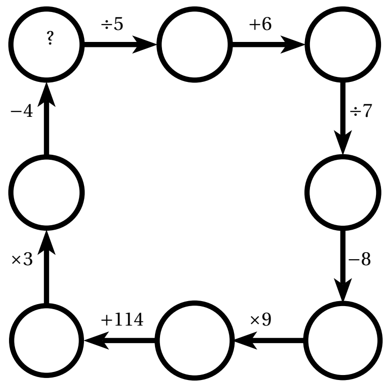
Aujourd'hui Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans.
Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc ?

EXERCICE 181 **10 minutes**

Un père de trois enfants laisse en héritage 16 000 €. Le testament précise que l'aîné doit recevoir 2 000 € de plus que le cadet, le cadet 1 000 € de plus que le benjamin.
De quelle somme hérite chacun des enfants ?

EXERCICE 182 **10 minutes**

Quel nombre faut-il écrire à la place du point d'interrogation pour que les résultats de toutes les opérations soient exacts ?



EXERCICE 183 **10 minutes**

Mathilde a 27 ans de plus que sa fille. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui de sa fille.
Quel est l'âge de Mathilde ? de sa fille ?

EXERCICE 184 **10 minutes**

Déterminer cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405.

EXERCICE 185 **10 minutes**

Déterminer deux entiers tels que l'un soit le triple de l'autre et dont le produit soit égal à 243.

EXERCICE 186 **10 minutes**

La somme de deux entiers est égale à 924. En ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient de double de l'autre.
Déterminer ces deux nombres.

EXERCICE 187 **10 minutes**

Déterminer les triangles rectangles dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs.

EXERCICE 188 **10 minutes**

Déterminer cinq entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands d'entre eux soit égale à la somme des carrés des trois nombres restants.

EXERCICE 189 **10 minutes**

1. Résoudre l'inéquation $x+15 \geqslant \dfrac{2}{3}(x+27)$.
2. Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens. On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens.
   Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens ?

EXERCICE 190 **10 minutes**
Lundi, il y avait huit fois plus de présents dans la classe que d'absents. Mardi, il y avait 2 absents de plus que le lundi et le nombre total des absents est égal à 20% du nombre des présents.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

EXERCICE 191 **10 minutes**
Paul, le père de Sandrine, a 58 ans ; Sylvain, son frère a 27 ans et Mady sa mère, a 22 ans de plus qu'elle. Quand son père aura le double de l'âge de son frère, sa mère et elle auront ensemble 100 ans.
Quel est l'âge de Sandrine aujourd'hui ?

EXERCICE 192 **10 minutes**
Un glacier dépense 100 € pour fabriquer 300 glaces qu'il vend 3 € pièce.
Combien doit-il vendre de glaces pour réaliser au moins 100 € de bénéfice.

EXERCICE 193 **10 minutes**
Deux tarifs annuels de l'eau sont proposés dans la ville de Tom :
• un abonnement annuel de 32 € puis $1,15$ € par m^3 d'eau consommée ;
• un abonnement annuel de 14 € puis $1,75$ € par m^3 d'eau consommée.
A partir de quelle consommation d'eau, le premier tarif est-il plus avantageux que le second ?

EXERCICE 194 **10 minutes**
Math vient de faire le plein de sa voiture. Sachant que son réservoir contient 60 litres de carburant et que son moteur consomme en moyenne 5 litres pour 100 km, dans combien de kilomètres au plus, Math devra-t-il faire le plein de sa voiture s'il ne veut pas rouler sur la réserve de 5 litres du réservoir ?

EXERCICE 195 **10 minutes**
Un opérateur téléphonique propose deux tarifs :
• 0,15 € la minute et un abonnement mensuel de 12 € ;
• 0,25 € sans abonnement.
Pour quelles durées de communication le premier tarif est-il plus avantageux ?

EXERCICE 196 **10 minutes**
Un camion pesant à vide 1,5 tonnes doit franchir un pont limité à 3,5 tonnes.
Combien de caisses de 95 kg peut-il transporter au maximum ?

EXERCICE 197 **10 minutes**
Tom avait 19,95 de moyenne sur les devoirs de maths de l'année jusqu'à un tragique problème de géométrie qu'il n'a pas su commencer. Zéro sur 20 et une moyenne qui chute à 19.
Combien de devoirs Tom a-t-il fait sur l'année ?

EXERCICE 198 **10 minutes**
Un motard poursuit une voiture sur une autoroute. La voiture est à 150 km de la sortie et roule à 120 km/h. Le motard roule à 130 km/h et se situe x km derrière la voiture.

Pour quelles valeurs de x le motard rattrapera-t-il la voiture avant la sortie ?

EXERCICE 199 **10 minutes**

Un ticket de bus coûte 1 € sans abonnement. Avec un abonnement annuel de 30 €, le ticket ne coûte plus que 0,75 €.

1. Compléter la fonction suivante, écrite en python, pour qu'elle affiche, après avoir entré le nombre de tickets achetés n, si un abonnement est rentable :

```
def ticket(n) :
    if ··········· :
        print("L'abonnement est rentable")
    else :
        print("L'abonnement n'est pas rentable")
```

2. En résolvant une inéquation, déterminer à partir de combien de tickets achetés l'abonnement est rentable.

1.8 Résolution de systèmes

1.8.1 Point de cours

On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y un système de la forme $\begin{cases} ax+by=e & (E_1) \\ cx+dy=f & (E_2) \end{cases}$ où $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ sont des réels.

Définition : on appelle déterminant du système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ le nombre

$Det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$

Propriété : le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ admet un unique couple solution si et seulement si le déterminant du système est non nul.

☞ Si le déterminant du système est nul, soit le système n'a pas de couple solution, soit il en a une infinité.

Résoudre ce système, c'est déterminer tous les couples $(x;\ y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

Résolution avec la méthode « par substitution »

1. A partir d'une équation (par exemple (E_1)), on exprime y en fonction de x.
2. Dans l'autre équation (ici (E_2)), on remplace y par l'expression trouvée précédemment. On obtient une équation du premier degré à une inconnue x.
3. On détermine x.
4. On détermine y en remplaçant, dans l'expression obtenue à l' étape **1**, x par la valeur obtenue en **3**.
5. On vérifie que le couple $(x;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

☞ On travaille par implications successives, il est donc nécessaire (si on veut bien faire les choses) de vérifier que le couple obtenu est bien solution.

Résolution avec la méthode « par combinaisons »

1. On veut déterminer x, il faut donc éliminer y :
   - **a.** on multiplie tous les membres de l'équation (E_1) par d ;
   - **b.** on multiplie tous les membres de l'équation (E_2) par $-b$;
   - **c.** on ajoute membre à membre les deux équations obtenues, on obtient une équation ne contenant que l'inconnue x ;
   - **d.** on détermine alors x.
2. On détermine y :
   - **a.** soit on remplace la valeur de x obtenue dans (E_1) ou (E_2) ;
   - **b.** soit on reprend la méthode en éliminant x.
3. On vérifie que le couple $(x;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

1.8.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 200 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x - 7y = -9 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 5y = -3 \end{cases}$

EXERCICE 201 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

EXERCICE 202 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x=y \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x=2y \\ y=3x-9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=-8 \end{cases}$

EXERCICE 203 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 7x+4y=6 \\ 5x+2y=0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 5x+8y=2 \end{cases}$

EXERCICE 204 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 3x+4y=42 \\ 3x+8y=66 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -3x+5y=9 \\ 6x+y=3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 6x+7y=-4 \\ -3x+2y=5 \end{cases}$

EXERCICE 205 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 9a-7b=8 \\ -2a+7b=20 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4a-3b=2 \\ 3a+4b=5 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3a+2b=-150 \\ 3a-2b=-78 \end{cases}$

EXERCICE 206 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de votre choix :

1. $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 7x-2y=4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x=2y \\ y=6x-9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 9x+7y=-12 \\ -9x+4y=30 \end{cases}$

EXERCICE 207 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de votre choix :

1. $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=13 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x+5y=23 \\ 4x+2y=19 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+y=28 \\ 36x+45y=1035 \end{cases}$

EXERCICE 208 **10 minutes**

Calculer le déterminant puis résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=-9 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 8x+6y=12 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$

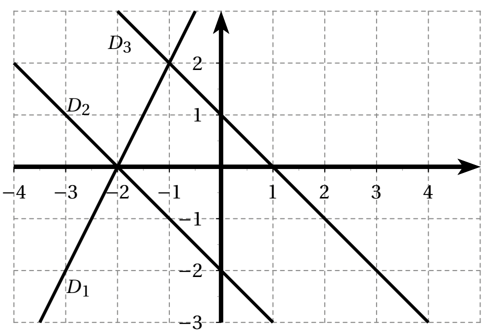
EXERCICE 209 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=-6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 8x+12y=16 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=1 \\ x+\sqrt{2}y=\sqrt{2} \end{cases}$

EXERCICE 210 **5 minutes**

A l'aide du graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes suivants.



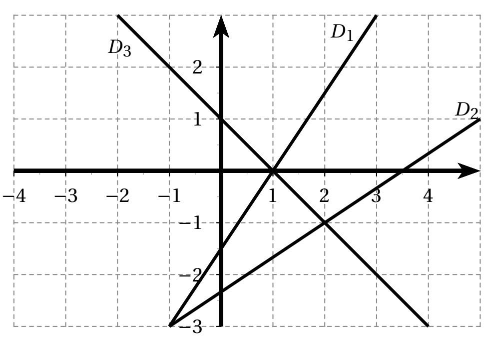
1. $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=-x-2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x-2 \end{cases}$

EXERCICE 211 **5 minutes**

A l'aide du graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes suivants.



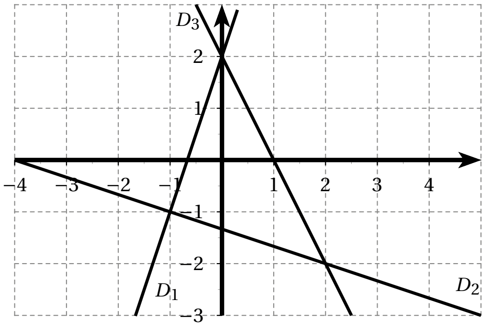
1. $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} \\ y=-x+1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

EXERCICE 212 **5 minutes**

A l'aide du graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes suivants.



1. $\begin{cases} y = -2x+2 \\ y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 3x+2 \\ y = -2x+2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3} \\ y = 3x+2 \end{cases}$

1.8.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 213 **10 minutes**

Un théâtre dispose de 470 places. Il propose un « tarif plein » à 20 € et un « tarif réduit » à 15 €.
Ce soir le théâtre affiche complet et la recette a été de 9 000 €.
Combien de personnes ont payé le « tarif plein » ? le « tarif réduit » ?

EXERCICE 214 **10 minutes**

Dans un bar, on a servi à la première table 3 limonades et 2 jus d'orange pour 7,80 € et à la deuxième table 1 limonade et 3 jus d'orange pour 6,80€.
Combien coûte la limonade ? le jus d'orange ?

EXERCICE 215 **10 minutes**

Le chauffeur d'un bus touristique a reçu 28,50 € pour 12 places, les unes d'intérieur, les autres d'impériale.
Les places d'intérieur coûtent 1,5 €, celles d'impériale 3 €.
Combien de places de chaque sorte a-t-il vendu ?

EXERCICE 216 **10 minutes**

Dans une ferme, il y a des poules et des lapins. On compte 91 têtes et 260 pattes.
Combien y a-t-il de poules et de lapins dans la ferme ?

EXERCICE 217 **10 minutes**

Si on ajoute 50 au numérateur d'une fraction et 120 à son dénominateur, on obtient 0,45.
Si on retranche 50 au numérateur de cette même fraction et 120 à son dénominateur, on obtient 0,55. Quelle est cette fraction ?

EXERCICE 218 **10 minutes**

Un magasin solde des chemises et des pantalons. Toutes les chemises sont vendues au même prix unitaire. Tous les pantalons sont vendus au même prix unitaire.
Tom a payé 570 € pour 7 chemises et 3 pantalons.
Mathilde a payé 730 € pour 3 chemises et 7 pantalons.
Quel est le prix d'une chemise et le prix d'un pantalon ?

EXERCICE 219 **10 minutes**

• 1 potiron pèse autant que 3 melons et 1 concombre.
• 2 potirons pèsent autant que 5 melons et 7 concombres.
Combien faut-il de concombres pour équilibrer 1 potiron ?

EXERCICE 220 **10 minutes**

Le navire compte 145 passagers de première et de seconde classe. Les uns payent 320 € et les autres 260 €. La recette totale a été de 39 800 €.
Quel est le nombre de passagers de chaque classe ?

EXERCICE 221 **10 minutes**

Dans une classe, il y a 41 élèves répartis sur 9 tables.
Certaines tables groupent 4 élèves, les autres 5.
Combien y a-t-il de tables de chaque sorte ?

EXERCICE 222 **15 minutes**

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

2. Montrer que le couple (1 ; 3,5) est solution du système suivant : $\begin{cases} 10x + 4y = 24 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$

3. Un artisan fabrique des perles noires et des perles dorées. Un sac contenant 10 perles noires et 4 perles dorées est vendu 24 euros. Un sac contenant 3 perles noires et 6 perles dorées est vendu également 24 euros. Combien serait vendu un sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées ?

EXERCICE 223 **10 minutes**

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 104 \\ x - y = 8 \end{cases}$

2. Matéo et Simon, qui ont 8 ans d'écart, additionnent leurs âges et trouvent 104 ans.
Sachant que Matéo est le plus jeune, calculer l'âge de chacune de ces deux personnes.

EXERCICE 224 **10 minutes**

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x - 3y = 20 \\ 5x - 4y = -35 \end{cases}$

2. Vérifier que les valeurs trouvées pour x et y vérifient la condition : $0,8\left(\dfrac{x-5}{y+5}\right)=3\left(\dfrac{x+35}{y+35}\right)$.

EXERCICE 225 **10 minutes**

Une élève de CP fait des courses pour elle et ses camarades :
La première fois elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 10,90 €.
La seconde fois elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 17,20 €.
En utilisant un système d'équations, aider l'élève de CP à retrouver le prix de chaque article.

EXERCICE 226 **10 minutes**

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+3y=2250 \\ 2x+y=2750 \end{cases}$

2. Pour l'achat d'un tee-shirt et de trois casquettes, André a payé 22,50 €.
Pour l'achat de deux tee-shirts et d'une casquette, Maeva a payé 27,50 €.
Déterminer le prix d'un tee-shirt et d'une casquette.

EXERCICE 227 **10 minutes**

1. Résoudre le système : $\begin{cases} 6x+5y=25 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$

2. Pierre et Jules achètent des poissons rouges et des poissons jaunes dans le même magasin spécialisé.
Pour l'achat de 6 poissons rouges et de 5 poissons jaunes, Pierre dépense 25 euros.
Pour l'achat de 2 poissons rouges et de 3 poissons jaunes, Jules dépense 11 euros.

a. Quel est le prix d'un poisson rouge ?

b. Quel est prix d'un poisson jaune ?

EXERCICE 228 **10 minutes**

Une marchande vend des mangues et des ignames :

– Madame FRUIT achète 6 kg de mangues et 2 kg d'ignames pour 14 €.

– Madame LEGUME achète 3 kg de mangues et 8 kg d'ignames pour 24,50 €.

1. Ecrire un système d'équations traduisant les données.

2. Résoudre le système pour trouver le prix de 1 kg de mangues et celui de 1 kg d'ignames.

1.9 Exercices de synthèse

EXERCICE 229 **15 minutes**

Deux nombres ont pour somme 456.
De combien augmente leur produit si on ajoute 7 à chacun des deux ?

EXERCICE 230 **15 minutes**

1. Calculer les nombres A et B en détaillant les calculs.
$A = \dfrac{3}{7} \div \dfrac{4}{21} - \dfrac{5}{2}$ (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction.)
$B = \dfrac{10^7 \times 10^{-3}}{10}$ (on donnera le résultat sous la forme 10^n.)

2. Donner l'écriture scientifique du nombre $C = 0,007 \times 10^2$.

3. Ecrire D sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible :
$D = 5\sqrt{8} - \sqrt{50}$.

EXERCICE 231 **15 minutes**

1. Calculer le PGCD de 1 755 et 1 053. Justifier votre réponse.

2. Ecrire la fraction $\dfrac{1\,053}{1\,755}$ sous la forme irréductible.

3. Un collectionneur de coquillages (un conchyliologue) possède 1 755 cônes et 1 053 porcelaines.
Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de coquillages et la même répartition de cônes et de porcelaines.

- **a.** Quel est le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser ?
- **b.** Combien y aura-t-il, dans ce cas, de cônes et de porcelaines par lot ?

EXERCICE 232 **5 minutes**

$$B = \frac{2 - \dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} \ ; \quad C = -\frac{4 \times 10^{-3} \times (-5) \times 10^9}{3 \times 10^6} \ ; \quad D = \frac{\left(3 + \sqrt{11}\right)^2 - 6\sqrt{11}}{3}.$$

Montrer, en détaillant les calculs que $B = C = D$.

EXERCICE 233 **10 minutes**

1. On donne : $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3} \times \dfrac{21}{15}$.
Ecrire A sous la forme d'une fraction irréductible en indiquant les étapes intermédiaires du calcul.

2. Soit $B = \dfrac{3,2 \times 10^{-3} \times 5 \times \left(10^2\right)^3}{4 \times 10^{-2}}$
Ecrire B sous la forme d'un nombre en écriture scientifique.

3. Montrer que $C = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 - 2\sqrt{3}\right)^2$ est un nombre entier.

EXERCICE 234 **10 minutes**

1. Développer et réduire l'expression $P = (x + 12)(x + 2)$.

2. Factoriser l'expression : $Q = (x + 7)^2 - 25$.

3. ABC est un triangle rectangle en A, x désigne un nombre positif. $BC = x + 7$ et $AB = 5$.
Faire un schéma et montrer que : $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.

EXERCICE 235 **15 minutes**

1. On donne $D = \sqrt{125}$; $E = \sqrt{50} \times \sqrt{8}$; $F = \left(5 + \sqrt{3}\right)\left(5 - \sqrt{3}\right)$.

- **a.** Ecrire D sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b entiers, b étant le plus petit possible).
- **b.** Calculer E et F.

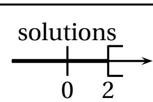
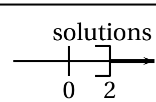
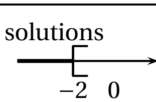
2. On considère l'expression $G = 9x^2 - 25 + (3x - 5)(2x + 15)$

- **a.** Développer et réduire l'expression G.
- **b.** Factoriser l'expression G.
- **c.** Résoudre l'équation $(3x - 5)(5x + 20) = 0$.

3. Comment peut-on calculer astucieusement SANS CALCULATRICE $1999^2 - 1998^2$?

EXERCICE 236 **15 minutes**

Pour chaque question, il n'y a qu'une bonne réponse.

	Question	A	B	C
1.	Une solution de $3x^2 - 5x + 2 = 0$ est	-1	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{7}{3}$
2.	Les solutions de $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + 2)$ sont	-2 et $-\dfrac{1}{2}$	-2 et $\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$ et 2
3.	Les solutions de $2x + 1 < 4x - 2$ sont	$x < -\dfrac{1}{2}$	$x > \dfrac{3}{2}$	$x < -\dfrac{3}{2}$
4.	Le développement de : $(x - 1)(x + 3) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + 1)$ est	$x^2 - 3x + 9$	$x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$	$\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$
5.	La factorisation de $25x^2 - 16$ est	$(5x - 4)^2$	$(5x - 4)(5x + 4)$	$(5x + 4)^2$
6.	La fraction irréductible égale à $\dfrac{3 - \dfrac{5}{2}}{\dfrac{2}{7} - \dfrac{7}{2}}$ est	1	$\dfrac{-45}{28}$	$\dfrac{-7}{45}$
7.	L'écriture sous forme scientifique de $\dfrac{49 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^5}{3 \times 10^4 \times 7 \times 10^{-2}}$ est	$1{,}4 \times 10^{-2}$	$1{,}4 \times 10^{-1}$	$1{,}4 \times 10^{2}$
8.	L'écriture sous la forme $a\sqrt{5}$ de $\sqrt{180} - \sqrt{45} + 3\sqrt{20}$ est	$9\sqrt{5}$	$-3\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$
9.	La représentation graphique des solutions de l'inéquation $7x - 5 < 4x + 1$ est :			

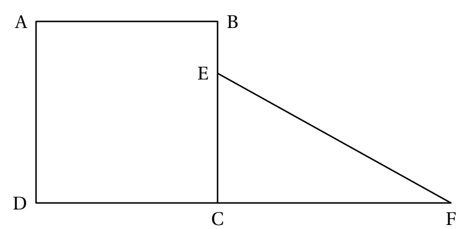
EXERCICE 237 **10 minutes**

Pour chaque question, il n'y a qu'une bonne réponse.

	Question	A	B	C	D
1	Pour $x = 2\sqrt{5}$, l'expression $x^2 + 2x + 1$ vaut	$25\sqrt{5}$	$24\sqrt{5}+1$	$21+4\sqrt{5}$	$13\sqrt{5}$
2	L'équation $2x-7=5x+8$ a pour solution	$-\dfrac{1}{3}$	5	$\dfrac{1}{3}$	-5
3	$\sqrt{18}$ a pour valeur exacte	9	4,24	$9\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
4	La fonction linéaire f telle que $f(5)=3$ a pour coefficient	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{3}{5}$	8	2
5	$(3x-2)^2 =$	$3x^2-4$	$3x^2-12x+4$	$9x^2-12x+4$	$9x^2-4$
6	L'équation x^2-81 admet :	aucune solution	une unique solution	deux solutions	on ne peut pas savoir
7	Sur une carte à l'échelle 1/25 000, la longueur d'une route est de 10 cm. La longueur réelle de cette route est :	2 500 cm	0,25 km	2,5 km	25 000 m

EXERCICE 238 **15 minutes**

Sur la figure ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur),



$ABCD$ est un carré dont le côté a pour mesure (en centimètres) x,

ECF est un triangle rectangle en C,

le point E étant un point du segment $[BC]$.

On donne $FC = 4$ cm.

1. **a.** Exprimer l'aire, notée $\mathcal{A}_{\text{ABCD}}$, du carré ABCD en fonction de x.
   b. Calculer $\mathcal{A}_{ABCD}$ pour $x = 2+\sqrt{2}$ (on donnera le résultat sous la forme $a+b\sqrt{2}$, où a et b sont des nombres entiers).
2. On suppose que x est supérieur à 1.
   a. Sachant que la longueur BE est égale à 0,5 cm, calculer, en fonction de x, l'aire, du triangle ECF notée $\mathcal{A}_{ECF}$.
   b. On note S la somme, en fonction de x, des deux aires $\mathcal{A}_{ABCD}$ et $\mathcal{A}_{ECF}$.
   Vérifier que : $S = x^2+2x-1$.
3. Calculer S pour $x = 2+\sqrt{2}$.
   On donnera le résultat sous la forme $c+d\sqrt{2}$, où c et d sont des nombres entiers.

EXERCICE 239 **15 minutes**

Un examen comporte les deux épreuves suivantes :

- une épreuve orale (coefficient 4) ;
- une épreuve écrite (coefficient 6).

Chacune des épreuves est notée de 0 à 20.
Un candidat, pour être reçu à l'examen, doit obtenir au minimum 10 de moyenne.
Le calcul de la moyenne m est donné par la formule suivante : $m = \dfrac{4x+6y}{10}$
où x est la note obtenue à l'oral et y la note obtenue à l'écrit.

1. Caroline qui a obtenu 13 à l'oral et 7 à l'écrit, sera-t-elle reçue à l'examen ? Justifier.

2. Etienne a obtenu 7 à l'oral.

   a. Quelle note doit avoir Etienne à l'écrit pour obtenir exactement 10 de moyenne ? Justifier.

   b. Les parents d'Etienne lui ont promis un ordinateur s'il obtenait à son examen une moyenne supérieure ou égale à 13.
   Quelle note minimale doit-il obtenir à l'écrit pour avoir son ordinateur ?

EXERCICE 240 **15 minutes**

Le professeur choisit trois nombres entiers relatifs consécutifs rangés dans l'ordre croissant.
Leslie calcule le produit du troisième nombre par le double du premier.
Jonathan calcule le carré du deuxième nombre puis il ajoute 2 au résultat obtenu.

1. Leslie a écrit le calcul suivant : $11 \times (2 \times 9)$
Jonathan a écrit le calcul suivant : $10^2 + 2$

   a. Effectuer les calculs précédents.

   b. Quels sont les trois entiers choisis par le professeur ?

2. Le professeur choisit maintenant trois nouveaux entiers. Leslie et Jonathan obtiennent alors tous les deux le même résultat.

   a. Le professeur a-t-il choisi 6 comme deuxième nombre ?

   b. Le professeur a-t-il choisi -7 comme deuxième nombre ?

   c. Arthur prétend qu'en prenant pour inconnue le deuxième nombre entier (qu'il appelle n), l'équation $n^2 = 4$ permet de retrouver le ou les nombres choisis par le professeur.
   A-t-il raison ? Expliquer votre réponse en expliquant comment il a trouvé cette équation, puis donner les valeurs possibles des entiers choisis.

1.10 Vers la première

EXERCICE 241 **5 minutes**

Sachant que $2^{200} \times 2^{203} + 2^{163} \times 2^{241} + 2^{126} \times 2^{277} = 32^n$, quelle est la valeur de n ?

EXERCICE 242 **10 minutes**

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

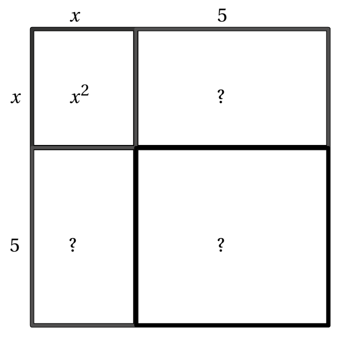
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geqslant 100.$$

☞ Penser aux expressions conjuguées.

EXERCICE 243 **15 minutes**

Al-Khwarizmi (788-850) utilise une méthode à support géométrique pour résoudre des équations du type $x^2+ax=b$ avec (b réel positif).

Par exemple : pour l'équation $x^2+10x=39$, il propose de tracer un carré de côté x et de compléter par deux rectangles de dimensions x et la moitié de 10 (c'est-à-dire 5) pour obtenir un grand carré.
Ce grand carré a pour aire $\left(x^2+10x\right)+5^2$, c'est-à-dire $39+25$, soit 64.
Donc il a pour côté 8. Il suffit de retirer 5 pour obtenir le côté x cherché : $x=3$.



Remarque : Cette méthode ne permet de trouver que les solutions positives, à cette époque, les nombres négatifs sont inconnus.
Pour obtenir la seconde solution, il faut se souvenir que les deux solutions de l'équation $c^2=64$ sont 8 et -8, la seconde solution sera $-8-5$ soit -13.

Résoudre, en utilisant la méthode d'Al-Khwarizmi, les équations suivantes (on pourra s'aider d'un croquis) :

1. $x^2+12x=45$
2. $x^2+2x=8$
3. $x^2+20x=21$

EXERCICE 244 **15 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y=9 \\ y+z=27 \\ z+x=22 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=16 \\ 8x-7y=0 \\ 9y=8 \end{cases}$

EXERCICE 245 **15 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y=-1 \\ 3x-z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4y-3z=0 \\ x+z=2 \end{cases}$

EXERCICE 246 **15 minutes**

On sait que la fonction f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et que sa courbe représentative passe par les points $A(0;5)$, $B(1;4)$ et $C(2;7)$.

1. En utilisant les données du problème, établir un système de trois équations.
2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de f.

EXERCICE 247 **15 minutes**

On sait que la fonction f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et que sa courbe représentative passe par les points $A(0;2)$, $B(1;7)$ et $C(-2;-20)$.

1. En utilisant les données du problème, établir un système de trois équations.
2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de f.

EXERCICE 248 **15 minutes**

La grand-mère de Math dispose de trois étagères. Elle y dépose ses pots de confitures de trois tailles différentes (chaque taille correspond à un fruit) de sorte à avoir exactement 6 kg sur chaque étagère.
La première étagère contient une confiture de fraises, trois de cerises et trois de melons.
La seconde étagère contient deux confitures de fraises et six de melons.
La troisième étagère contient quatre confitures de cerises et six de melons.
Quel est le poids de chaque pot de confiture ?

EXERCICE 249 **15 minutes**

On sait que la fonction f est de la forme $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ et que sa courbe représentative passe par les points $A(0;-2)$, $B(1;-2)$, $C(-1;2)$ et $D(2;8)$.

1. En utilisant les données du problème, établir un système de quatre équations.
2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de f.

EXERCICE 250 **20 minutes**

1. Soient a et b deux réels, vérifier que $x^2 + ax + b = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b$.
2. Soit $P = x^2 + 8x - 9$.
   - **a.** En utilisant le résultat précédent démontrer que $P = (x+4)^2 - 25$.
     ☞ On dira que cette expression est la forme canonique de P.
   - **b.** En déduire la factorisation de P.
   - **c.** Résoudre l'équation $P = 0$.

3. En utilisant les résultats précédents, donner la forme canonique puis factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. $A = x^2 + 4x + 5$ **c.** $C = x^2 - 4x + 1$ **e.** $E = x^2 - x - 5$

b. $B = x^2 - 6x - 7$ **d.** $D = x^2 + x + 2$ **f.** $F = x^2 - 3x + 1$

EXERCICE 251 **20 minutes**

1. Soit $P = x^2 + 10x - 15$.

a. Démontrer que $P = (x+5)^2 - 40$.

b. Démontrer que pour tout x réel, $P \geqslant m$, où m est un réel à déterminer.

c. En utilisant le résultat de la question **1.a**, factoriser P.

d. Résoudre l'équation $P = 0$.

2. Soit $Q = -x^2 + 3x + 1$.

a. Démontrer que $Q = \dfrac{13}{4} - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$.

b. Démontrer que pour tout x réel, $Q \leqslant m$, où m est un réel à déterminer.

c. En utilisant le résultat de la question **2.a**, factorise Q.

d. Résoudre l'équation $Q = 0$.

3. Soit $R = x^2 + x + 1$.

a. Mettre R sous forme canonique.

b. Démontrer que pour tout x réel, $R \geqslant m$, où m est un réel à déterminer.

c. En déduire que l'équation $R = 0$ n'admet pas de solution réelle.

EXERCICE 252 **20 minutes**

1. Soit $P = 6x^2 + 23x + 20$.

a. Calculer $a = 6 \times 20$.

b. Déterminer tous les couples d'entiers (m, n) tels que $a = m \times n$ et calculer dans chaque cas $S = m + n$.

c. En déduire m et n entiers tels que $P = 6x^2 + mx + nx + 20$.

d. Factoriser P.

e. Résoudre l'équation $P = 0$.

2. En utilisant la méthode précédente, factoriser les polynômes suivants :

a. $A = 6x^2 + 13x + 6$ **c.** $C = 10x^2 + 29x + 10$ **e.** $E = 9x^2 + 21x + 10$

b. $B = 4x^2 + 14x + 6$ **d.** $D = 6x^2 + 7x + 2$ **f.** $F = 21x^2 + 38x + 5$

EXERCICE 253 **20 minutes**

1. Soit $P = 6x^2 - 5x - 6$.

a. Calculer $a = 6 \times (-6)$.

b. Déterminer tous les couples d'entiers (m, n) tels que $a = m \times n$ puis calculer dans chaque cas $S = m + n$.

c. En déduire m et n entiers tels que $P = 6x^2 + mx + nx - 6$.

d. Factoriser P.
e. Résoudre l'équation $P = 0$.

2. En utilisant la méthode précédente, factoriser les polynômes suivants :

a. $A = 4x^2 + x - 3$	**c.** $C = 10x^2 + 21x - 10$	**e.** $E = 15x^2 - x - 6$
b. $B = 2x^2 + 5x - 3$	**d.** $D = 6x^2 - 7x + 2$	**f.** $F = 21x^2 + 32x - 5$

EXERCICE 254 **20 minutes**

1. Soit $P = x^2 + 4x - 5$.

a. Vérifier que pour $x = 1$ on obtient $P = 0$.
b. Déterminer l'entier a tel que $P = (x-1)(x+a)$
☞ On s'intéressera en particulier pour cela à -5.
c. En déduire les solutions de l'équation $P = 0$.
☞ 1 est appelé solution « évidente ».

2. Vérifier que b est une solution « évidente » et s'inspirant des résultats précédents factoriser les polynômes suivants :

a. $A = x^2 + x - 2$ et $b = 1$	**c.** $C = x^2 + 3x - 10$ et $b = 2$	**e.** $E = x^2 - x - 6$ et $b = -2$
b. $B = x^2 + 10x + 9$ et $b = -1$	**d.** $D = x^2 + 7x + 10$ et $b = -2$	**f.** $F = x^2 - 3x - 10$ et $b = 5$

EXERCICE 255 **10 minutes**

Déterminer tous les couples d'entiers positifs $(a\,;\,b)$ tels que $a < b$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{50}$.

EXERCICE 256 **20 minutes**

On appelle moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs, x et y, le nombre $\dfrac{x+y}{2}$.
On appelle moyenne géométrique de deux nombres réels positifs, x et y, le nombre $\sqrt{xy}$.

1. Quelles sont la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de 36 et 64 ?
2. Déterminer les couples de nombres réels positifs dont la moyenne arithmétique est égale à 13 et dont la moyenne géométrique est égale à 12.
3. Montrer que pour tout couple de réels positifs $(x\,;\,y)$, leur moyenne arithmétique est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique.
4. Déterminer les couples d'entiers positifs $(x\,;\,y)$, tels que $x < y \leqslant 50$ et la différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique soit égale à 1.

EXERCICE 257 **15 minutes**

Déterminer les nombres x et y tels que $\begin{cases} x - y = 4\sqrt{2} \\ xy = 56 \end{cases}$

EXERCICE 258 **15 minutes**

Déterminer tous les triplets (a, b, c) de réels tels que $\begin{cases} a^3 + b = 4c \\ a + b^3 = c \\ ab = -1 \end{cases}$

EXERCICE 259 **30 minutes**

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?
2. **a.** Etablir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.
   b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.
   c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.
3. **a.** Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
   b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?
4. **Un algorithme glouton mais peu performant :**
   Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de glouton) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.
   a. Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
   b. Et pour répartir 75 canelés ?
   c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?
5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.
   a. Combien de de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?
   b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (sans appliquer l'algorithme) ?
6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

Chapitre 2

Fonctions

2.1 Généralités sur les fonctions

2.1.1 Point de cours

Définitions : soit $\mathcal{D}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
• Définir une **fonction** f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à tout nombre réel x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$ (on lit « f de x »).
☞ On utilise aussi la notation $f : x \mapsto f(x)$.

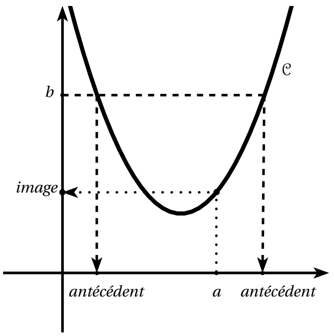
• $\mathcal{D}$ est appelé **ensemble de définition de la fonction** f : c'est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.
• Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne) différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.
• Dans un repère, la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\left(x\,;\,y\right)$ vérifient l'égalité $y = f(x)$.
Cette courbe est la **courbe représentative** ou **la représentation graphique** de la fonction f.

Définition : soit f une fonction définie sur un intervalle (ou réunion d'intervalles) I **centré en O**.
• On dit que f est **paire** lorsque, pour tout x de I, $f(-x) = f(x)$.
• On dit que f est **impaire** lorsque, pour tout x de I, $f(-x) = -f(x)$.

Conséquences graphiques :
•Si f est **paire** alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.
• Si f est **impaire** alors O est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f.

- L'**image** $f(x)$ d'un nombre a par f se lit sur l'**axe des ordonnées** : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées (a ; 0).
- Les **antécédents**, s'il y en a, d'un nombre b par f se lisent sur l'**axe des abscisses** : ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées (0 ; b).



2.1.2 Exercices d'application de cours

Exercice 260 **5 minutes**

Calculer $f(-2)$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - x$

2. $f(x) = \dfrac{2-3x}{x^2+1}$

3. $f(x) = 1 + x + x^2$

4. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Exercice 261 **5 minutes**

Quelle est l'image de 3 par g, pour chaque fonction g :

1. $g(x) = x^2 - 4x$

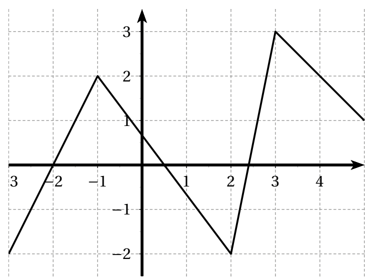
2. $g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

3. $g(x) = x\sqrt{2x+3}$

4. $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$

Exercice 262 **5 minutes**

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 5]$.



Déterminer graphiquement les images par f de : 2; 3; 4; 5; −1;−2 et −3.

Exercice 263 **5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	-3	-1	$-0,5$	0	1	2	3
$f(x)$							

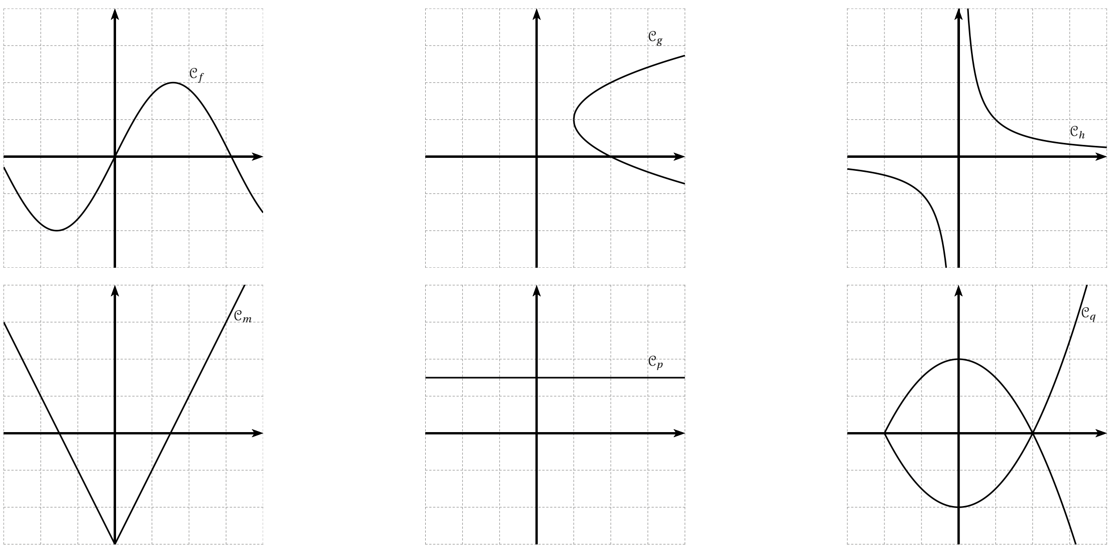
EXERCICE 264 — 5 minutes

Soit la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x) = \sqrt{5-x^2}$.
Compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	0	0,5	1	2	$\sqrt{3}$	-2	-1
$f(x)$							

EXERCICE 265 — 5 minutes

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



EXERCICE 266 — 10 minutes

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,2]$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - 2$.

1. Etablir un tableau de valeurs avec un pas de 0,25.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE 267 — 10 minutes

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = x^2$.

1. Déterminer l'image de 3 par f.
2. Déterminer l'image de $\sqrt{3}$ par g.
3. Déterminer l'antécédent (ou les antécédents) de 3 par f.
4. Déterminer l'antécédent (ou les antécédents) de 5 par g.
5. Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent par g.

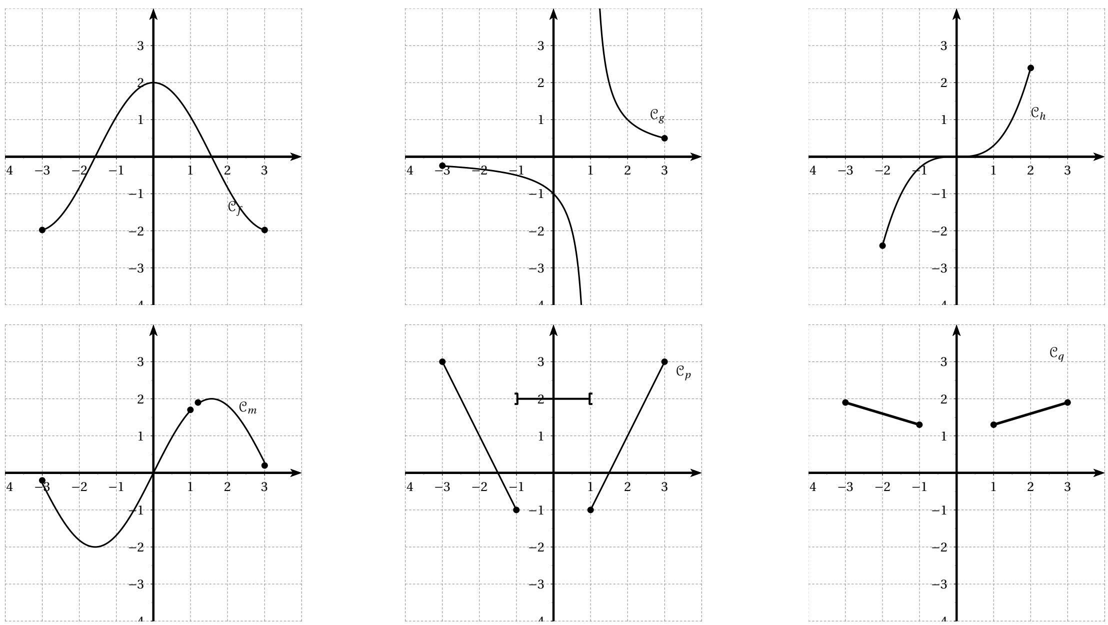
EXERCICE 268 **10 minutes**

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + \dfrac{3}{x^2+3}$ et $g(x) = 2x^3 - 5x$.

1. Calculer $f(-x)$.
2. Comparer $f(x)$ et $f(-x)$. Que peut-on en conclure ?
3. Calculer $g(-x)$.
4. Comparer $g(x)$ et $g(-x)$. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 269 **5 minutes**

Par lecture graphique, émettre une conjecture sur la parité des fonctions suivantes :



EXERCICE 270 **5 minutes**

Par lecture graphique déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction de l'exercice précédent.

EXERCICE 271 **10 minutes**

1. Chacune des phrases ci-dessous définit une fonction. Déterminer la forme algébrique de chacune de ces fonctions.

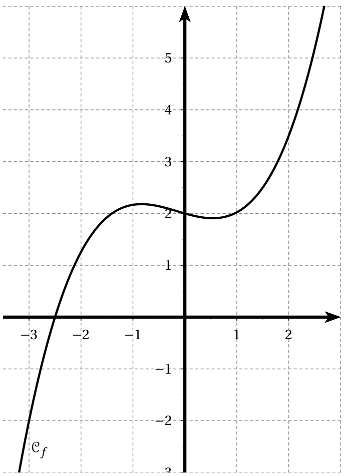
   a. f_1 renvoie le triple de x.
   b. f_2 renvoie la somme du double de x et du cube de x.
   c. f_3 renvoie la différence du carré de x et du double du cube de x.
   d. f_4 renvoie la racine carrée du produit de 4 par la différence de x et de 3.
   e. f_5 renvoie la somme de x et de l'inverse de la différence du carré de x et de 1.

2. Répondre aux questions suivantes en utilisant les fonctions définies dans la question précédente.

a. Quelle est l'image de 4 par f_1 ?
b. Quelle est l'image de 2 par f_5 ?
c. 0 a-t-il une image par f_4 ?
d. 3 a-t-il une image par f_4 ?
e. 1 a-t-il une image par f_5 ?
f. Existe-t-il des nombres différents de 1 qui n'ont pas d'image par f_5 ?

EXERCICE 272 **10 minutes**

Dans le repère ci-dessous, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f :



1. Placer le point $A(2\ ;\ 3,5)$.

2. On considère les points $B(0\ ;\ 2)$, $C(-2\ ;\ 1)$, $D(-3\ ;\ -2)$ et $E(-2,5\ ;\ 0)$.

a. Placer ces points dans le repère précédent.
b. Parmi ces quatre points, lesquels appartiennent de manière certaine à la courbe $\mathscr{C}$?

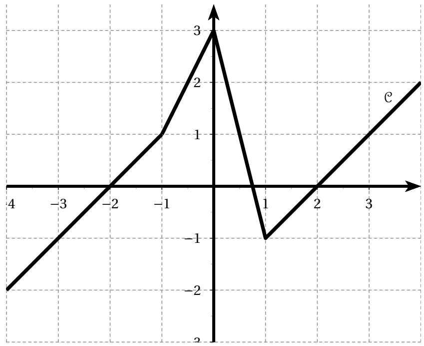
3. Placer le point F d'abscisse -2 appartenant à la courbe $\mathscr{C}$. Donner ses coordonnées.

4. Combien de points de la courbe $\mathscr{C}$ ont pour ordonnée -1 ? Préciser l'abscisse de ces points.

5. Combien de points de la courbe $\mathscr{C}$ ont pour ordonnée 2 ? Préciser l'abscisse de ces points.

EXERCICE 273 **10 minutes**

Dans le repère ci-dessous, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f :



1. Placer le point $A(-1,5 ; 0,5)$.
2. On considère les points $B(-2 ; 0)$, $C(-0,5 ; 2)$, $D(0,5 ; 1)$ et $E(1 ; 3)$.
   - **a.** Placer ces points dans le repère précédent.
   - **b.** Parmi ces quatre points, lesquels appartiennent de manière certaine à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Placer le point F d'abscisse 3 appartenant à la courbe $\mathscr{C}$. Donner ses coordonnées.
4. Combien de points de la courbe $\mathscr{C}$ ont pour ordonnée -1 ? Préciser l'abscisse de ces points.
5. Combien de points de la courbe $\mathscr{C}$ ont pour ordonnée 3 ? Préciser l'abscisse de ces points.

EXERCICE 274 **10 minutes**

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre réel.

• Tripler le nombre de départ ;
• Enlever 8 ;
• Multiplier par 5 ;
• Enlever le nombre de départ.

1. Donner l'image de :
   a. 0 **b.** 135 **c.** 15,9.
2. Donner le (ou les) antécédent(s) de 0.
3. A quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour obtenir 2022.
4. Ecrire un programme de calcul d'au moins 4 étapes qui donne 0 quand on entre le réel 25.

EXERCICE 275 **10 minutes**

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre réel.

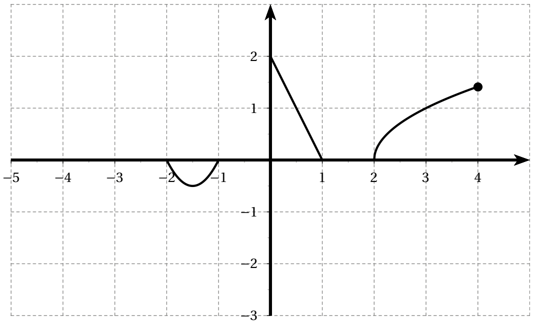
• Ajouter 8 au nombre de départ ;
• Doubler le résultat ;
• Diviser par 5 ;
• Enlever le nombre de départ.

1. Donner l'image de :
   a. 1 **b.** -19 **c.** 3,14.
2. Donner le (ou les) antécédent(s) de 0.
3. A quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour obtenir 2022 ?
4. Ecrire un programme de calcul d'au moins 5 étapes qui donne -2 quand on entre le réel 2022.

2.1.3 Exercices d'approfondissement

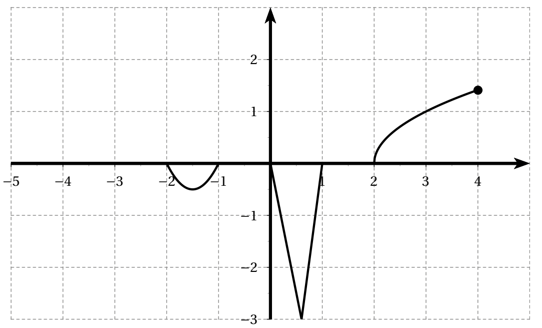
EXERCICE 276 **5 minutes**

Compléter la courbe suivant sachant que la fonction est paire.



EXERCICE 277 **5 minutes**

Compléter la courbe suivante sachant que la fonction est impaire.

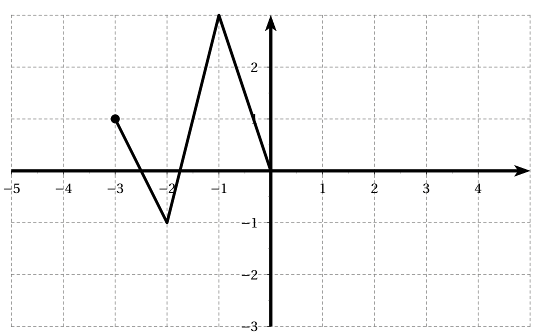


EXERCICE 278 **5 minutes**

La figure ci-contre montre une partie de la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 3]$.

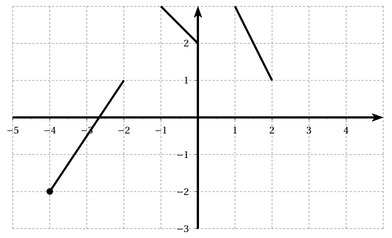
1. Compléter le tracé en pointillés en supposant que f est paire.

2. Compléter le tracé en pointillés en supposant que f est impaire.



EXERCICE 279 **5 minutes**

La courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $[-4;4]$ est représentée ci-dessous.
Compléter le tracé en supposant f paire.



EXERCICE 280 **5 minutes**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, contenant 0 et symétrique par rapport à 0.
Démontrer que si $f(0) \neq 0$ alors f ne peut pas être impaire.
☞ Penser à la contraposée.

EXERCICE 281 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont, parmi les points suivants, ceux qui appartiennent à $\mathcal{C}$?
   $A\left(1\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$, $B(-2\,;\,-2)$, $C(-1\,;\,-1)$, $D\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{7}\right)$, $E\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{1}{7}\right)$.
3. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 ? d'abscisse -5 ?
4. Quelle est l'abscisse du point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 3 ? d'ordonnée 2022 ?

EXERCICE 282 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-5x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont, parmi les points suivants, ceux qui appartiennent à $\mathcal{C}$?
   $A\left(1\,;\,-\sqrt{3}\right)$, $B\left(-2\,;\,2\sqrt{3}\right)$, $C(-4,6\,;\,-5)$, $D\left(\dfrac{1}{5}\,;\,1\right)$, $E(-0,5\,;\,2,1)$.
3. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 ? d'abscisse $0,4$?
4. Quelle est l'abscisse du point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 3 ? d'ordonnée 2022 ?

EXERCICE 283 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$.

1. Ecrire une fonction en python qui prend en argument un réel x et qui retourne la valeur de $f(x)$.
2. Ecrire une fonction en python qui prend en arguments trois réels a, b et p avec $(a < b)$, qui utilise la fonction précédente et affiche les images de tous les réels de l'intervalle $[a\,;\,b]$ avec un pas de p.

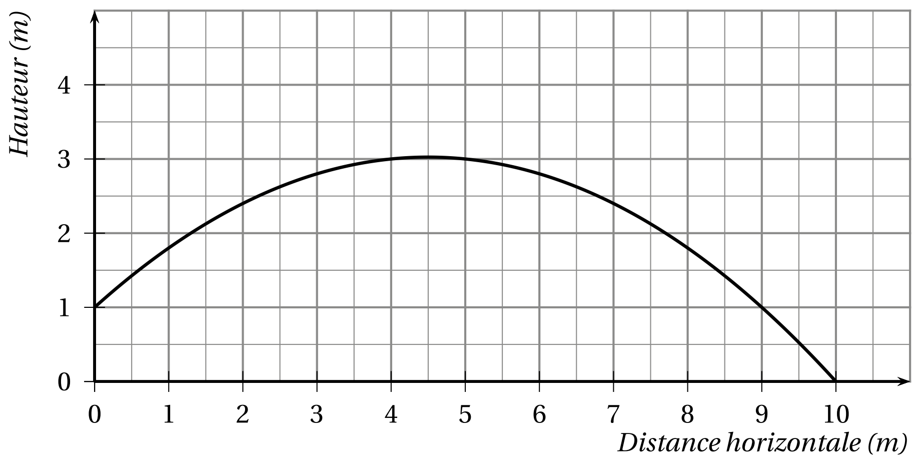
EXERCICE 284 **15 minutes**

Fabien participe à un semi-marathon. Il a parcouru les 21 km à la vitesse constante de 12 km par heure.

1. Déterminer en minutes la durée de la course de Fabien.
2. On s'intéresse à la distance en km séparant Fabien de la ligne d'arrivée après x minutes de course ($0 \leqslant x \leqslant 105$). On note $f(x)$ cette distance et on admet que $f(x) = 21 - 0,2x$.
Ainsi $f(10) = 19$ indique qu'après 10 minutes de course Fabien est à 19 km de la ligne d'arrivée.
Déterminer :
   a. La distance en kilomètres séparant Fabien de l'arrivée après 30 minutes de course.
   b. La durée en minutes écoulée depuis le départ lorsque Fabien est à 7 km de l'arrivée.
3. Résoudre l'équation $21 - 0,2x = 17$.
4. Que représente pour le problème la solution de cette équation ?

EXERCICE 285 **10 minutes**

Pour son anniversaire, Julien a reçu un coffret de tir à l'arc.
Il tire une flèche. La trajectoire de la pointe de cette flèche est représentée ci-dessous.
La courbe donne la hauteur en mètres (m) en fonction de la distance horizontale en mètres (m) parcourue par la flèche.



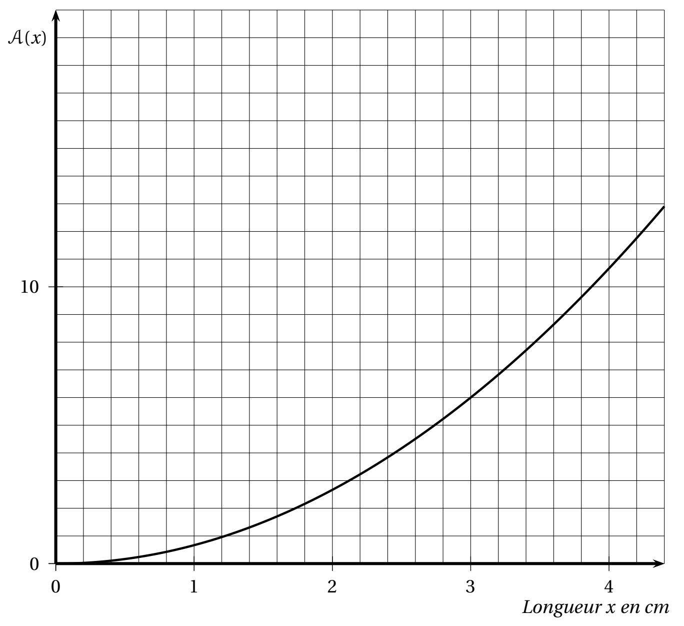
1. Dans cette partie, les réponses seront données grâce à des **lectures graphiques**. Aucune justification n'est attendue.
   a. De quelle hauteur la flèche est-elle tirée ?
   b. A quelle distance de Julien la flèche retombe-t-elle au sol ?
   c. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la flèche ?
2. Dans cette partie, les réponses seront justifiées par des **calculs**. La courbe ci-dessus représente la fonction f définie par $f(x) = -0,1x^2 + 0,9x + 1$.

a. Calculer $f(5)$.
b. La flèche s'élève-t-elle à plus de 3 m de hauteur ?

EXERCICE 286 **15 minutes**

Soit EFG un triangle rectangle en E tel que $EF = 5,4$ cm, $EG = 7,2$ cm et $FG = 9$ cm.
Soit M un point mobile du segment $[EF]$ tel que $EM = x$.
Par M on mène la parallèle à la base elle coupe le côté $[EG]$ en N.

1. **a.** Sur quel intervalle varie le nombre x ?
   b. Exprimer la longueur EN en fonction de x.
   c. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(x)$ du triangle EMN est égale à $\mathcal{A}(x) = \dfrac{2}{3}x^2$.
2. Sur le graphique ci-après, on a porté la longueur x en abscisses et l'aire $\mathcal{A}(x)$ du triangle EMN en ordonnée.
   Après avoir effectué les tracés nécessaires sur le graphique :
   a. Lire une valeur approchée de l'aire du triangle EMN lorsque $x = 3,5$ cm.
   b. Déterminer la valeur approximative de x pour laquelle l'aire du triangle EMN est égale à 12 cm^2.



EXERCICE 287 **10 minutes**

A température constante le volume V d'une masse gazeuse est fonction de la pression P qui s'exerce sur elle.
Le tableau suivant indique les valeurs de V (en cm^3) pour sept valeurs de P (en cm de mercure).

P	76	100	120	150	160	180	200
V	30	23	19	15	14	12	11

On considère la fonction f qui à P associe V et sa courbe représentative $\mathscr{C}$.

1. Placer les points de $\mathscr{C}$ connus d'après le tableau. Puis tracer la courbe.

2. Estimer par lecture graphique :

a. l'image de 140;

b. un antécédent de 26.

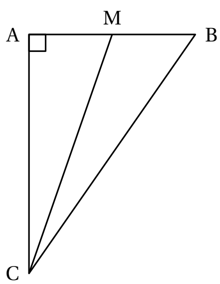
c. Interpréter ces deux résultats pour la masse gazeuse.

EXERCICE 288 **20 minutes**

Monsieur Jean possède un terrain qu'il souhaite partager en deux lots de même aire. Ce terrain a la forme d'un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 50 m et AC = 80 m.

1. a. Calculer l'aire du triangle ABC.

b. En déduire que l'aire de chaque lot doit être de 1 000 m^2.



2. Dans un premier temps, il pense faire deux lots ayant la forme de deux triangles AMC et BMC comme indiqué sur la figure ci-contre. On pose A$M = x$.

a. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle AMC.

b. En déduire que l'aire du triangle BMC est égale à $2000 - 40x$.

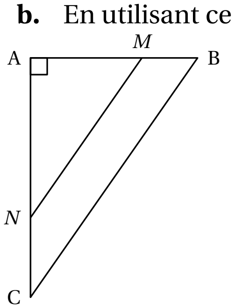
c. Déterminer x pour que les aires des deux triangles AMC et BMC soient égales.

d. Quelle est alors la position du point M sur le segment $[AB]$?

3. On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = 40x$ et $g(x) = 2000 - 40x$.

a. Tracer sur la calculatrice les fonctions f et g pour $0 \leqslant x \leqslant 50$.

b. En utilisant ce graphique, retrouver le résultat de la question **2. c**.

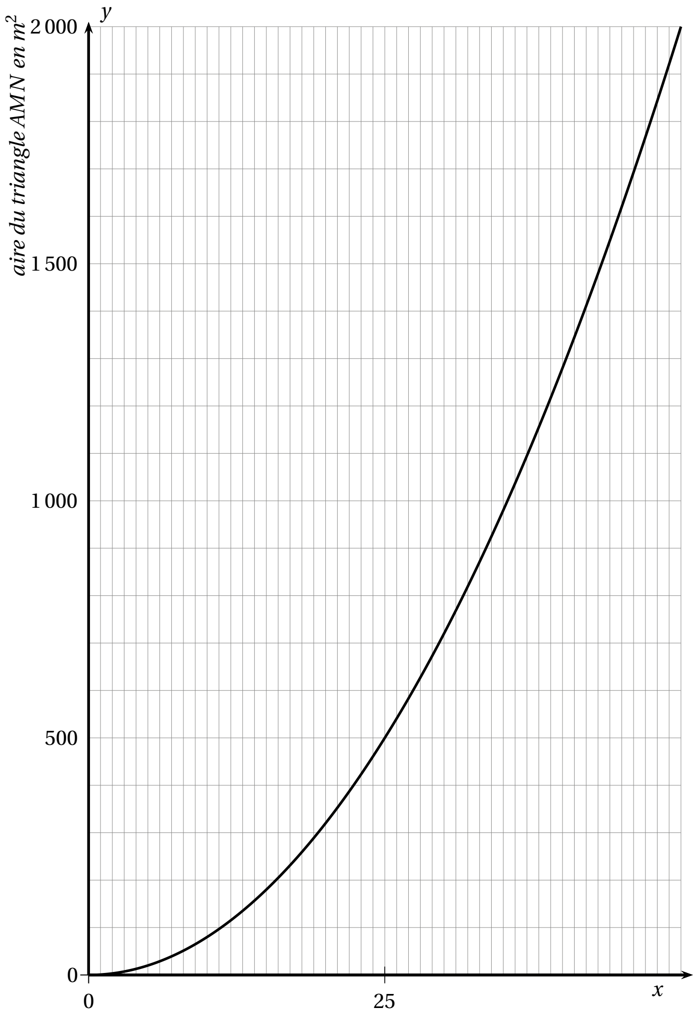


4. Finalement, monsieur Jean se décide à partager son terrain en un lot triangulaire AMN et un lot ayant la forme d'un trapèze $BMNC$ comme indiqué sur la figure ci-contre avec (MN) parallèle à (BC). On pose $AM = x$.

a. En utilisant la propriété de Thalès, exprimer AN en fonction de x.

b. En déduire que l'aire du triangle AMN est égale à x^2.

5. Le graphique suivant représente l'aire en m^2 du triangle AMN exprimée en fonction de x. En utilisant ce graphique, déterminer x, à un mètre près, pour que les aires des deux lots AMN et BMNC soient égales.



EXERCICE 289 **10 minutes**

Un verre a une forme conique. Sa hauteur est 12 cm et le diamètre de son ouverture est 8 cm. On note V la fonction qui à la hauteur de liquide versé dans le verre (en cm), associe le volume de liquide versé (en cm^3).

1. Démontrer que $V(h) = \dfrac{\pi}{27}h^3$.
2. Tracer sur la calculatrice une courbe qui permet de lire le volume de liquide dans le verre en fonction de la hauteur de liquide versé.
3. Par lecture graphique, déterminer jusqu'à quelle hauteur il faut remplir ce verre pour qu'il soit à moitié plein.

EXERCICE 290 **10 minutes**

Le magicien demande à un spectateur de penser à un nombre et de l'écrire sur une ardoise. Il l'invite à ne pas montrer cette ardoise le temps du tour de magie, et de l'utiliser éventuellement pour faire les calculs demandés. Le magicien demande alors au spectateur d'ajouter 5 au nombre écrit initialement, puis de multiplier cette somme par le nombre de départ. Il le conjure surtout de ne pas oublier ce résultat provisoire, puis lui demande de soustraire le carré du nombre de départ au résultat précédent. Enfin, il lui demande de dire le résultat final à haute voix.

Quelle surprise d'entendre le magicien annoncer, la seconde suivante, le nombre choisi au départ par le spectateur ! L'ardoise, brandie comme preuve, déclenche une salve d'applaudissements !

1. Analyser cet énoncé pour faire apparaître un algorithme dont on décrira chaque étape.
2. Quelle fonction cet algorithme décrit-il ?
3. Justifier alors le succès du magicien.

EXERCICE 291 **15 minutes**

ABC est un triangle rectangle en C tel que $AC = 3$ et $BC = 4$.
Le point M étant mobile sur $[AB]$, on désigne par x la longueur AM.
La parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en P.

1. Faire une figure en choisissant le carreau pour unité et calculer AB.
2. Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs que peut prendre x ?
3. Soit la fonction f qui, à chaque valeur de x, associe l'aire du trapèze $CAMP$.
   - **a.** Calculer $f(0)$ et $f(5)$ à partir des considérations géométriques.
   - **b.** Plus généralement, démontrer que : $f(x) = 2,4x - 0,24x^2$.
   - **c.** Dresser un tableau de valeurs de la fonction f sur $\mathcal{D}$ avec un pas de $0,5$.
   - **d.** Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
   - **e.** Estimer la position du point M pour que l'aire du trapèze $CAMP$ soit égale à 4 cm^2.
   - **f.** Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de l'aire du trapèze $CAMP$?

EXERCICE 292 **10 minutes**

La distance de freinage, exprimée en mètres, d'un véhicule notée d et sa vitesse, exprimée en kilomètres par heure, est notée v.

On admet ici que d est une fonction de la vitesse, définie par $d(v) = \dfrac{v}{3,6} + \dfrac{v^2}{200}$.

1. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

v	20	40	60	80	100	120	140	160
d								

2. Tracer la courbe sur la calculatrice en réglant judicieusement la fenêtre d'affichage.
3. En utilisant le graphique précédent, déterminer la vitesse du véhicule lorsque $d = 80$ m, puis $d = 150$ m.

EXERCICE 293 **20 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Tracer la courbe de la fonction f sur la calculatrice sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle. On notera α cette solution.
3. Par lecture graphique, donner un encadrement de α en deux entiers consécutifs.
4. A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	-1	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0
$f(x)$											

   En déduire un encadrement de α au dixième.
5. A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats au centième si nécessaire) :

x	$-0,7$	$-0,69$	$-0,68$	$-0,67$	$-0,66$	$-0,65$	$-0,64$	$-0,63$	$-0,62$	$-0,61$	$-0,6$
$f(x)$											

   En déduire un encadrement de α au centième.
6. En procédant comme dans les deux questions précédentes, donner un encadrement de α à 10^{-3}, puis à 10^{-4}.
   En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de α.
7. Pour obtenir ce résultat, combien de calculs ont été effectués par la calculatrice (questions 4 à 6) ?
   Tom n'aime pas faire des réglages successifs sur sa calculatrice et fait donc le réglage suivant : début à -1, fin à 0 et pas de $0,0001$.
   Dans le cas de Tom, combien de calculs va effectuer sa calculatrice ? Sa méthode est-elle « rentable » ?

☞ Nous avons utilisé ici la technique dite du « balayage ».

EXERCICE 294 **10 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, résoudre l'équation $x^4 - x + 1 = 0$ sur $[0 ; 2]$.
On donnera un encadrement à 10^{-3} de la (ou des) solution(s), puis une valeur approchée à 10^{-2}.
☞ Bien choisir le réglage de la fenêtre.

2.2 Variations de fonctions

2.2.1 Point de cours

Définition 1 : soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que
- f est croissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est décroissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.

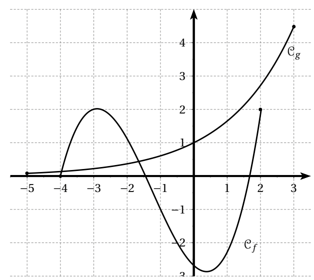
☞ Etudier les variations de la fonction f c'est préciser les intervalles sur lesquels elle est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante. Ces résultats sont résumés dans un tableau de variations. Une double barre indique une valeur interdite.

Définition 2 : soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que
• f admet un **maximum** en a sur I lorsque $f(a)$ est la **plus grande valeur** de f sur I, c'est-à-dire $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$;
• f admet un **minimum** en a sur I lorsque $f(a)$ est la **plus petite valeur** de f sur I, c'est-à-dire $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.

2.2.2 Exercices d'application de cours

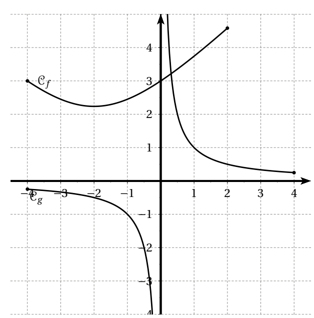
EXERCICE 295 **5 minutes**

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.
Pour chaque fonction préciser son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations. Préciser les éventuels minima et maxima de ces fonctions.



EXERCICE 296 **5 minutes**

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.
Pour chaque fonction préciser son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations. Préciser les éventuels minima et maxima de ces fonctions.
☞ Attention, la courbe $\mathcal{C}_g$ est en deux parties.



EXERCICE 297 **5 minutes**

Soit f une fonction telle que :
• f est définie sur $[-6;4]$;
• l'image de -6 par f est 1 ;
• $f(4) = 5$;
• f est croissante sur $[-6;-2]$ et sur $[1;4]$;
• f est décroissante sur $[-2;1]$;
• le maximum de f est 6 ;
• le minimum de f est -1.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Quel est le nombre d'antécédents par f de 0 ? de 2 ? de -2 ?

EXERCICE 298 **5 minutes**

Ci-dessous sont représentés les tableaux de variations et les représentations graphiques de quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

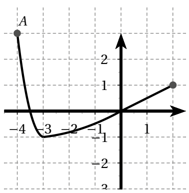
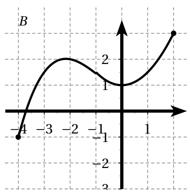
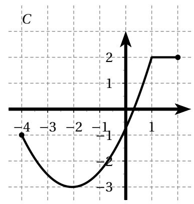
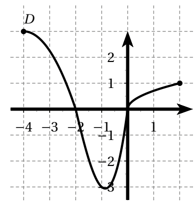
Associer chaque tableau de variations à la représentation graphique correspondante :

x	-4		-2		1		2
f_1	-1	↘	-3	↗	2	→	2

x	-4		-3		0		2
f_2	3	↘	-1	↗	0	↗	1

x	-4		-1		0		2
f_3	3	↘	-3	↗	0	↗	1

x	-4		-2		0		2
f_4	-1	↗	2	↘	1	↗	3

EXERCICE 299 **5 minutes**

Ci-dessous sont représentés les tableaux de variations et les représentations graphiques de quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

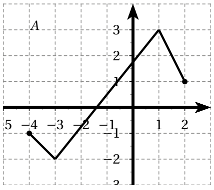
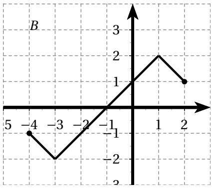
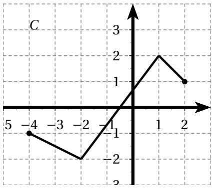
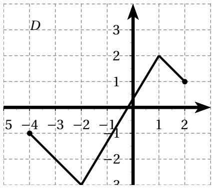
Associer chaque tableau de variations à la représentation graphique correspondante :

x	-4		-2		1		2
f_1	-1	↘	-3	↗	2	↘	1

x	-4		-3		1		2
f_2	-1	↘	-2	↗	3	↘	1

x	-4		-3		1		2
f_3	-1	↘	-2	↗	2	↘	1

x	-4		-2		1		2
f_4	-1	↘	-2	↗	2	↘	1

EXERCICE 300 **10 minutes**

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-2		1		3		5
f	-3	↗	-1	↘	-6	↗	4	↘	-2

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Indiquer le sens de variations de la fonction f.

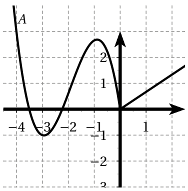
3. Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.

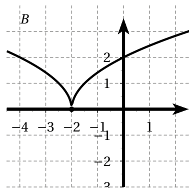
4. Donner l'image de -2.

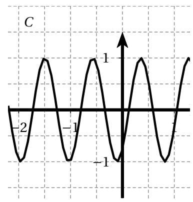
5. Donner un encadrement de $f(0)$.
6. Combien 0 a-t-il d'antécédents ?
7. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

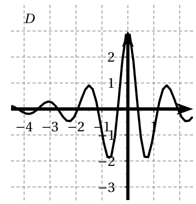
EXERCICE 301 **5 minutes**

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer si la fonction représentée admet un extremum absolu et/ou relatif.









EXERCICE 302 **5 minutes**

Pour chaque tableau de variations ci-dessous, déterminer si la fonction représentée admet un maximum et/ou un minimum, préciser s'il est absolu ou relatif.

x	-10	1	10
f_1	9 ↘	-3	↗ 7

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f_2	↘	-9	↗ 9	↘

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
f_3	↗	0	↘ -5	↗

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f_4	-1 ↗	6	↘ -1

EXERCICE 303 **10 minutes**

On considère la fonction f, définie sur $[-3\,;\,5]$ et dont le tracé de la courbe représentative est effectué d'un seul trait. Un tableau de valeurs de cette fonction f est donné ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	$0,5$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{8}{3}$	4	5
$f(x)$	2	1	$0,5$	$-0,5$	$0,5$	$1,5$	2	$\sqrt{5}$	$-0,5$	-2

1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou indécidables. Justifier les réponses.

a. La fonction f est décroissante sur $[0\,;\,1]$.
b. La fonction f est décroissante sur $[-3\,;\,0]$.
c. La fonction f ne s'annule qu'une fois.
d. La valeur maximale de f est $\sqrt{5}$.

2. Supposons à présent que la fonction admette le tableau de variations suivant :

x	-3	0	$\frac{8}{3}$	5
f	2 ↘	$-0,5$	↗ $\sqrt{5}$ ↘	-2

Reprendre les affirmations précédentes avec ces nouvelles données.

EXERCICE 304 **10 minutes**

Soit f une fonction définie sur $[-10\,;\,10]$ dont voici le tableau de variations :

x	-10	-5	-3	-1	0	5	6	10
f	5			8				0
			2		5		-2	
		-2				-6		

Réaliser, si possible, la comparaison des images des nombres suivants :

a. -5 et 5 **b.** -4 et 5 **c.** -6 et 4 **d.** -2 et 8

e. -3 et -2 **f.** 1 et 2 **g.** -8 et -4 **h.** $-1,5$ et 8

EXERCICE 305 **10 minutes**

On donne $f(x) = (x+1)^2$ et $I = [-1; +\infty[$.

1. Montrer par encadrements successifs que, pour a et b appartenant à I, si $-1 \leqslant a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

2. Que peut-on en déduire pour la fonction f sur l'intervalle I ?

EXERCICE 306 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty; -2[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{5}{x+2}$.

Soient a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$.

Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f sur l'intervalle I ?

EXERCICE 307 **15 minutes**

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 6x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b deux réels quelconques.

1. Montrer que $f(b) - f(a) = (b-a)(a+b-6)$

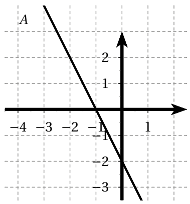
2. En déduire que si $3 \leqslant a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
Quel est le sens de variation de f sur $[3\,;\,+\infty[$?

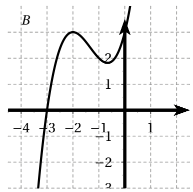
3. Montrer de même que si $a < b \leqslant 3$ alors $f(a) > f(b)$.
Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,3]$?

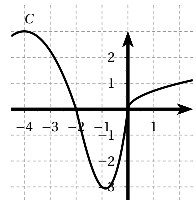
4. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

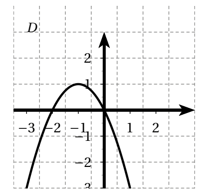
EXERCICE 308 **5 minutes**

Pour chaque fonction f, dont la courbe représentative est tracée ci-dessous, déterminer le domaine sur lequel $f(x) \geqslant 0$.



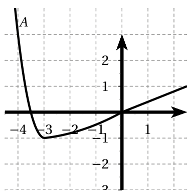


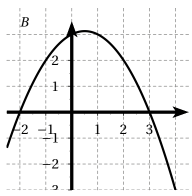


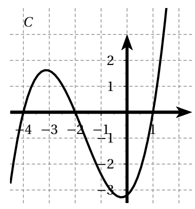


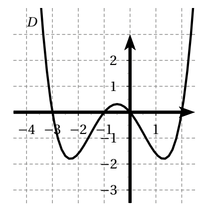
EXERCICE 309 **5 minutes**

Dresser les tableaux de signes des fonctions représentées ci-dessous.









2.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 310 **10 minutes**

Le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f	5 ↘	3 ↗	7 ↘	-5 ↗	3

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie, fausse ou indécidable. Justifier chaque réponse.

1. 3 admet le nombre -2 comme antécédent.

2. $f(1) > f(-1)$.

3. $f(-5)$ est un entier.

4. Le minimum de la fonction est -5.

5. Pour tout $x \leqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$.

6. Le nombre 4 admet un unique antécédent.

7. $f(-3) > f(3)$.

EXERCICE 311 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[-10\,;\,10]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10	-4	2	6	10
f	3 ↗	4 ↘	-3 ↗	2 ↘	-1

Comparer, si possible, les nombres suivants :

1. $f(3)$ et $f(4)$

2. $f(-3)$ et $f(3)$

3. $f(-8)$ et $f(1)$

4. $f(-8)$ et $f(8)$.

EXERCICE 312 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[-10\ ;\ 15]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10	-4	-2	0	1	5	8	10	12	15
f	2	4	0	-3	0	5	7	5	0	-2

1. Comparer, si possible, les nombres suivants :
   a. $f(-3)$ et $f(6)$ **b.** $f(-6)$ et $f(13)$ **c.** $f(-1)$ et $f(14)$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
3. Déterminer le tableau de signe de la fonction f.

EXERCICE 313 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$

1. Vérifier l'égalité $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 314 **10 minutes**

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a et b deux réels de I, $a \neq b$.
Démontrer que :

1. si $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
2. si $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

EXERCICE 315 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$.
Etudier le sens de variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.
☞ On pourra étudier le signe de $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ et utiliser les résultats de l'exercice précédent.

EXERCICE 316 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$.
Etudier le sens de variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 317 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x^2$.
Etudier le sens de variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 318 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{3\right\}$ par $f(x)=\dfrac{3}{2x-6}-4$.

Etudier le sens de variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 3[$ et $]3\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 319 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 320 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x)=(x-3)^2$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 321 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

1. Etudier le sens de variation de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 322 **15 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x)=2x^2-6x+5$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que pour tous réels a et b, $a\neq b$, $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=2(a+b-3)$.
3. Etudier le sens de variation de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 323 **10 minutes**

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)(2x+3)-(x-2)(x+4)$

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de $f(x)$.
2. Factoriser l'expression de $f(x)$.
3. Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.
4. En déduire le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 324 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+3)(1-x)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de $f(x)$.
2. Vérifier que pour tout x réel, $f(x)=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$

3. En déduire l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 325 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -16x^2 + 72x - 78$.

1. Vérifier que $f(x) = 3 - (4x - 9)^2$.
2. Etudier le sens de variation de f sur $\left]-\infty; \frac{9}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{9}{4}; +\infty\right[$.
3. Etablir le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'extremum de la fonction f.

Exercice 326 **10 minutes**

Le coût moyen de production exprimé en milliers d'euros est donné par $C(q) = q^2 - 12q + 56$ où $q \in]0; 10]$ est le nombre de milliers d'articles fabriqués.

Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ?

Exercice 327 **10 minutes**

Une entreprise fabrique chaque jour x objets. Sa capacité maximale de production est de 50 objets par jour.
Une étude de marché a permis de déterminer que, pour un nombre x d'objets, le coût de production, noté $C(x)$, est donné par la relation : $C(x) = 350 + 2x^2$.

1. On note $R(x)$ le revenu. Chaque objet étant vendu 140 €, exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Le bénéfice réalisé par l'entreprise est la différence entre les revenus des ventes et les coûts de production. On note $B(x)$ le bénéfice réalisé.
Démontrer que $B(x) = 2100 - 2(x - 35)^2$.
3. Pour quelle production journalière le bénéfice sera maximal ? Quel sera-t-il ?

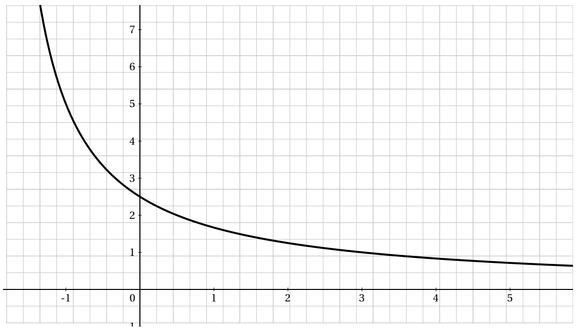
Exercice 328 **15 minutes**

Soit ABC un triangle de hauteur $[AH]$ tel que $AB = 5$, $BC = 8$ et $AH = 4$.
Soit K un point de $[AH]$ tel que $AK = x$, la parallèle à (BC) passant par K coupe respectivement $[AB]$ et $[AC]$ en Met N. Soit P et Q les projetés orthogonaux de M et N sur (BC).

1. Construire la figure.
2. Exprimer, en fonction de x, l'aire, noté $\mathcal{A}(x)$, du rectangle $MNQP$.
3. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = 8 - 2(x - 2)^2$.
4. Etudier les variations de $\mathcal{A}$ sur $[0 ; 4]$.
5. Pour quelle valeur de x, l'aire est-elle maximale ? Quel est ce maximum ?

Exercice 329 **20 minutes**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.

2. Soit a et b deux réels tels que $-2 < a < b$

- **a.** Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
- **b.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2,5 - x$.

- **a.** Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

- **b.** Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère orthogonal précédent.

4. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 - 0,5x}{x+2}$.

b. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2.3 Fonctions affines

2.3.1 Point de cours

Définition : soient a et b deux nombres réels fixés. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est la **fonction affine** associée aux coefficients a et b.

Propriété 1
• La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = ax+b$ est la **droite d'équation** $y = ax+b$.
• Réciproquement, si la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une droite alors f est **une fonction affine**.

Propriété 2
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ de courbe représentative $\mathcal{D}$.
• Le réel a est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$.
• Le réel b est l'ordonnée à l'origine.

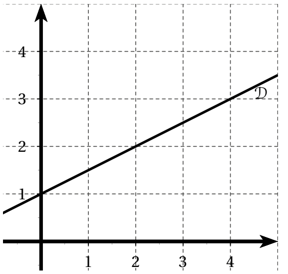
Remarque : si $b = 0$, la fonction est appelée fonction linéaire, elle est représentée par une droite passant par l'origine.

Propriété 3
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, a et b étant deux réels fixés.
Pour tous réels x_1 et x_2 avec $x_1 \neq x_2$, on a $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Le coefficient a est le **taux d'accroissement** de f entre x_1 et x_2.

Propriété 4
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, a et b étant deux réels fixés.
• Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

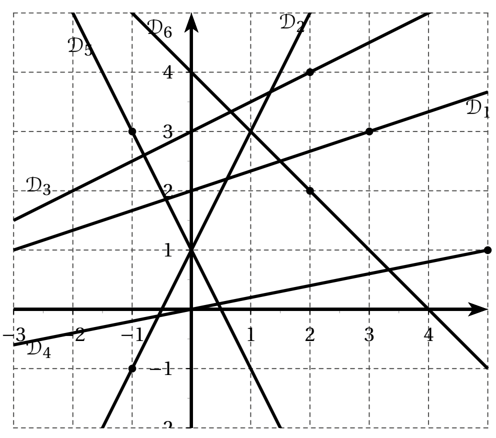
2.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 330 **5 minutes**
La droite $\mathcal{D}$ est la représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$.



1. Déterminer par lecture graphique $f(0)$. En déduire la valeur de b.
2. Déterminer $f(2)$ et $f(4)$.
3. Calculer $\dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$. En déduire la valeur de a.
4. Donner l'expression de f.

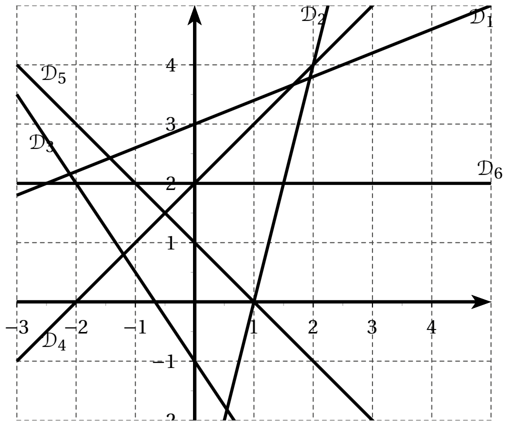
EXERCICE 331 **5 minutes**
Les droites $\mathcal{D}_1, \cdots, \mathcal{D}_6$ sont les représentations graphiques des fonctions affines $f_1, \cdots, f_6$.
Définir chacune de ces fonctions.



EXERCICE 332 **5 minutes**

Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$,$\cdots$, $\mathcal{D}_6$ sont les représentations graphiques des fonctions affines f_1, f_2, $\cdots$, f_6.

Définir chacune de ces fonctions.



EXERCICE 333 **5 minutes**

1. Dans un même repère, tracer les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 5$.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 334 **5 minutes**

1. Dans un même repère, tracer les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ et $g(x) = -2x + 9$.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 335 **5 minutes**

Compléter le tableau de valeurs suivants, sachant que f est une fonction affine.

x	-2	2	3	5	10	15
$f(x)$	-5	1				

EXERCICE 336 **5 minutes**

Compléter le tableau de valeurs suivants, sachant que f est une fonction affine.

x	-1	1	2	5	10	15
$f(x)$	3					13

EXERCICE 337 **10 minutes**

Déterminer une fonction affine f vérifiant les conditions :

1. $f(2) = 1$ et $f(5) = 7$.
2. $f(-2) = 7$ et $f(5) = 1$.
3. $f(2) = 5$ et $f(3) = 7$.
4. $f(-2) = 1$ et $f(-5) = 11$.
5. $f(2) = 3$ et $f(3) = 9$.
6. $f(3) = -2$ et $f(6) = -3$.

EXERCICE 338 **5 minutes**

Un article subit une augmentation de 5%. Soit x son prix avant augmentation.
Déterminer une fonction affine qui permet de passer de x au prix de l'article après augmentation.
Cette fonction affine est-elle linéaire ?

EXERCICE 339 **5 minutes**

Un article subit une réduction de 2%. Soit x son prix avant augmentation.
Déterminer une fonction affine qui permet de passer de x au prix de l'article après réduction.
Cette fonction affine est-elle linéaire ?

EXERCICE 340 **10 minutes**

Les fonctions f vérifiant les conditions suivantes peuvent-elles être affines ?

1. $f(0) = \dfrac{5}{3}$, $f(2) = \dfrac{19}{3}$ et $f(-4) = -\dfrac{23}{3}$.
2. $f(21) = 34$, $f(34) = 55$ et $f(55) = 89$.
3. $f(1) = 2\sqrt{2}$, $f\left(2\sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 341 **5 minutes**

Déterminer les variations des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 2x + 4$.
2. $f_2(x) = 0,2x - 3$.
3. $f_3(x) = -3x$.
4. $f_4(x) = 0,99x + 4$.
5. $f_5(x) = (3 - \pi)\,x + \sqrt{2}$.
6. $f_6(x) = \dfrac{3 - 5x}{7}$.

EXERCICE 342 **10 minutes**

Etudier le signe des fonctions affines suivantes et dresser leur tableau de signes.

1. $f_1(x) = 2x + 3$.
2. $f_2(x) = -3x - 6$.
3. $f_3(x) = -\sqrt{3}x + \sqrt{6}$.
4. $f_4(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}$.
5. $f_5(x) = 3 - 5x$.
6. $f(3) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 343 **5 minutes**

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + b$ et $f(0) = -3$.
Lequel des quatre tableaux de variations ci-dessous est celui de la fonction f ?

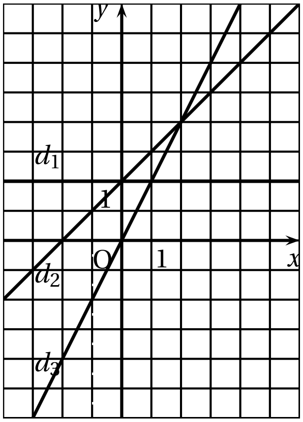
x	$-\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$
$A(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$B(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$
$C(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$D(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

EXERCICE 344 **5 minutes**



On considère les fonctions f, g et h définies par :
$f(x) = x+2$, $g(x) = 2$, $h(x) = 2x$.
Compléter le tableau ci-dessous en associant à chacune d'elles la droite qui lui correspond dans le repère.

Fonction affine	Droite correspondante
$f(x) = x+2$	
$g(x) = 2$	
$h(x) = 2x$	

EXERCICE 345 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) On considère les points $A(3\ ;\ 1)$ et $B(2\ ;\ -2)$.

1. Placer les points A et B dans le repère.
2. On considère la fonction affine $f(x) = mx + p$ dont la représentation graphique est la droite (AB).
   - a. Déterminer les images de 2 et de 3 par la fonction f.
   - b. Déterminer les valeurs de m et p de la fonction f.

2.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 346 **10 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la « proportionnalité des écarts », c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que pour tous réels distincts x_1 et x_2, on ait $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

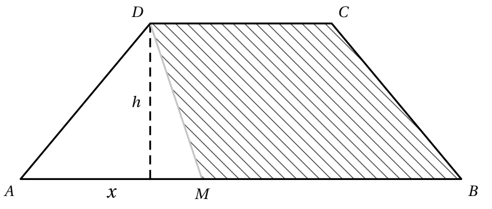
1. Montrer que, pour tout x réel on a $f(x) = ax + b$.
2. Conclure.

EXERCICE 347 **15 minutes**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$
   - a. Donner le tableau du signe de $f(x)$.
   - b. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   - c. Tracer la courbe D_1 représentative de la fonction f dans un repère du plan.
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-2) = -3$ et $g(6) = 1$.
   - a. Tracer la courbe D_2 représentative de la fonction g dans le repère précédent.
   - b. Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant \dfrac{x}{2} - 2$

EXERCICE 348 **10 minutes**

$ABCD$ est un trapèze de hauteur $h = 6$ avec $AB = 17$ et $CD = 7$.



A tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.
On note f la fonction telle que le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze $MBCD$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Justifier que $f(x) = 72 - 3x$.
3. Déterminer la position du point M pour que l'aire du trapèze $MBCD$ soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$.

EXERCICE 349 **10 minutes**

Définition : une fonction est dite **affine par morceaux** si elle est définie sur une réunion d'intervalles sur chacun desquels elle coïncide avec une fonction affine.
La courbe représentative d'une fonction affine par morceaux est donc composée de segments et éventuellement de demi-droites.

Soit f une fonction affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} -3-3x & \text{pour } x \leqslant -1 \\ x+1 & \text{pour } -1 < x \leqslant 3 \\ 7-x & \text{pour } x > 3 \end{cases}$.

1. Compléter les tableaux suivants :

Pour $x \leqslant -1$

x	-3	-1
$f(x)$		

Pour $-1 < x \leqslant 3$

x	0	3
$f(x)$		

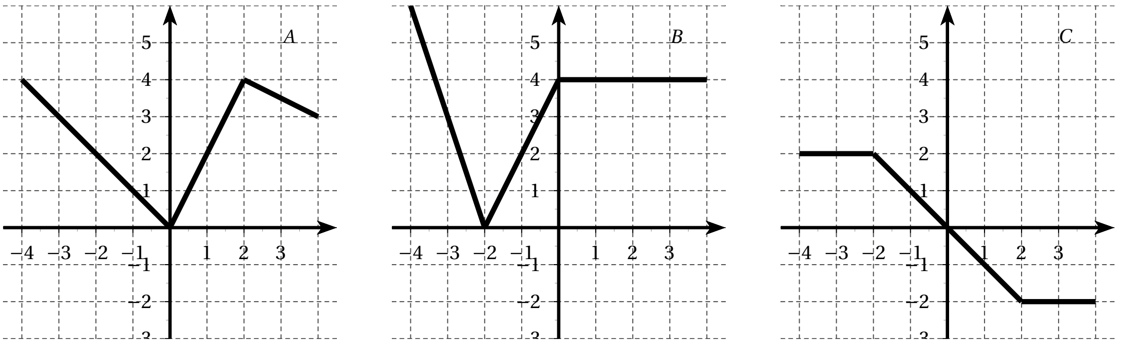
Pour $x > 3$

x	4	5
$f(x)$		

2. En déduire la représentation graphique de f.
3. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 350 **15 minutes**

Soit f une fonction affine par morceaux, définie sur $[-4\ ;\ 4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.
Dans chaque cas expliciter $f(x)$ en distinguant plusieurs intervalles.



EXERCICE 351 **15 minutes**

Un vélo, un scooter et une automobile font le même trajet de A vers B.

	Vélo	Scooter	Auto
Heure de départ	5 h	6 h	7 h
Vitesse moyenne	24 km/h	40 km/h	60 km/h

On désigne par $v(t)$, $s(t)$ et $a(t)$ les distances, en kilomètres, parcourues par le vélo, le scooter et l'automobile à l'heure t.

1. Exprimer $v(t)$, $s(t)$ et $a(t)$ en fonction de t.
2. Représenter dans un même repère ces trois fonctions affines.
3. A quelle heure le scooter doublera-t-il le vélo ? Vérifier par le calcul.
4. Dans quel intervalle de temps l'automobile sera-t-elle entre le vélo et le scooter ?

EXERCICE 352 **15 minutes**

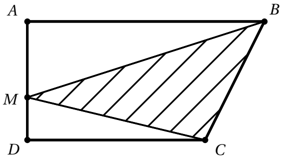
Dans une station de pompage d'eau chaude, pour un débit de x m^3, les dépenses s'élèvent à $19x + 1\,280$ milliers d'euros et les recettes s'élèvent à $35x$ milliers d'euros.
On note $D(x)$ les dépenses et $R(x)$ les recettes exprimées en fonction de x.

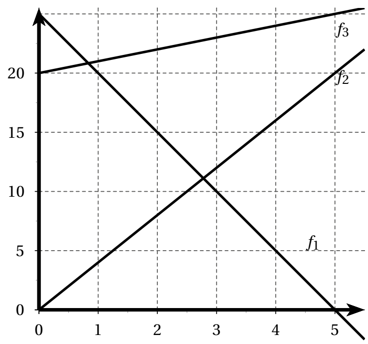
1. Représenter dans un même repère les fonction affines $D(x)$ et $R(x)$. On pourra prendre 1 cm pour 20 m^3 et 1 cm pour 1 000 euros.
2. Pour quel débit x les recettes équilibreront-elles les dépenses ? Vérifier graphiquement.
3. Pour quel débit x les recettes seront-elles égales à une fois et demie les dépenses ?

EXERCICE 353 **15 minutes**

On considère un trapèze rectangle $ABCD$, comme sur la figure ci-dessous. On place un point libre M sur le segment $[AD]$.

La distance AM en cm est notée x.





On a représenté les trois courbes représentatives des fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.

1. A quelle aire correspond chacune des droites? Justifier les réponses.
2. Retrouver les expressions des fonctions représentées.
3. En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

EXERCICE 354 **15 minutes**

1. Une ville était peuplée de 150 000 habitants en 1950, puis de 220 000 habitants en 1985. Si l'évolution se poursuit de façon affine, combien y aura-t-il d'habitants en 2022?
2. Un capital de 5 000 € placé en 2006 vaut 6000 € en 2010. Si l'évolution se poursuit de façon affine :
   a. Combien s'élèvera le capital en 2022?
   b. En quelle année atteindra-t-il 10 000 €?
3. Un bébé naît en mesurant 54 cm, et mesure 92 cm à 2 ans. Si sa taille évoluait de façon affine, combien devrait-il mesurer à 18 ans?
4. Une action achetée 132 € vaut 167 € au bout de 24 mois de spéculation. Si l'évolution se poursuit de façon affine, quand cette action doublera-t-elle son prix de départ?

EXERCICE 355 **20 minutes**

Le confiseur vend des boîtes remplies de bonbons et de chocolats à une grande surface.
Deux tarifs sont proposés au choix :
– **Tarif A** : 2 € la boîte tous frais compris.
– **Tarif B** : 300 € de frais quel que soit le nombre de boîtes achetées et la boîte est vendue 1,5 €.

1. Le nombre de boîtes achetées par la grande surface est noté x.
   a. On note S_A la somme à payer pour l'achat de x boîtes au tarif A. Exprimer $S_A$en fonction de x.
   b. On note S_B la somme à payer pour l'achat de x boîtes au tarif B. Exprimer S_B en fonction de x.
2. Tracer un repère orthogonal (O, I, J).
   Les unités choisies sont :
   – en abscisses : 1 cm pour 100 boîtes;
   – en ordonnées : 1 cm pour 100 €;

   Dans ce repère, tracer les droites (d) et (d'), courbes représentatives respectivement des fonctions $f(x) = 2x$ et $g(x) = 1,5x + 300$.

3. En déduire la formule la plus avantageuse pour la grande surface dans les deux cas suivants :

   a. pour l'achat de 500 boîtes ;

   b. pour l'achat de 700 boîtes.

4. On voudrait savoir à partir de quel nombre de boîtes achetées le tarif B devient plus avantageux pour la grande surface que le tarif A.
Déterminer ce nombre à l'aide de la résolution d'une équation.

EXERCICE 356 **15 minutes**

Pour le paiement de la garderie dans une école, on propose deux formules :

- Formule A : on paie 40 € pour devenir adhérent pour l'année scolaire puis on paye 10 € par mois de garderie.
- Formule B : pour les non adhérents, on paye 18 € par mois.

1. Pour chacune des formules, calculer le prix payé pour 10 mois de garderie.

2. On appelle x le nombre de mois de garderie.
On note $A(x)$ le prix payé avec la formule A et $B(x)$ le prix payé avec la formule B.
Exprimer $A(x)$ puis $B(x)$ en fonction de x.

3. Sur la calculatrice, en choisissant bien la fenêtre d'affichage, représenter graphiquement les fonctions $A(x) = 10x + 40$ et $B(x) = 18x$.

4. **a.** A partir du graphique, déterminer le nombre de mois pour lequel les prix à payer sont les mêmes.

   b. Retrouver ce résultat par le calcul.

5. A partir du graphique, déterminer la formule la plus avantageuse si on ne paie que 4 mois dans l'année.

6. On dispose d'un budget de 113 €. Combien de mois de garderie au maximum pourra-t-on payer si l'on choisit la formule A?

EXERCICE 357 **20 minutes**

Partie A

Nicolas désire louer des films chez Vidéomaths qui lui propose les deux possibilités suivantes pour une location à la journée :

Option A : Tarif à 3 € par film loué.

Option B : une carte d'abonnement de 15 € pour 6 mois avec un tarif de 1,50 € par film loué.

1. **a.** Compléter le tableau suivant :

Nombre de films loués en 6 mois / Prix payé en euros	4	8	10	12
Option A				
Option B				

b. Préciser dans chaque cas l'option la plus avantageuse.

2. On appelle x le nombre de films loués par Nicolas pendant 6 mois.

a. Exprimer en fonction de x la somme $A(x)$ payée avec l'option A.

b. Exprimer en fonction de x la somme $B(x)$ payée avec l'option B.

Partie B

On considère les fonctions définies par $f(x) = 3x$ et $g(x) = 1,5x + 15$.

Dans toute la suite du problème, on admettra que la fonction f est associée à l'option A et que la fonction g est associée à l'option B.

1. Construire, dans un repère (O, I, J) orthogonal les représentations graphiques des fonctions f et g.

2. Les représentations graphiques de f et g se coupent en E.

a. Lire sur le graphique les coordonnées de E.

b. Que représente les coordonnées de E pour les options A et B ?

3. Lire sur le graphique, la somme dépensée par Nicolas avec l'option A s'il loue 11 films.

4. Nicolas dispose de 24 €. Lire sur le graphique, le nombre de films qu'il peur louer en 6 mois avec l'option B.

5. Déterminer par le calcul à partir de quelle valeur de x l'option B est plus avantageuse que l'option A pour 6 mois.

Partie C

Nicolas ne veut dépenser que 36 € en 6 mois pour louer des films.

1. Lire sur le graphique de la **partie B** le nombre maximum de films qu'il peut louer chez Vidéomaths avec chaque option, avec 36 € en 6 mois.

2. Il se renseigne auprès de la société Cinémaths qui lui propose un abonnement de 7,50 € pour 6 mois permettant de louer chaque film à la journée pour 2,50 €.

L'objectif de cette partie est de déterminer parmi les trois tarifs, l'offre la plus avantageuse pour Nicolas.

Soit x le nombre de films loués par Nicolas en 6 mois.

a. Montrer que le prix payé par Nicolas chez Cinémaths est donné par $h(x) = 2,5x + 7,5$.

b. Calculer le nombre maximum de films que Nicolas peut louer en 6 mois avec 36 € chez Cinémaths.

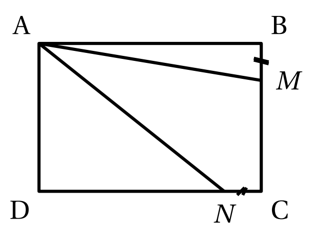
c. En déduire l'offre la plus avantageuse pour Nicolas.

EXERCICE 358 **15 minutes**

ABCD est un rectangle tel que AB = 6 cm et AD = 4 cm.

Les points M et N peuvent se déplacer respectivement sur les segments [BC] et [CD] de façon que

$BM = CN = x \qquad (0 < x \leqslant 4)$



1. Exprimer l'aire du triangle ABM en fonction de x.

2. a. Calculer la longueur DN en fonction de x.

b. Démontrer que l'aire du triangle ADN en fonction de x est $12-2x$.

3. a. Tracer les courbes représentatives des fonctions affines $f(x)=3x$ et $g(x)=12-2x$.

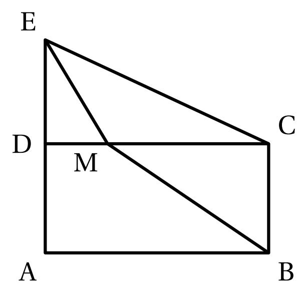
b. Calculer les coordonnées du point R, intersection de ces deux représentations.

4. a. Pour quelle valeur de x, les aires des triangles ABM et ADN sont-elles égales ? Justifier la réponse.

b. Pour cette valeur de x, calculer l'aire du quadrilatère AMCN.

EXERCICE 359 **15 minutes**

L'unité de longueur est le centimètre. La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
ABCD est un rectangle.
CDE est un triangle rectangle.
On donne DE = 6 BC = 4 AB = 7,5.
Le point M est situé sur le segment [DC], on pose $DM = x$



Partie A

1. Montrer que l'aire du triangle DEM est égale à $3x$.

2. a. Exprimer la longueur MC en fonction de x.

b. Montrer que l'aire du triangle BCM est égale à $15-2x$.

3. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle DEM est-elle égale à l'aire du triangle BCM ?

Partie B

1. Tracer la représentation graphique des fonctions f et g définies par

$$f(x)=3x \quad \text{et} \quad g(x)=15-2x$$

2. Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle DME est égale à l'aire du triangle DME.

3. Donner la valeur de cette aire.

EXERCICE 360 **15 minutes**

Deux sociétés proposent les formules d'abonnement suivantes :
M : Société Mobile France : 20 euros pour un forfait de 2h et 0,50 euro par minute de dépassement du forfait.
P : Société Portable Europe : 26 euros pour un forfait de 2h et 0,30 euro par minute de dépassement du forfait.

1. a. Quel est le prix à payer pour chacune des deux formules pour une durée d'utilisation de 1h 30 min ?

b. Calculer le prix à payer pour chacune des deux formules pour une durée d'utilisation de 2h 40 min.

2. Soit x la durée (en minutes) de dépassement au-delà du forfait de 2h.
Exprimer en fonction de x :

a. le prix P_1 à payer avec la formule M proposée par la société Mobile France ;
b. le prix P_2 à payer avec la formule P proposée par la société Portable Europe.

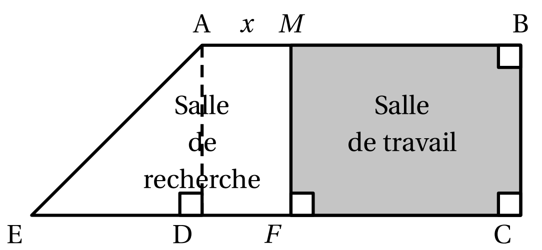
3. Tracer les droites d_1 et d_2 représentant respectivement les fonctions affines $f_1(x) = 0,5x+20$ et $f_2(x) = 0,3x+26$.

4. a. Résoudre l'équation $0,5x+20 = 0,3x+26$.
b. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
c. Vérifier graphiquement cette solution en faisant apparaître les pointillés utiles.

5. A partir de quelle durée d'utilisation la formule P est-elle plus économique que la formule M ?

EXERCICE 361 **15 minutes**

La figure ci-dessous est une vue de la surface au sol du C.D.I. d'un lycée.
Ce C.D.I. doit être réaménagé en deux parties distinctes : une salle de recherche et une salle de travail.
ABCE est un trapèze rectangle tel que AB = 9 m, BC = 8 m et DE = 6 m.
M est un point du segment [AB]. On pose $AM = x$ ($0 \leqslant x \leqslant 9$).



Rappel : l'aire d'un trapèze de hauteur h, de bases b et B, est donnée par $a = \dfrac{h(b+B)}{2}$.

La documentaliste souhaite que l'aire de la salle de travail soit égale à celle de la salle de recherche.

1. Dans cette question, uniquement, on suppose : $x = 1$. Calculer l'aire de trapèze $AMFE$ (salle de recherche), et l'aire du rectangle $MBCF$ (salle de travail).

2. a. Exprimer, en fonction de x, l'aire du trapèze $AMFE$.
b. Exprimer, en fonction de x, l'aire du rectangle $MBCF$.

3. Tracer sur la calculatrice les fonctions $f(x) = -8x+72$ et $g(x) = 8x+24$ pour $0 \leqslant x \leqslant 9$.

4. a. En utilisant le graphique, indiquer la valeur de x pour laquelle l'aire de la salle de travail est égale à celle de la salle de recherche, ainsi que l'aire correspondante.
b. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

EXERCICE 362 **15 minutes**

Une agence de location de voitures propose pour la location d'un minibus à la journée, trois tarifs :
Tarif A : 50 € par kilomètre parcouru;
Tarif B : 4 500 € fixe et 20 € par kilomètre parcouru;
Tarif C : un forfait de 8 000 € (kilomètres illimités).

Partie A

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de kilomètres parcourus	80	160	200
Prix à payer avec le tarif A			
Prix à payer avec le tarif B			
Prix à payer avec le tarif C			

2. Entourer le tarif le plus avantageux pour chacune des distances parcourues.
3. Expliquer pourquoi le prix à payer P_C correspondant au tarif C est constant.
4. Soit x le nombre de kilomètres parcourus en une journée.
   Exprimer en fonction de x, les prix à payer P_A et P_B correspondant respectivement aux tarifs A et B.

Partie B

1. Sur la calculatrice, avec une fenêtre bien réglée, tracer les représentations graphiques des fonctions a, b et c définies par :

$$a(x) = 50x \quad ; \quad b(x) = 20x + 4500 \quad \text{et} \quad c(x) = 8000.$$

2. Indiquer le prix à payer avec le tarif B, pour 100 km.
3. Indiquer le nombre de kilomètres que l'on peut parcourir pour 6 000 € avec le tarif A.

EXERCICE 363 **15 minutes**

Un site de vidéo propose différents tarifs pour le visionnage d'un film.

- Tarif A : 4 euros par film visionné.
- Tarif B : 2,50 euros par film visionné, après avoir payé un abonnement de 18 euros.
- Tarif C : abonnement de 70 euros pour un nombre illimité de films.

1. Compléter le tableau suivant indiquant le prix à payer pour 5 ou 15 ou 25 films, aux tarifs A, B ou C.

	5 films	15 films	25 films
Coût au tarif A			
Coût au tarif B			
Coût au tarif C			

On note x le nombre de films visionnés.

2. On admet que les trois tarifs peuvent être exprimés à l'aide des fonctions suivantes :
$f(x) = 2,5x + 18$ $\qquad g(x) = 70$ $\qquad h(x) = 4x$.

a. Associer à chaque tarif la fonction qui lui correspond.
b. Tracer dans un même repère les représentations graphiques de ces trois fonctions.

3. a. Résoudre l'équation : $4x = 2,5x + 18$.
b. Interpréter le résultat.
4. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $70 \leqslant 2,5x + 18$.
b. Retrouver ensuite le résultat par le calcul.
5. Donner le tarif le plus intéressant selon le nombre de films visionnés.

EXERCICE 364 **20 minutes**

Monsieur Martin habite Petitville. Monsieur Gaspard habite à une distance de 900 km de Petitville.
A huit heures du matin les deux personnes commencent à rouler l'un vers l'autre :
- Monsieur Martin quitte Petitville et roule à 60 km/h.
- Monsieur Gaspard se dirige vers Petitville et roule à 90 km/h.

On note x le temps écoulé depuis huit heures du matin (x est exprimé en heures). Ainsi, quand il est huit heures du matin, $x = 0$.
Après avoir roulé une heure, c'est-à-dire quand $x = 1$, monsieur Martin est à 60 km de Petitville et monsieur Gaspard est lui à 810 km de Petitville.

1. A quelle distance de Petitville monsieur Martin se situe-t-il quand $x = 4$? Quand $x = 10$?
2. A quelle distance de Petitville monsieur Gaspard se situe-t-il quand $x = 4$? Quand $x = 10$?
3. Exprimer en fonction de x la distance qui sépare monsieur Martin de Petitville.
4. Exprimer en fonction de x la distance qui sépare monsieur Gaspard de Petitville.
5. On donne les fonctions suivantes $f(x) = 60x$ et $g(x) = 900 - 90x$.
Compléter le tableau suivant :

x	0	1	4	10
$f(x)$				
$g(x)$				

6. Représenter graphiquement les fonctions f et g.
7. A l'aide d'une lecture graphique, déterminer :

a. La durée au bout de laquelle les deux personnes se croisent.
b. A quelle distance de Petitville se croisent-ils ?

8. a. Retrouver le résultat de la question **7. a.** en résolvant une équation.
b. Retrouver le résultat de la question **7. b.** par le calcul.

2.4 Fonction carré

2.4.1 Point de cours

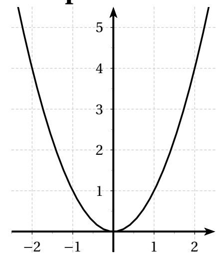
Définition : La fonction « carré » est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriétés :
• f est paire.
• f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
• La courbe représentative de f est une **parabole**.
• On pressent que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être « assez grand ». Nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
La fonction étant paire, nous aurons de même $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de f



Les fonctions $f(x) = ax^2$ avec a réel fixé

• Si $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Si $a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2.4.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 365 **5 minutes**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Démontrer que f est une fonction paire.

EXERCICE 366 **5 minutes**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.
  a. Comparer a^2 et ab.
  b. Comparer b^2 et ab.
  c. Comparer a^2 et b^2.
  d. Conclure.

2. Etudier de même le cas $a < b < 0$.

EXERCICE 367 **5 minutes**

Sans faire de calcul, comparer les nombres suivants :

1. $(-1,7)^2$ et $(-1,02)^2$
2. $2,3^2$ et $2,5^2$
3. $(3-\pi)^2$ et $(\pi+1)^2$
4. 3^2 et $(-2,5)^2$
5. $(-3,14)^2$ et π^2
6. $0,01^2$ et $(-0,02)^2$

EXERCICE 368 **5 minutes**

Etablir le tableau de variations des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 3x^2$
2. $f_2(x) = -\pi x^2$
3. $f_3(x) = \sqrt{2}x$
4. $f_4(x) = 0,25x^2$
5. $f_5(x) = 9,99x^2$
6. $f_6(x) = -\sqrt{3}x$

EXERCICE 369 **5 minutes**

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$, de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Comparer a et a^2 lorsque que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
2. Comparer a et a^2 lorsque que $a \geqslant 1$.
3. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

EXERCICE 370 **5 minutes**

1. Tracer dans un repère orthogonal la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
a. $f(x) = 16$
b. $f(x) = 4$
c. $f(x) < 9$
d. $f(x) \geqslant 16$
e. $f(x) \leqslant 1$
f. $f(x) > 4$
3. Déterminer graphiquement des approximations des solutions des équations et inéquations suivantes :
a. $f(x) = 12$
b. $f(x) = 5$
c. $f(x) < 2$
d. $f(x) \geqslant 20$
e. $f(x) \leqslant 10$
f. $f(x) > 15$

EXERCICE 371 **5 minutes**

Associer à chaque affirmation sa justification :

1. Un carré est toujours positif
2. $(-2,95)^2 > (-2,94)^2$
3. Tout réel admet un carré
4. $(-3,5)^2 = 3,5^2$
5. $123^2 < 124^2$

a. $f(x) = x^2$ est paire
b. $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
c. $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$
d. $f(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$
e. $f(x) = x^2$ admet pour minimum 0

EXERCICE 372 **10 minutes**

1. Sans les calculer, ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
$1^2 \quad 11^2 \quad 0,11^2 \quad 10,1^2 \quad 11,01^2 \quad 10,01^2 \quad 1,101^2 \quad 1,010^2$
2. Sans les calculer, ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
$(-7,7)^2 \quad (-0,77)^2 \quad (-70,7)^2 \quad (-0,7)^2 \quad (-70)^2 \quad (-0,707)^2 \quad (-7,07)^2 \quad (-7,007)^2$
3. Sans les calculer, ranger dans l'ordre décroissant les nombres suivants :
$3,2^2 \quad (-3,6)^2 \quad 6,3^2 \quad (-4,5)^2 \quad -4,5^2 \quad 4,2^2 \quad (-5,6)^2 \quad -5,6^2$

EXERCICE 373 **5 minutes**

1. Construire le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[-3\ ;\ 6]$.
2. Quels sont le minimum et le maximum de f sur cet intervalle ?

EXERCICE 374 **5 minutes**

1. Construire le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[-8\ ;\ 2]$.
2. Quels sont le minimum et le maximum de f sur cet intervalle ?

EXERCICE 375 **10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
2. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Trouver le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [2; 6]$.

EXERCICE 376 **10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)^2$.

1. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[3; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Trouver le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-2; 1]$.

EXERCICE 377 **10 minutes**

1. Déterminer un encadrement de $(x-1)^2$ si $x \in]2\ ;\ 6]$.
2. Déterminer un encadrement de $(x+4)^2$ si $x \in [-1\ ;\ 3]$.
3. Déterminer un encadrement de $(3x+2)^2$ si $x \in [3\ ;\ 10[$.
4. Déterminer un encadrement de $(2-5x)^2$ si $x \in [2\ ;\ 5]$.

EXERCICE 378 **10 minutes**

1. Déterminer un encadrement de $(x+1)^2$ si $x \in]-2\ ;\ 3]$.
2. Déterminer un encadrement de $(x+4)^2$ si $x \in [-8\ ;\ 0]$.
3. Déterminer un encadrement de $(2x+6)^2$ si $x \in [-4\ ;\ 2[$.
4. Déterminer un encadrement de $(2-x)^2$ si $x \in [-1\ ;\ 5]$.

EXERCICE 379 **5 minutes**

Dans chaque cas, dire si la parabole représentant la fonction est tournée « vers le haut » ou « vers le bas ». Donner les coordonnées du sommet.

1. $f_1(x) = -(x+1)^2 - 3$
2. $f_2(x) = \dfrac{5}{2} + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$
3. $f_3(x) = (x+2)^2 + 4$
4. $f_4(x) = 2 - 3\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

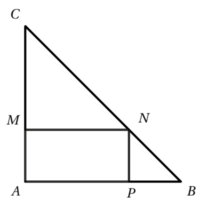
2.4.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 380 **10 minutes**

On se place dans un repère orthonormé $(O;\ I,\ J)$.

1. Représenter graphiquement la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
2. Représenter graphiquement la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2$.
   Comment peut-on passer de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_g$?
3. Représenter graphiquement la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-3)^2$.
   Comment peut-on passer de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_h$?

EXERCICE 381 **15 minutes**



ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 3$ m.
M, N et P sont des points des côtés de ce triangle tels que $AMNP$ soit un rectangle.
On note x la longueur AM en mètres et $A(x)$ l'aire en m^2 du rectangle $AMNP$.

1. A quel intervalle appartient x ?
2. Montrer que $A(x) = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$.
3. Quel est la valeur maximale de cette aire ?
   A quelle position du point M cela correspond-il ?

EXERCICE 382 **10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x + 2$.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = -3(x-1)^2 + 5$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Construire la représentation graphique de la fonction f.

EXERCICE 383 **10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 28x + 87$.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2(x+7)^2 - 11$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Construire la représentation graphique de la fonction f.

EXERCICE 384 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -4x^2 + 4x - 9$

1. Donner la forme canonique du trinôme f.

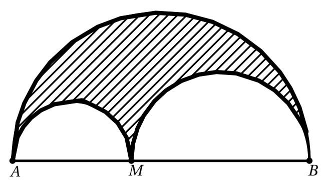
2. Démontrer, en utilisant cette forme canonique, que la fonction f admet un maximum et déterminer la valeur de ce maximum.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 385 **15 minutes**

On note $S(x)$ l'aire en gris, limitée par les trois demi-cercles de diamètres respetifs $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$.

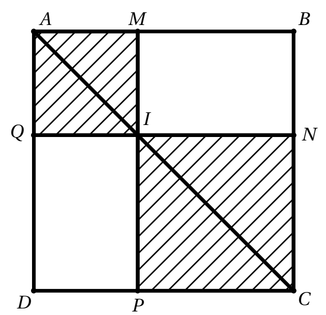
On suppose que $AB = 10$ et $AM = x$.

1. Sur quel intervalle varie x?
2. Calculer de $S(x)$.
   Démontrer que $S(x) = \dfrac{\pi}{4}x(10-x)$.
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(10-x)$.
   - **a.** Vérifier que $f(x) = 25-(x-5)^2$.
   - **b.** Dresser le tableau de variations de f.
4. Résoudre le problème posé.



EXERCICE 386 **15 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté 10 cm, M un point de $[AB]$.
La parallèle à (AD) passant par M coupe $[AC]$ en I et $[CD]$ en P.
La parallèle à (AB) en I coupe $[BC]$ en N et $[AD]$ en Q.
On souhaite déterminer la position de M sur $[AB]$ de façon que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à 58 cm^2.
On pose $x = AM$.



1. A quel intervalle appartient la variable x?
2. Quelle est la nature des quadrilatères $AMIQ$ et $INCP$?
3. Montrer que le problème se ramène à résoudre l'inéquation : (1) : $2x^2-20x+42 \leqslant 0$.
4. Vérifier que $2x^2-20x+42 = 2(x-5)^2-8$.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-5)^2-8$.
6. En déduire les solutions du problème.

EXERCICE 387 **15 minutes**

Soit la fonction f polynôme de degré 2, $f : x \to ax^2+bx+c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$).
L'objectif de cet exercice est de démontrer les propriétés suivantes :

• La courbe représentative de f est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a};\beta\right)$.

• Cette parabole admet un axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Vérifier l'égalité $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

2. Soit un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans $\left(O;\,\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan d'origine O et de coordonnées $(X\,;\,Y)$ dans le repère $\left(\Omega;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ avec $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

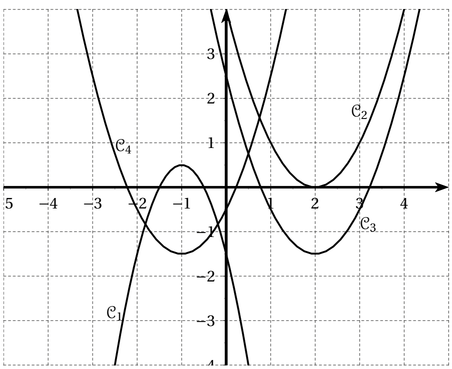
- **a.** Exprimer X et Y en fonction de x et y.
- **b.** En déduire que si M appartient à la courbe représentative de f alors $Y = aX^2$.
- **c.** Conclure.

EXERCICE 388 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $c \neq 0$, de courbe représentative $\mathcal{P}$.
L'objectif est de déterminer graphiquement la valeur de a.
D'après l'exercice **387**, f peut s'écrire $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$.
Soit S le sommet de $\mathcal{P}$, d'abscisse x_S et N un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $x_N = x_S + 1$.

1. Exprimer x_S et x_N en fonction de a et b.
2. Exprimer y_S et y_N en fonction de a, b et c.
3. Calculer $y_N - y_S$.
4. En déduire une méthode permettant de déterminer a graphiquement (avec la précision que permet le graphique).

EXERCICE 389 **10 minutes**



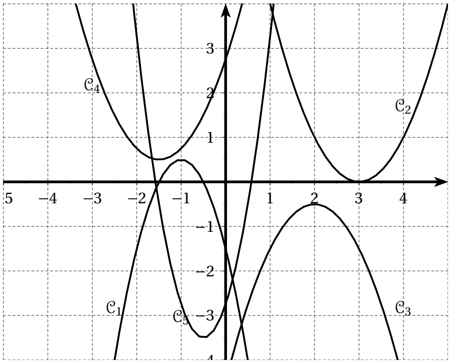
Les quatre paraboles ci-dessous sont les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k.
On sait que $f(x) = \dfrac{1}{2} - 2(x+1)^2$ et
$g(x) = (x-2)^2 - \dfrac{3}{2}$.

1. Associer les fonctions f et g à leur courbe.
2. Définir les fonctions h et k.

EXERCICE 390 **10 minutes**

Définir les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 donc les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ sont données ci-dessous.

☞ $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ coupent l'axe des ordonnées respectivement aux points de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{11}{4}\right)$ et $\left(0\,;\,-\dfrac{11}{4}\right)$



EXERCICE 391 **10 minutes**

Soit $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 3x + 2$.

1. Déterminer la forme canonique de la fonction f.
2. En déduire une factorisation de la fonction f, puis les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{P}$ et les coordonnées du sommet S.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 392 **15 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

1. Déterminer les antécédents de -2 par f.
2. Déterminer la forme canonique de la fonction f.
3. En déduire une factorisation de la fonction f, puis les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de f et les coordonnées du sommet S.
5. Etablir le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

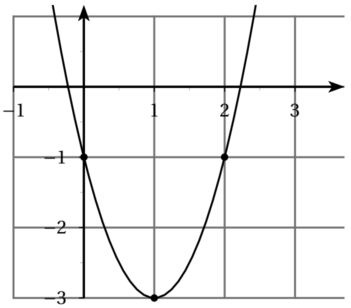
EXERCICE 393 **10 minutes**

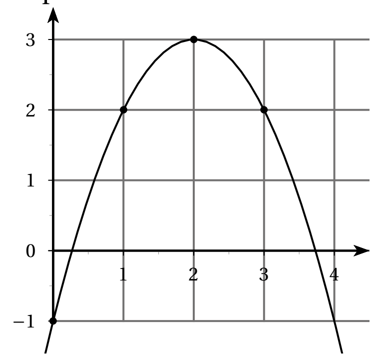
Afin d'orienter ses investissements, une chaîne d'hôtels réalise une analyse sur le bénéfice $B(x)$, en euros, par hôtel, en fonction du taux d'occupation des chambres x exprimé en %.
Pour x appartenant à $[20;90]$, on a : $B(x) = -x^2 + 160x + c$.

1. Calculer c sachant que, pour un taux d'occupation de 40%, le bénéfice est égal à 900 €.
2. Etudier les variations de la fonction B.
3. En déduire pour quelle valeur du taux d'occupation le bénéfice est maximal.

EXERCICE 394 **10 minutes**

Déterminer les équations $y = ax^2 + bx + c$ de ces deux paraboles :





EXERCICE 395 **10 minutes**

On coupe une ficelle de 30 cm de long en deux morceaux avec lesquels on forme deux carrés. Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des deux carrés soit la plus petite possible ?

EXERCICE 396 **10 minutes**

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les point $A(3\,;\,0)$ et la droite Δ passant par A est perpendiculaire à l'axe des abscisses.
Soit P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$ avec x réel positif.
On construit successivement :
• les points P' et P'' sur Δ tels que $AP' = AP'' = OP$;
• la droite $\mathcal{D}$ passant par P et parallèle à Δ. On note M' et M'' ses points d'intersection avec les droites (OP') et (OP'').

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées de M' et M'' en fonction de x.
3. En déduire une construction point par point des paraboles d'équation $y = \dfrac{1}{3}x^2$ et $y = -\dfrac{1}{3}x^2$.

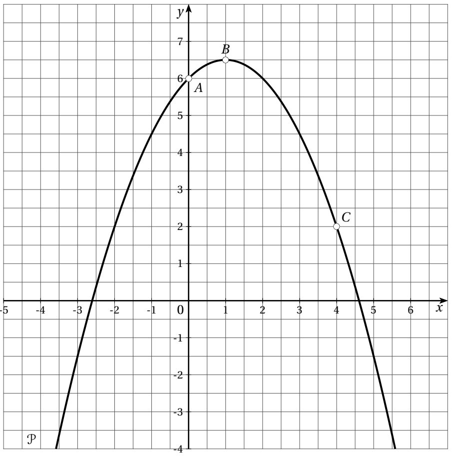
EXERCICE 397 **20 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et A est le point de coordonnées $(0\,;\,-1)$.
A tout point P appartenant à la partie positive de l'axe des abscisses, on associe :
• le point P' appartenant à l'axe des ordonnées tel que (PA) et (PP') soient orthogonales ;
• le point M tel que $OPMP'$ soit un rectangle.

1. Faire une figure.
2. Soit $(x\,;\,y)$ les coordonnées de M.
   Exprimer y en fonction de x.
3. En déduire que la courbe décrite par $\mathcal{C}$ décrite par M lorsque P varie sur l'axe des abscisses est contenue dans une parabole.
4. Construire plusieurs points de $\mathcal{C}$.

EXERCICE 398 **20 minutes**

La parabole $\mathcal{P}$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
La parabole passe par les points $A(0;6)$, $B\left(1;\dfrac{13}{2}\right)$ et $C(4;2)$.



1. Par lecture graphique, donner le tableau des variations de la fonction f.
2. Donner une équation de l'axe de symétrie de la courbe.
3. Justifier que $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{13}{2}$
4. Montrer que $a = -\dfrac{1}{2}$.
5. On considère l'algorithme suivant :

```
a ⟵ 4,6
b ⟵ 4,65
TANT QUE b − a > r
    m ⟵ (a + b)/2
    SI f(m) > 0
        ALORS a ⟵ m
        SINON b ⟵ m
    FIN SI
FIN TANT QUE
Afficher a.
Afficher b
```

a. Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	4,6	4,65
étape 1	0,05	oui	4,625	$-0,070$	non	4,6	4,625
étape 2							
étape 3							

b. Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

☞ Cette méthode s'appelle la recherche par dichotomie. Méthode très efficace qui consiste à réduire de moitié l'intervalle de recherche d'une solution à chaque étape.

EXERCICE 399 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5(x-1)^2 + 6,5$.

1. Ecrire en python deux fonctions :
   • une fonction prenant en paramètre la variable x et retournant la valeur de $f(x)$;

• la fonction *dichotomie* décrite dans l'algorithme de l'exercice précédent, prenant trois paramètres a, b et r.

2. Tester ces fonctions pour déterminer un encadrement à 10^{-5} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

3. Tester ces fonctions pour déterminer un encadrement à 10^{-2} de la solution négative de l'équation $f(x) = 0$. Que se passe-t-il ?

4. Remplacer la condition $f(m) > 0$ par $f(a) * f(m) > 0$.

  a. Expliquer l'intérêt de cette modification.

  b. En déduire un encadrement à 10^{-5} de la solution négative de l'équation $f(x) = 0$.

2.5 Fonction racine carrée

2.5.1 Point de cours

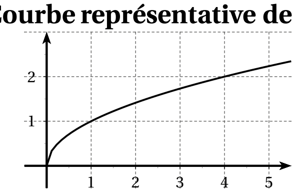
Définition : La fonction « racine » est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriétés :
• f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
• On pressent que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être « assez grand ». Nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $+\infty$

Courbe représentative de f



2.5.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 400 **5 minutes**

Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$ et f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Démontrer que $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

2. Déterminer le signe de $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 401 **5 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x} > 5$ **2.** $\sqrt{x} \leqslant 2$ **3.** $\sqrt{x} < 3$ **4.** $\sqrt{x} \geqslant 7$

EXERCICE 402 **5 minutes**

Sans calculs, ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
$\sqrt{2}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{35}$; 2; 6; 1.

EXERCICE 403 **5 minutes**

Comparer les réels a, a^2 et $\sqrt{a}$ lorsque a est un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

EXERCICE 404 **5 minutes**

Comparer les réels a, a^2 et $\sqrt{a}$ lorsque a est un réel strictement supérieur à 1.

EXERCICE 405 **10 minutes**

Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ dans les cas suivants :

1. $2 \leqslant x \leqslant 8$ **2.** $1 < x < 2$ **3.** $1,44 \leqslant x < 1,69$ **4.** $\pi^2 < x \leqslant 1 + 2\pi + \pi^2$.

EXERCICE 406 **5 minutes**

Compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

x	10^8	10^{20}	10^{60}		10^{500}		$10^{2\,000}$		$10^{10^{10}}$
$f(x)$				10^{100}		10^{500}		$10^{2\,000}$	

Que peut-on en déduire concernant le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$?

EXERCICE 407 **5 minutes**

Pour quelles valeurs de k le point $A(2;-2)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = k\sqrt{x}$.

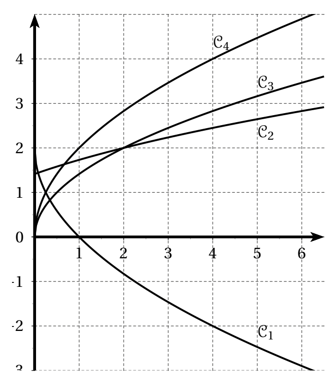
☞ $\mathbb{R}^+$ est une autre notation de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 408 **5 minutes**

Pour quelles valeurs de k le point $A(6;2)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = k\sqrt{x}$.

EXERCICE 409 **10 minutes**

Soit f, g, h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, $h(x) = \sqrt{x+2}$ et $k(x) = 2 - 2\sqrt{x}$.
A quelle courbe représentative correspond chaque fonction?



EXERCICE 410 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 411 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5 - 3\sqrt{x+2}$.

1. Justifier que f est définie sur $[-2\,;\,+\infty[$.

2. Etudier le sens de variation de f sur $[-2\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 412 **10 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{5-2x} + 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

2.5.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 413 **10 minutes**

L'objectif de l'exercice est de déterminer le lien entre les courbes représentatives des fonctions carré et racine.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

On note Δ la droite d'équation $y = x$ (droite appelée aussi « première bissectrice »). Soit M un point d'abscisse x , appartenant à Δ.

On note M_1 le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M et M_2 le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par M. I est le milieu du segment $[M_1\,;\,M_2]$.

1. Faire une figure.

2. Déterminer les coordonnées de M_1 et M_2 en fonction de x.

3. Quelle est la nature du triangle MM_1M_2 ?

4. Déterminer les coordonnées de I. Que peut-on en déduire ?

5. Quelle transformation transforme M_2 en M_1 ? En déduire la construction de $\mathcal{C}_g$.

EXERCICE 414 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ et le Ω le point de coordonnées $(2\,;\,3)$ dans ce repère.

Soit un point M du plan, on note $(x;\ y)$ ses coordonnées dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ et $(X\,;\,Y)$ dans le repère $\left(\Omega;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.

1. Etablir une relation entre x et X, puis entre y et Y.

2. Déterminer l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\Omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
3. En déduire la construction de $\mathcal{C}$.

EXERCICE 415 **15 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice précédent et le point Ω indiqué, dresser le tableau de variations de f et indiquer comment construire la courbe représentative de f.

1. $f(x) = \sqrt{x} + 2$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\Omega\,(0\,;\,2)$.
2. $f(x) = \sqrt{x-3}$ définie sur $[3\,;\,+\infty[$ et $\Omega\,(3\,;\,0)$.
3. $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ et $\Omega\,(-1\,;\,-2)$.

EXERCICE 416 **15 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice **414**, après avoir déterminer son domaine de définition et les coordonnées du point Ω, dresser le tableau de variations puis indiquer comment construire la courbe représentative de chaque fonction.

1. $f(x) = \sqrt{x-5} + 1$.
2. $f(x) = \sqrt{4-x} + 2$.
3. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$.
4. $f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$.

EXERCICE 417 **15 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice **414**, après avoir déterminer son domaine de définition et les coordonnées du point Ω, dresser le tableau de variations puis indiquer comment construire la courbe représentative de chaque fonction.

1. $f(x) = 2\sqrt{x-2}$.
2. $f(x) = -3\sqrt{x} + 1$.
3. $f(x) = 4\sqrt{x+1} - 2$.
4. $f(x) = 3 - 2\sqrt{4-x}$.

EXERCICE 418 **15 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Etudier les variations de f.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ I, J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2\,;\,0)$ et de rayon 3.
   a. Montrer que tout point M de $\mathcal{C}_f$ appartient à $\mathcal{C}$.
   b. Soit $\mathcal{E}$ le demi-cercle formé par les points de $\mathcal{C}$ d'ordonnées positives ou nulles.
   On note $\mathcal{E} = \left\{M(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \,\middle|\, y \geqslant 0\right\}$.
   Réciproquement, justifier que tous les points de $\mathcal{E}$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 419 **10 minutes**

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{5x+1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{x}+1}$.

1. Comparer les fonctions f et g lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$.
2. Comparer les fonctions f et g lorsque $x \geqslant 1$.

EXERCICE 420 **10 minutes**

Soient f et g deux fonctions définies sur $[3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{2x-6}$, de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Tracer sur une calculatrice graphique les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Quelle semble être la position relative de ces deux courbes ?
2. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 3$, $x - \sqrt{2x-6} = \dfrac{(x-1)^2+5}{x+\sqrt{2x-6}}$.
3. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

EXERCICE 421 **10 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels distincts. Démontrer que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{2a+2b+1}{\sqrt{2a^2+a+1}+\sqrt{2b^2+b+1}}$.
3. Démontrer que f est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 422 **15 minutes**

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{3x-1}\sqrt{5x+2}$ et $g(x) = \sqrt{(3x-1)(5x+2)}$.

1. **a.** A l'aide d'une calculatrice graphique, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
   b. D'après le graphique, déterminer l'intervalle sur lequel coïncident les fonctions f et g.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. **a.** Déterminer le tableau de signe de l'expression $(3x-1)(5x+2)$.
   b. En déduire l'ensemble de définition de g.

EXERCICE 423 **15 minutes**

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3-x}}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3-x}}{5x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions.
2. Développer $A = \left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3-x}\right)$.
3. Démontrer que les fonctions f et g sont égales sur l'ensemble $\left[-\dfrac{1}{4}\,;\,3\right] \setminus \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$.

EXERCICE 424 **10 minutes**

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = x + \sqrt{x}$.

1. Démontrer que $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = x - \sqrt{x}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

2.6 Fonction inverse

2.6.1 Point de cours

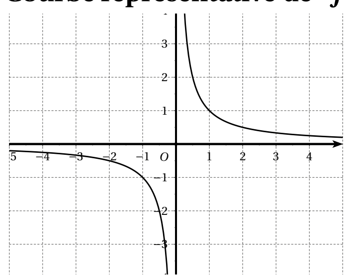
Définition : La fonction « inverse » est définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Propriétés :
• f est impaire. L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de f.
• f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et sur $[0\,;\,+\infty[$.
• La courbe représentative de f est une **hyperbole**.
• On pressent que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de 0 que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être « assez grand ». Nous dirons que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. La droite d'équation $y=0$ est **asymptote à la courbe**.
• On pressent que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être « assez proche de 0 ». Nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 (en restant positif). La droite d'équation $x=0$ est **asymptote à la courbe**.
La fonction étant impaire, nous aurons de même $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 (en restant négatif).

Tableau de variations de f

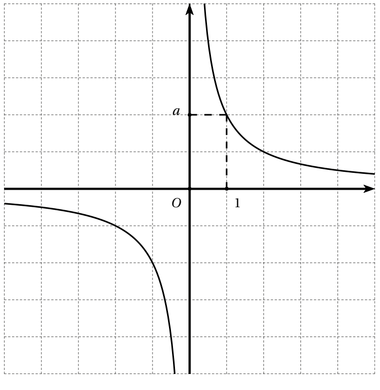
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

Courbe représentative de f

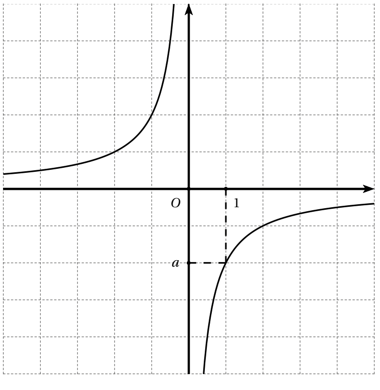


Les fonctions $f(x)=\dfrac{a}{x}$ avec a réel fixé

• Si $a>0$



• Si $a<0$



2.6.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 425 **5 minutes**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démontrer que la fonction f est impaire.

EXERCICE 426 **5 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$.

1. Démontrer que $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$.

2. Calculer $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. Démontrer de manière analogue que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.

EXERCICE 427 **5 minutes**

1. Sans calcul, ranger dans l'autre croissant les nombres suivants :
$\dfrac{1}{3}\quad\dfrac{1}{10}\quad\dfrac{1}{2}\quad\dfrac{1}{50}\quad\dfrac{1}{0,2}\quad\dfrac{1}{100}\quad\dfrac{1}{0,01}\quad\dfrac{1}{1000}$.

2. Sans calcul, ranger dans l'autre croissant les nombres suivants :
$\dfrac{1}{-3}\quad\dfrac{1}{-20}\quad\dfrac{1}{-0,2}\quad\dfrac{1}{-50}\quad\dfrac{1}{-2}\quad\dfrac{1}{-100}\quad\dfrac{1}{-0,1}\quad\dfrac{1}{-25}$.

3. Sans calcul, ranger dans l'autre croissant les nombres suivants :
$\dfrac{1}{3}\quad\dfrac{1}{-10}\quad\dfrac{1}{2}\quad\dfrac{1}{20}\quad\dfrac{1}{-0,2}\quad\dfrac{1}{10}\quad\dfrac{1}{0,2}\quad\dfrac{1}{0,01}$.

EXERCICE 428 **5 minutes**

Associer à chaque affirmation sa justification :

1. $-\dfrac{1}{25}>-\dfrac{1}{26}$

2. Tout réel non nul admet un inverse

3. $\dfrac{1}{132}<\dfrac{1}{123}$

4. $\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

a. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est impaire

b. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^\star$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$

d. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$

EXERCICE 429 **10 minutes**

Soient f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et $h(x)=f(x)-g(x)$.

1. Démontrer que $\dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}=1+\dfrac{1}{ab}$.

2. En déduire le sens de variation de f lorsque a et b sont strictement positifs, puis lorsque a et b sont strictement négatifs.

3. Calculer $h(1)$ et $h(-1)$.
4. Etablir le tableau de variations de h.
5. Etablir le tableau de signe de h.
6. En déduire la position relative des courbes représentatives de f et g.

EXERCICE 430 **5 minutes**

1. Etablir le tableau de variations de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $[2\,;\,10]$.
2. Quels sont les extrema de f sur cet intervalle ?

EXERCICE 431 **5 minutes**

1. Etablir le tableau de variations de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $[-5\,;\,-1]$.
2. Quels sont les extrema de f sur cet intervalle ?

EXERCICE 432 **5 minutes**

1. Etablir le tableau de variations de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $[-5\,;\,0[\cup]0\,;\,10]$.
2. f admet-elle un extremum sur son domaine de définition ?

EXERCICE 433 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Quel est l'intervalle décrit par $f(x)$ lorsque $x \in [1\,;\,20]$?
2. Quel est l'intervalle décrit par $f(x)$ lorsque $x \in [-10\,;\,-5]$?
3. Quel est l'intervalle décrit par $f(x)$ lorsque $x \in [-2\,;\,0[\cup]0\,;\,4[$?
4. Quel est l'intervalle décrit par $f(x)$ lorsque $x \in [-3\,;\,-1] \cup [1\,;\,3]$?

EXERCICE 434 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[-5\,;\,0[\cup]0\,;\,5]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$0,1$	$0,25$	$0,5$	1	2	4	5
$f(x)$							

2. Construire la courbe représentative de f sur $[-5\,;\,0[\cup]0\,;\,5]$.
3. Résoudre graphiquement dans $[-5\,;\,0[\cup]0\,;\,5]$ les équations et inéquations suivantes :

a. $f(x) = -1$
b. $f(x) = 2$
c. $f(x) = 0$
d. $f(x) \leqslant -2$
e. $f(x) > 1$
f. $f(x) < \dfrac{1}{4}$

4. Déterminer graphiquement une approximation des solutions des équations et inéquations suivantes :

a. $f(x) = -3$
b. $f(x) = 2,5$
c. $f(x) \leqslant -0,8$
d. $-3 < f(x) < -0,4$

EXERCICE 435 **10 minutes**

Dans chaque cas, établir un tableau de variations puis déterminer à quel intervalle (ou réunion d'intervalles) appartient $\dfrac{1}{x}$.

1. $0,2 \leqslant x \leqslant 5$

2. $x > 4$

3. $x \leqslant -0,1$

4. $-10 < x < -0,5$

EXERCICE 436 **10 minutes**

Dans chaque cas, établir un tableau de variations puis déterminer à quel intervalle (ou réunion d'intervalles) appartient x.

1. $0,2 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 5$

2. $\dfrac{1}{x} > 2$

3. $\dfrac{1}{x} \leqslant -0,1$

4. $-10 < \dfrac{1}{x} < -0,5$

EXERCICE 437 **10 minutes**

Soit x un réel tel que $1 \leqslant x < 5$.
Déterminer un encadrement de chaque expression :

1. $A = \dfrac{2}{x} - 3$ **2.** $B = 5 - \dfrac{1}{x}$ **3.** $C = \dfrac{1}{x+3} + 1$ **4.** $D = 2 - \dfrac{3}{1-2x}$

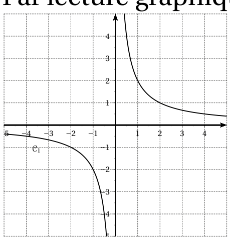
EXERCICE 438 **10 minutes**

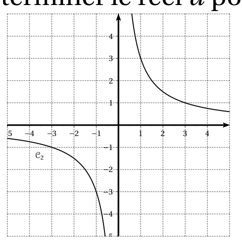
Soit x un réel tel que $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Déterminer un encadrement de chaque expression :

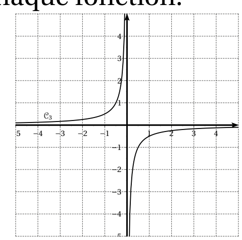
1. $A = \dfrac{1}{x+3}$ **2.** $B = 2 - \dfrac{2}{x^2+1}$ **3.** $C = \dfrac{3}{(x-1)^2+2} + 1$ **4.** $D = 1 - \dfrac{1}{5-2x}$

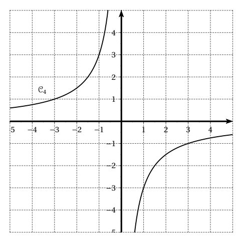
EXERCICE 439 **5 minutes**

Les fonctions représentées ci-dessous sont de la forme $x \mapsto \dfrac{a}{x}$.
Par lecture graphique, déterminer le réel a pour chaque fonction.









2.6.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 440 **10 minutes**

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

a. $-0,2 < x < -0,1$ **b.** $x \leqslant -\dfrac{2}{3}$ **c.** $\dfrac{2}{5} < x \leqslant 5$ **d.** $x \geqslant 10^{-2}$

2. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{2}{3}$

EXERCICE 441 **10 minutes**

Soit $x \neq -2$ un réel.

1. Pour quelles valeurs de x le réel $A = 1 - \frac{2}{x+2}$ admet-il un inverse ?

2. Donner l'expression en fonction de x de l'inverse de A.

EXERCICE 442 **10 minutes**

Soit f la fonction inverse définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants :

a. -10^2 **b.** $-\frac{5}{3}$ **c.** 5×10^{-3}

2. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur :

a. $-\sqrt{3}$ **b.** $3\sqrt{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

EXERCICE 443 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{3\right\}$ par $f(x) = \frac{4x+1}{x-3}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \neq 3$, $f(x) = 4 + \frac{13}{x-3}$.

2. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 444 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{6x+5}{2x-1}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = a + \frac{b}{2x-1}$.

2. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 445 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{3\right\}$ par $f(x) = \frac{2x+5}{3-x}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $x \neq -3$, $f(x) = a + \frac{b}{3-x}$.

2. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 446 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+3}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2+2}$.
2. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.
4. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10	-10^5	-10^{20}	-10^{99}	10	10^5	10^{20}	10^{99}
$f(x)$								

5. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 447 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x^2+30x}{x^2+6x+12}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+3)^2+3}$.
2. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -3]$.
4. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10	-10^5	-10^{20}	-10^{99}	10	10^5	10^{20}	10^{99}
$f(x)$								

5. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 448 **15 minutes**

Soit la fonction f homographique, définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c et d réels, $c \neq 0$), soit $\mathcal{C}_F$ sa courbe représentative.

L'objectif de cet exercice est de démontrer les propriétés suivantes :

• La courbe $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole.

• Cette hyperbole admet un centre de symétrie de coordonnées $\left(-\dfrac{d}{c}\ ;\ \dfrac{a}{c}\right)$.

• Les droites d'équations $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$ sont deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

1. Vérifier l'égalité $f(x) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$.
2. Soit un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan d'origine O et de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ dans le repère $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\Omega\left(-\dfrac{d}{c}\ ;\ \dfrac{a}{c}\right)$.
   a. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
   b. En déduire que si M appartient à la courbe représentative de f alors $Y = \dfrac{\alpha}{X}$ où α est un réel à déterminer.
   c. Conclure.

EXERCICE 449 **10 minutes**

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, donner le centre de symétrie et les asymptotes de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{3\right\}$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-6}$.

EXERCICE 450 **10 minutes**

En utilisant les résultats de l'exercice **448**, donner le centre de symétrie et les asymptotes de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-4\right\}$ par $f(x) = \dfrac{4-2x}{x+4}$.

EXERCICE 451 **15 minutes**

Soit A le point de coordonnées $(3\,;\,2)$. A chaque point M de coordonnées $(x\,;\,0)$ tel que $x \neq 3$, on associe les point M' point d'intersection de la droite AM avec l'axe des ordonnées.
On désigne par $f(x)$ l'ordonnée de M'.

1. Conjecturer géométriquement :
- le sens de variation de f ;
- le comportement de f pour les « grandes » valeurs positives et négatives de x ;
- le comportement de f pour les valeurs de x voisines de 3.

2. Démontrer que $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x-3}$.

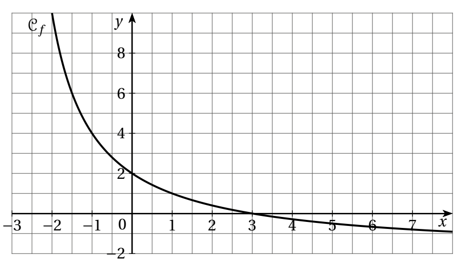
3. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

a. Donner une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

b. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et retrouver sur le graphique les propriétés conjecturées à la première question.

EXERCICE 452 **15 minutes**

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6-2x}{x+3}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.

2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

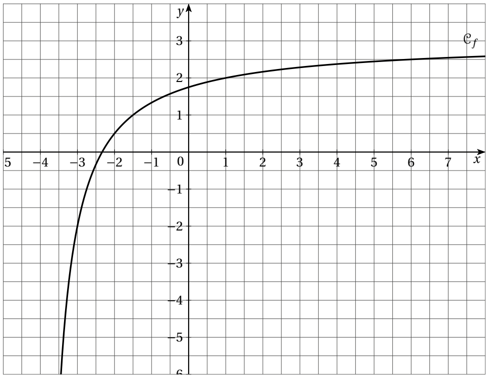
3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-3;+\infty[$ on a $f(x) - x = \dfrac{\dfrac{49}{4} - \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2}{x+3}$.

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite D d'équation $y = x$.

EXERCICE 453 **15 minutes**

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-4\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+7}{x+4}$.

1. a. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $]-4\,;+\infty[$, $f(x) = 3 - \dfrac{5}{x+4}$.
   b. Etudier les variations de la fonction f.
2. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.
3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = x - 3,5$.
   On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$, tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le même repère.



4. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-4\,;+\infty[$ on a :
   $$g(x) - f(x) = \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{361}{16}}{x+4}.$$
   b. Etudier le signe de $g(x) - f(x)$.
   En déduire les positions relatives des courbes C_f et D.

EXERCICE 454 **15 minutes**

Partie A

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 10$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Partie B

1. Exprimer, en fonction de x et y, l'aire et le périmètre d'un rectangle de dimensions x et y.
2. On considère les rectangles de dimensions x et y dont l'aire est égale au périmètre.
   a. Montrer que $y = \dfrac{2x}{x-2}$ avec $x \neq 2$.
   b. Existe-t-il des rectangles dont l'aire est égale au périmètre et dont un des côtés est inférieur ou égal à 2 ?
3. Tracer sur la calculatrice la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;12]$.
   En utilisant la courbe $\mathcal{C}$, déterminer tous les rectangles de dimensions entières, comprises entre 1 et 10, tels que l'aire est égale au périmètre

EXERCICE 455 **15 minutes**

Partie A

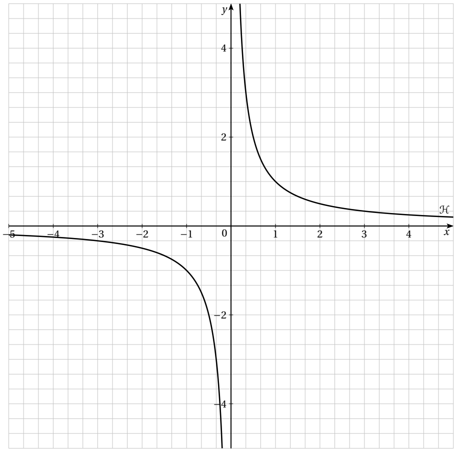
Montrer que pour tout réel x, $3x^2+2x-1=3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right]$.

Partie B

Soit f la fonction inverse définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

On note $\mathcal{H}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

L'hyperbole $\mathcal{H}$ est tracée ci-dessous.



1. a. Dans le même repère, tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=3x+2$.

b. Soient A le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées.

Calculer les coordonnées des points A et B.

2. La droite $\mathcal{D}$ coupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ en deux points M et N.

Calculer les coordonnées des points M et N.

3. Vérifier que les segments $[AB]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

2.7 Fonction cube

2.7.1 Point de cours

Définition : La fonction « cube » est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

Propriétés :

• f est impaire. L'origine du repère O est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

• f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

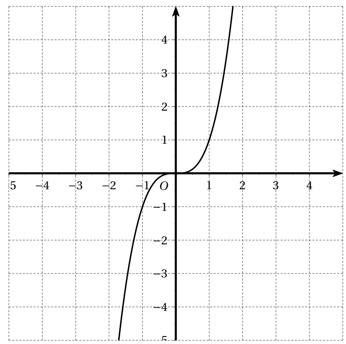
• On pressent que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être « assez grand ». Nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

La fonction étant impaire, nous aurons de même $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de f



Propriété : quel que soit a réel, $x^3 = a \iff x = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

☞ $\sqrt[3]{a}$ se lit « racine cubique de a ».

2.7.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 456 **5 minutes**

Associer à chaque affirmation sa justification :

1. $-3,14^3 = (-3,14)^3$
2. $2021^3 < 2022^3$
3. $(-1234)^3 > (-2345)^3$
4. Tout réel admet un cube

a. $f(x) = x^3$ est impaire
b. $f(x) = x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$
c. $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$
d. $f(x) = x^3$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 457 **5 minutes**

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est une fonction impaire.

EXERCICE 458 **10 minutes**

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, a et b deux réels distincts,

1. Vérifier que $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.
2. En déduire une expression simplifiée de $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$.
3. Etudier le signe de $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ lorsque a et b sont positifs, puis lorsque a et b sont négatifs.
4. En déduire le sens de variation de la fonction f.

EXERCICE 459 : Une autre méthode **10 minutes**

1. Supposons a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.

   a. Comparer a^3 et a^2b, puis b^3 et a^2b.

   b. En déduire la comparaison entre a^3 et b^3.

   c. Conclure.

2. Procéder de manière analogue lorsque $a < b \leqslant 0$.

EXERCICE 460 **5 minutes**

Sans faire de calcul, comparer les nombres suivants :

1. $(-\pi)^3$ et $(1-\pi)^3$
2. $(-1{,}02)^3$ et $(-1{,}002)^3$
3. $(1+\pi)^3$ et $(\pi-1)^3$
4. $\left(\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(\sqrt{3}\right)^3$
5. $(3-\pi)^3$ et $(\pi-3)^3$
6. $(-3)^3$ et $-\pi^3$.

EXERCICE 461 **10 minutes**

1. Comparer a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{a}$ lorsque $0 < a \leqslant 1$.

2. Comparer a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{a}$ lorsque $a > 1$.

EXERCICE 462 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Calculer $f(x)$ pour les « grandes » valeurs positives de x : 10^4, 10^{10}, 10^{50}, 10^{300}.

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) \geqslant 10^{1500}$?
   ☞ Nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. En procédant de la même manière ou en utilisant la parité de f, étudier le comportement de $f(x)$ pour les « grandes » valeurs négatives de x.

EXERCICE 463 **5 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^3 = 1$ **2.** $x^3 = -27$ **3.** $x^3 = 2\sqrt{2}$ **4.** $x^3 = -64$

EXERCICE 464 **5 minutes**

1. En utilisant la courbe de la fonction $f(x) = x^3$, déterminer l'ensemble des réels x tels que $-8 \leqslant x^3 \leqslant -1$.

2. En déduire l'ensemble des réels x tels que $-8 \leqslant (x-2)^3 \leqslant -1$.

EXERCICE 465 **10 minutes**

1. Sans les calculer, ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
   1^3 11^3 $0{,}11^3$ $10{,}1^3$ $11{,}01^3$ $10{,}01^3$ $1{,}101^3$ $1{,}010^3$.

2. Sans les calculer, ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
   $(-7{,}7)^3$ $(-0{,}77)^3$ $(-70{,}7)^3$ $(-0{,}7)^3$ $(-70)^3$ $(-0{,}707)^3$ $(-7{,}07)^3$ $(-7{,}007)^3$.

3. Sans les calculer, ranger dans l'ordre décroissant les nombres suivants :
   $3{,}2^3$ $(-3{,}6)^3$ $6{,}3^3$ $(-4{,}5)^3$ $-4{,}6^3$ $4{,}2^3$ $(-5{,}6)^3$ $-5{,}5^3$.

EXERCICE 466 **5 minutes**

1. Construire le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $[-3\ ;\ 6]$.
2. Quels sont le minimum et le maximum de f sur cet intervalle ?

EXERCICE 467 **5 minutes**

1. Construire le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $[-3\ ;\ -1]$.
2. Quels sont le minimum et le maximum de f sur cet intervalle ?

EXERCICE 468 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. A quel intervalle appartient $f(x)$ lorsque :

1. $x \in [2\ ;\ 5]$;
2. $x \in [-5\ ;\ -1]$;
3. $x \in [-5\ ;\ 5]$;
4. $x \in \left[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}\right]$.

EXERCICE 469 **10 minutes**

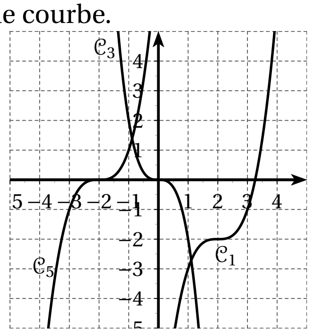
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. A quel intervalle appartient x lorsque :

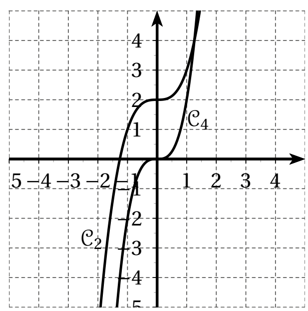
1. $f(x) \in [1\ ;\ 27]$;
2. $x \in [-8\ ;\ 0]$;
3. $x \in [-64\ ;\ 64]$;
4. $x \in \left[-2\sqrt{2}\ ;\ 5\sqrt{5}\right]$.

EXERCICE 470 **5 minutes**

Soient f, g, h et k les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$, $h(x) = x^3 + 2$ et $k(x) = (x+2)^3$.

Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative et donner l'expression de la fonction de la cinquième courbe.





2.7.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 471 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J)$.

Soient M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x, P et Q ses projetés orthogonaux respectivement sur (OI) et sur (OJ), M' le point d'intersection de la parallèle à (IQ) passant par P avec l'axe (OJ), M'' le point d'intersection de la parallèle à (OI) passant par M' avec la droite (PM).

1. Faire une figure illustrant la construction.
2. Exprimer les coordonnées de M'' en fonction de x.

3. Tracer la courbe de la fonction obtenue.

EXERCICE 472 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

1. Factoriser f.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Etablir le tableau de signe de $f(x)$.

EXERCICE 473 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\left(x^2+x+1\right) - x + 1$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer une forme développée de f.
2. Déterminer une forme factorisée de f.
3. Etablir le tableau de signes de $f(x)$.
4. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

EXERCICE 474 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 - 2x^3 - 1$.

1. Démontrer que $f(x) = \left(x^3-1\right)^2 - 2$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$ puis sur $]-\infty\ ;\ 1]$.
3. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 475 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

1. Vérifier que $f(x) = (x-1)^3$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 476 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Vérifier que $f(x) = (x+1)^3 + 3$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Par quelle transformation peut-on déduire $\mathcal{C}$ de la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^3$?

EXERCICE 477 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Vérifier que $f(x) = (x-2)^3 + 2$.

2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Par quelle transformation peut-on déduire $\mathcal{C}$ de la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^3$?

EXERCICE 478 **15 minutes**

Un artiste souhaite réaliser une boule en alliage métallique. Il achète pour cela 5 m^3 de métal qu'il fera fondre et qu'il moulera ensuite pour donner une forme sphérique.
On cherche à déterminer le rayon maximal r lui permettant d'obtenir un volume maximal pour la confection de ce solide.

1. Rappeler la formule permettant de calculer le volume V d'une boule en fonction de son rayon r puis justifier que l'équation que l'on doit résoudre équivaut à l'équation $r^3 = \dfrac{15}{4\pi}$.
2. Déterminer l'arrondi au millième de $\dfrac{15}{4\pi}$.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de r d'amplitude 0,001.
4. En déduire l'arrondi au centième de r.

EXERCICE 479 **10 minutes**

Un satellite évolue sur l'orbite géostationnaire si la distance d en milliers de kilomètres entre le centre de la Terre et sa position dans l'espace est telle que $d^3 = 74959$.

1. A l'aide de la calculatrice, tabuler la fonction cube de 0 à 100 avec le pas 10. En déduire un encadrement de d d'amplitude 10.
2. En modifiant l'intervalle et le pas, déterminer un encadrement de la distance d par deux nombres entiers consécutifs.
3. Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 milliers de kilomètres, donner un encadrement par deux nombres entiers consécutifs de l'altitude, en milliers de kilomètres, d'un tel satellite.

EXERCICE 480 **15 minutes**

Une usine produit des engrais bio. La production mensuelle s'étale entre 0 et 8 tonnes.
La fonction de coût total C exprimée en milliers d'euros pour x tonnes produites est la suivante : $C(x) = x^3 - 9x^2 + 28x + 5$.

1. La constante a-t-elle une signification économique ?
2. Vérifier que $C(x) = (x-3)^3 + x + 32$ et en déduire que C est strictement croissante sur $[0;8]$.
3. Un coût moyen est un coût total divisé par la quantité. Donner une expression du coût moyen de production $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
4. Déterminer le coût total et le coût moyen lorsque la production mensuelle est de trois tonnes.
5. Trouver grâce à la calculatrice pour quelle production le coût moyen est minimum.

EXERCICE 481 **20 minutes**

Une mine produit x kg d'un minerai par jour, $x \in [0;10]$ (x varie selon les jours), le coût total d'extraction de ces x kg est donné par $C(x) = x^3$ où C est en euros.
Chaque kg est vendu 81 euros, soit pour x kg vendus, une recette de $R(x) = 81x$ euros.
Le bénéfice associé à la fabrication et à la vente de x kg est donné par $B(x) = R(x) - C(x)$.

1. Déterminer $C(5)$, $R(5)$, $B(5)$ et en déduire si une production de 5 kg est rentable.
2. Justifier si une production de 10 kg est rentable.
3. Compléter le tableau de valeurs puis construire les courbes des fonctions C et R dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 kg en abscisses, 1 cm pour 100 euros en ordonnées).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C(x)$											
$R(x)$											

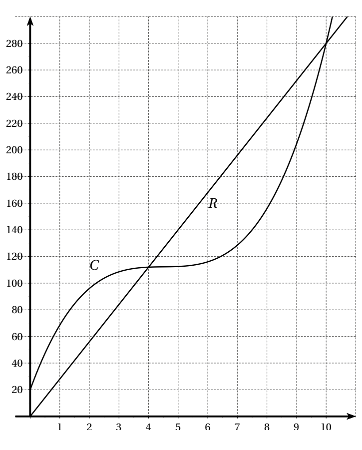
4. Déterminer graphiquement ou algébriquement à 0,1 kg près, la production qui assure une recette de 400 euros, en déduire le bénéfice réalisé à l'euro près.
5. Déterminer graphiquement ou algébriquement à 0,1 kg près, la production qui assure un coût d'au moins 500 euros.
6. Déterminer graphiquement l'intervalle des productions qui assurent un bénéfice positif.
Montrer que $B(x) = x(9-x)(9+x)$ et retrouver algébriquement l'intervalle précédent.
7. Déterminer graphiquement la production qui assure un bénéfice maximal.
8. Compléter le tableau de valeurs suivant puis construire la courbe de B dans le repère précédent.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(x)$											

9. Localiser la production optimale à la calculatrice à 0,1 près.
10. Calculer le bénéfice mensuel (30 jours) pour la production optimale.

EXERCICE 482 **20 minutes**

Une entreprise fabrique et vend un objet en grandes quantités. L'objet est vendu 28 euros l'unité. Si on désigne par x le nombre d'objets produits et vendus (en milliers) : le coût total de fabrication (en milliers d'euros) est donnée par $C(x) = x^3 - 13,5x^2 + 61x + 20$. Chaque objet est vendu 28 euros, la recette totale (en milliers d'euros) est alors donnée par $R(x) = 28x$.
Les courbes de C et R sont représentées ci-dessous pour $x \in [0\ ;\ 10,5]$.
Le bénéfice est donné par : Bénéfice = recette − coût.



Partie A - Etude graphique

1. Estimer la valeur de la recette, du coût et du bénéfice pour une production de 1 millier puis pour 5 milliers d'objets.
2. Déterminer les nombres d'objets à fabriquer et à vendre pour que la production soit rentable (donner l'intervalle de rentabilité).
3. Déterminer le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour que le bénéfice soit maximal et donner une approximation de ce bénéfice.

Partie B : Etude fonctionnelle du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice est donné en fonction de x par $B(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 33x - 20$.
2. Tracer la courbe de B sur la calculatrice pour $x \in [0;10,5]$.
3. Bénéfice maximal
   - **a.** Estimer graphiquement le tableau de variations de $B(x)$ sur $[0\ ;\ 10,5]$.
   - **b.** Estimer graphiquement les nombres de boîtes à fabriquer et à vendre pour que le bénéfice soit maximal et donner une approximation de ce bénéfice maximal
   - **c.** Est-ce en accord avec les résultats trouvés à la partie A.
4. Intervalle de rentabilité.
   - **a.** Estimer graphiquement le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\ ;\ 10,5]$.
   - **b.** Estimer graphiquement les nombres de boîtes à fabriquer et à vendre pour que la production soit rentable et donner l'intervalle de rentabilité
   - **c.** Vérifier que $B(x) = -0,5\,(x-10)\,(x-4)\,(2x+1)$.
     • En déduire le tableau de signes de $B(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
     • En déduire les valeurs de x pour lesquelles $B(x)$ est positif strict.
     • Est-ce en accord avec les résultats trouvés à la partie A et avec ceux trouvés précédemment ?
   - **d.** Résoudre graphiquement l'inéquation $B(x) \geqslant 40$ à $0,1$ près et interpréter le résultat.
   - **e.** Résoudre numériquement grâce au tableau de valeurs de la calculatrice l'équation $B(x) = 40$ et donner un encadrement des solutions à $0,01$ près.

EXERCICE 483 **15 minutes**

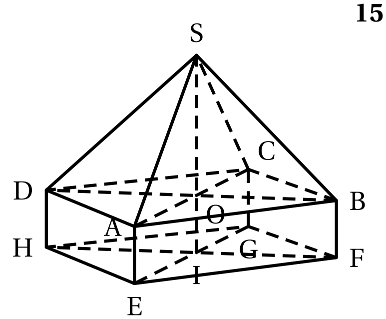
François Viète (1540-1603) a établi des relations entre coefficients et racines d'un polynôme. Par exemple, dans le cas du troisième degré, si la fonction polynôme donnée par $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ prend la valeur 0 pour trois réels t, u et v, alors on a , pour tout x réel, $P(x) = (x-t)(x-u)(x-v)$ et donc $c = -tuv$, $b = tu + uv + vt$ et $a = -(t+u+v)$.

1. Développer $P(x) = (x-t)(x-u)(x-v)$ et retrouver le résultat.
2. Si la fonction polynôme définie par $P(x) = x^3 + mx + 6$ admet trois racines entières, quelle est la valeur de m ?
   ☞ α est une racine de P signifie de $P(\alpha) = 0$.

2.8 Exercices de synthèse

EXERCICE 484 **15 minutes**

Voici un solide constitué d'un parallélépipède surmonté d'une pyramide à base rectangulaire.
La hauteur totale du solide est : $SI = 12$ cm.
Le parallélépipède a pour longueur $EF = 10$ cm, pour largeur $HE = 6$ cm et pour hauteur $BF = x$.



Partie A

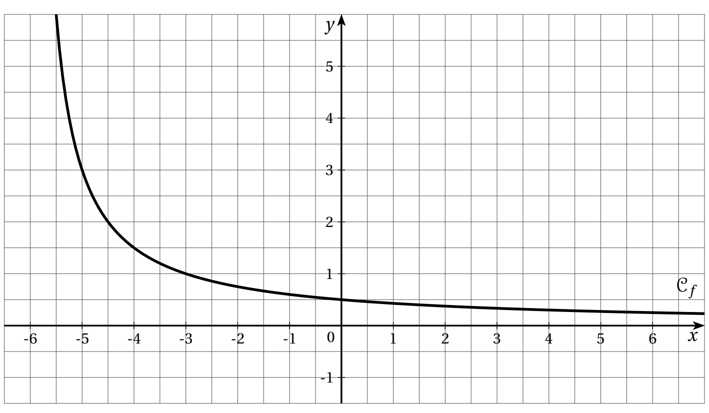
1. Exprimer le volume V_1 du parallélépipède en fonction de x.
2. Montrer que le volume V_2 de la pyramide est égal à $240 - 20x$.
3. Entre quelles valeurs x peut-il varier ?
4. Trouver x pour que $V_1 = V_2$. Quelle est alors la valeur commune de ces volumes ?
5. Pour quelles valeurs de x le volume de la pyramide est-il inférieur à 200 cm^3 ?

Partie B

1. Tracer les courbes des fonctions f et g définies par :
   - $f(x) = 60x$
   - $g(x) = 240 - 20x$
2. Expliquer comment retrouver par lecture graphique les résultats de la question **4.** de la partie A.

EXERCICE 485 **15 minutes**

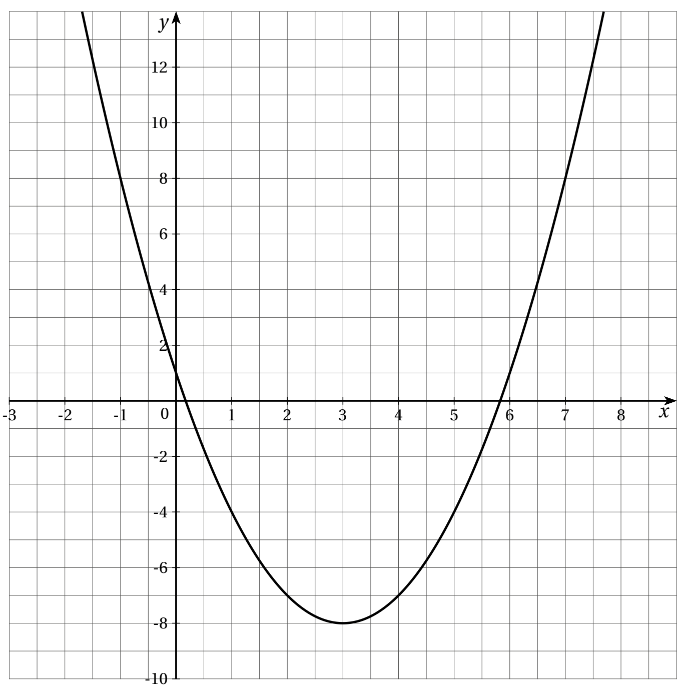
Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-6;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+6}$.
Sa courbe représentative notée $\mathcal{C}_f$ est tracée dans le plan muni d'un repère orthonormé ci-dessous.



1. **a.** Calculer l'image de 3 par la fonction f.
   b. Quel est l'antécédent de 3 par la fonction f ?
2. Soient a et b deux réels tels que $-6 < a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-6;+\infty[$.
3. Soit d la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{3}$.
   a. Tracer la droite d dans le repère précédent.
   b. Etudier le signe de $f(x) - \left(-\dfrac{x}{3}\right)$.
   c. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite d.
4. La droite d coupe la droite Δ d'équation $x = -6$ en un point A. Calculer les coordonnées du point A.
5. **a.** Déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d et passant par le point $B(-5;3)$.
   b. Le point $C\left(3;\dfrac{1}{3}\right)$ est-il un point d'intersection de la droite d' et de la courbe $\mathcal{C}_f$?
6. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 486 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La parabole C_f est tracée ci-dessous.



1. **a.** Le point $A\left(-\frac{3}{2};12\right)$ appartient-il à la courbe C_f ?
   b. Donner le tableau des variations de la fonction f.
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-2)=10$ et $g(6)=-6$.
   a. Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné précédemment.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=(x-2)^2-9$
   b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole C_f et de la droite D.
   c. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$.
   d. En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.

EXERCICE 487 **15 minutes**

g est la fonction affine telle que $g(-1)=5$ et $g(2)=-4$. On note $\mathcal{D}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
2. Soient f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=2x^2-4x-1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$
   b. Etudier les positions relatives de la parabole $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 488 **15 minutes**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.

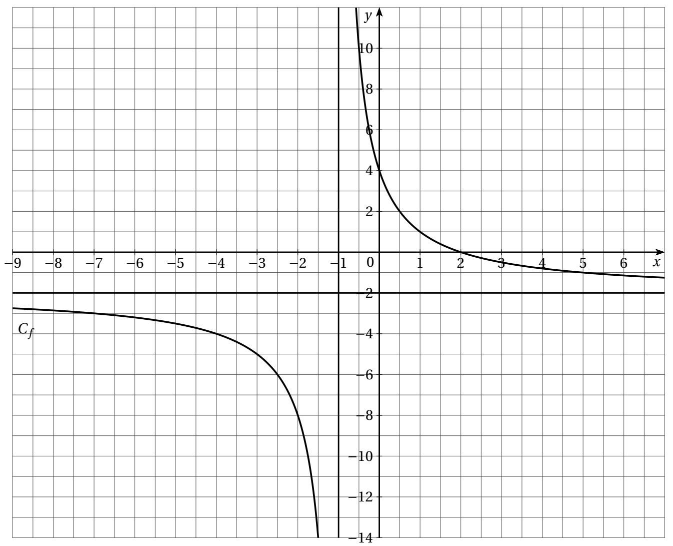
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;6]$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-6	-2	1	3	6
$f(x)$	-2 ↘	-3 ↗	0 ↗	4 ↘	1

1. L'image de 0 par la fonction f est :
   a) égale à 1 **b)** négative **c)** positive
2. L'équation $f(x)=1$ admet :
   a) 0 solution **b)** 1 solution **c)** 2 solutions
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 0$ est :
   a) $[-2;0]$ **b)** $[-3;-2]\cup[-3;0]$ **c)** $[-6;1]$
4. La courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $x=-2$ ont :
   a) aucun point commun **b)** un point commun **c)** deux points communs
5.
   a) $f\left(-\frac{9}{2}\right)-f\left(-\frac{7}{2}\right)<0$ **b)** $f(2)-f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ **c)** $f(4)-f\left(\frac{11}{3}\right)<0$

EXERCICE 489 **15 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4-2x}{x+1}$. La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est l'hyperbole C_f.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
3. **a.** Déterminer le réel B tel que $f(x) = -2 + \dfrac{B}{x+1}$.
   b. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.
   c. En déduire un encadrement de $f(x)$ si $x \in [-1201; -1001]$.
4. Soit g la fonction affine telle que $g(-8) = -6$ et $g(6) = 1$.
   a. Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal.
5. **a.** Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ $f(x) - g(x) = \dfrac{(3-x)(x+4)}{2x+2}$.
   b. Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes C_f et D.
   c. Etudier les positions relatives des courbes C_f et D.

EXERCICE 490 **15 minutes**

On considère les fonctions f et g définies pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 12]$ par $f(x) = \dfrac{5x-4}{x+1}$ et $g(x) = 8 - \dfrac{x}{2}$.

Partie A

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère.

   Tracer dans le même repère, la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.
2. Par lecture graphique, donner les coordonnées de leur point d'intersection E.

Partie B

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude de marché a permis d'établir que les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

- $f(x)$ est la quantité, exprimée en millions d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros ;
- $g(x)$ est la quantité, exprimée en millions d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 9 €.
   Comparer l'offre et la demande pour ce prix de vente. Quel problème cela pose-t-il ?
2. Calculer le prix de vente à partir duquel le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 3,5 millions d'articles.
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 491 **10 minutes**

Partie A

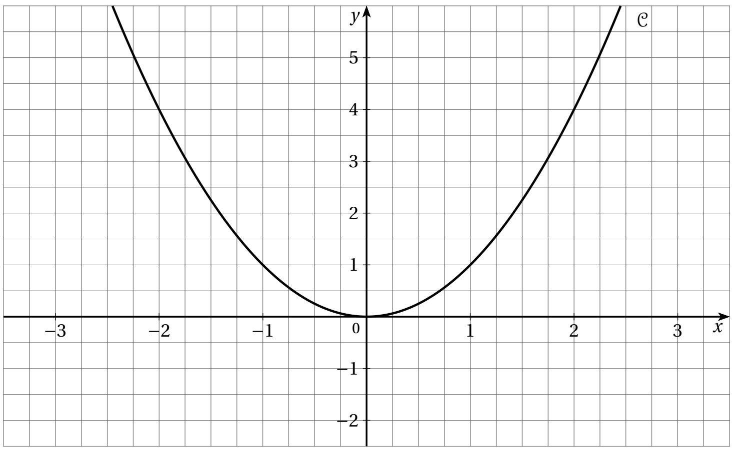
Soit f la fonction affine telle que $f(-3) = 5$ et $f(0,5) = -2$.

1. Dans le repère donné ci-dessous, tracer la droite $\mathcal{D}$ représentative de la fonction f.
2. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Partie B

La courbe $\mathcal{C}$ tracée ci-dessous, est la courbe représentative de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2$.

1. Donner une expression factorisée de $g(x) - f(x)$.
2. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.



EXERCICE 492 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 1$.

1. Tracer, dans le même repère, la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = x + 1$.
2. Etablir à l'aide du graphique que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, l'une positive notée α, l'autre négative, notée β.
3. Placer sur la parabole et la droite les points d'abscisses $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{3}$.
Conjecturer à l'aide du graphique un encadrement de α.
4. **a.** En utilisant le graphique, expliquer que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, il est équivalent de dire $x < \alpha$ et $f(\alpha) < 0$.
b. En déduire que $\dfrac{3}{2} < \alpha < \dfrac{5}{3}$.
c. En utilisant la technique du balayage, donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.
5. **a.** Démontrer que $1 - \alpha$ est la solution négative de l'équation $f(x) = 0$.
b. En déduire, à l'aide de **4.b**, un encadrement entre deux fractions de β.
c. En déduire, à l'aide de **4.c**, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de β.

EXERCICE 493 **10 minutes**

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, démontrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution et que cette solution appartient à l'intervalle $]0\,;\,1[$.

EXERCICE 494 **15 minutes**

Soit f, p et c les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$, $p(x) = x^2$ et $c(x) = x^3$, de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_c$.

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $r(x) = \sqrt{x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_r$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_h$.

1. Comparer a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{a}$ lorsque $0 < a \leqslant 1$, puis lorsque $a > 1$.

2. Comparer a, a^2, a^3 et $\dfrac{1}{a}$ lorsque $-1 \leqslant a < 0$, puis lorsque $a < -1$.

3. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_r$ et $\mathcal{C}_h$.

EXERCICE 495 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Déterminer l'image, par f, de 3.

3. Calculer $f\left(\sqrt{2}+1\right)$.

4. Quels sont les antécédents de 0, par f ?

5. Quel est l'ensemble des antécédents de 3 par f ?

6. Quels sont les nombres égaux à leur image, par f ?

7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) + 1$.
Déterminer une expression simple de g.

8. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f\left(f(x)\right)$.
Déterminer une expression de h (sous la forme d'un polynôme).

EXERCICE 496 **15 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$.

1. Donner l'ensemble de définition D de la fonction f.

2. Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$. (Mettre le résultat sous la forme $a\sqrt{2} + b$, où a et b sont des rationnels.)

3. Quel est l'ensemble des antécédents du nombre 2, par f ?

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2\,;\,\dfrac{5}{4}\right\}$, exprimer $f\left(f(x)\right)$ en fonction de la seule variable x.
Réduire l'expression obtenue.

5. Quel est l'ensemble des antécédents du nombre 0, par f ?

6. Quel est l'ensemble des réels égaux à leur image par f ?

7. Démontrer que tout réel différent de -2 admet un unique antécédent, par f.

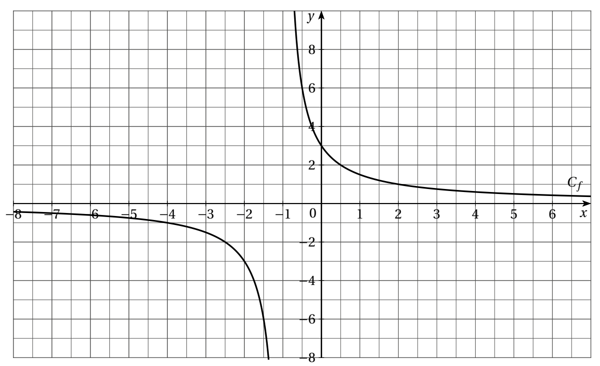
EXERCICE 497 **15 minutes**

Considérons la fonction f qui, à tout réel non nul, associe la somme de son inverse et de son opposé (on pourra vérifier que l'image de 2, par f, est $-\dfrac{3}{2}$).

1. Quelle est l'image de -2 par la fonction f ?
2. Quelle est l'image de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ par la fonction f ? (On simplifiera bien entendu l'écriture du résultat.)
3. Donner une expression de f et préciser son ensemble de définition.
4. Quels sont les antécédents de 0, par f ?
5. Exprimer l'image de l'image d'un nombre x, par f. (Il n'est pas demandé de réduire l'expression.)

EXERCICE 498 **15 minutes**

La courbe C_f représentative d'une fonction f a pour équation $y=\dfrac{3}{x+1}$. La courbe C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal ci-dessous.

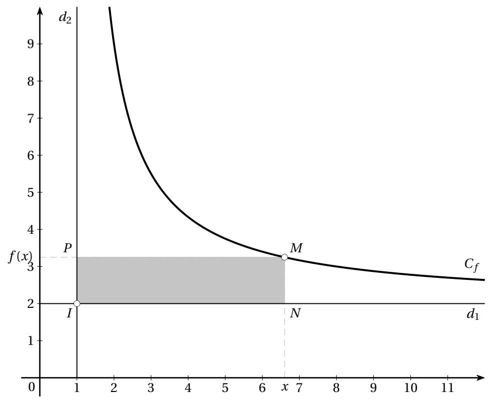


1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. **a.** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.
   b. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1:+\infty[$.
   c. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-5)=-7$ et $g(3)=9$.
   a. Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère précédent.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{3}{x+1}\leqslant 2x+3$. Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 499 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$. Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Les droites d_1 et d_2 sont les parallèles aux axes du repère passant par le point I de coordonnées $(1;2)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et on construit le rectangle $INMP$ comme indiqué ci-dessous.



1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, $f(x) > 2$.

2. a. Exprimer en fonction de x, les distances IN et MN.

b. Montrer que pour tout point M de la courbe C_f, l'aire du rectangle $INMP$ est constante.

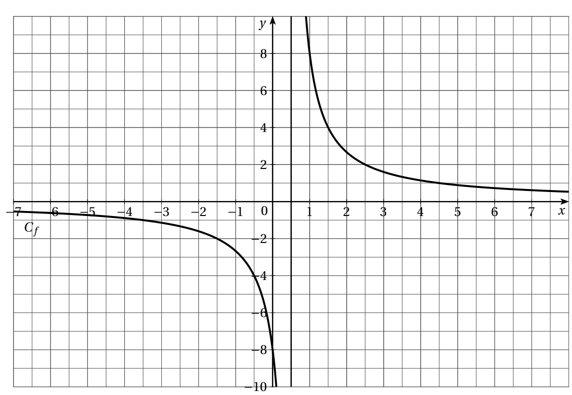
3. On veut déterminer les coordonnées du point M de la courbe C_f pour que le rectangle $INMP$ soit un carré.

a. Montrer que l'abscisse du point M est solution de l'équation $\dfrac{(x-1)^2-7}{x-1} = 0$.

b. Calculer les coordonnées du point M.

EXERCICE 500 **20 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{8}{2x-1}$. Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal donné ci-dessous.



1. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

2. Calculer l'abscisse du point A de la courbe C_f dont l'ordonnée est égale à -2.

3. Soit g la fonction affine telle que $g(-4) = -7$ et $g(3) = 7$.

  a. Déterminer l'expression de g en fonction de x.

  b. Tracer la représentation graphique D de la fonction g dans le repère précédent.

4. **a.** Montrer que pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{2}$, $f(x) - g(x) = \dfrac{9-4x^2}{2x-1}$.

  b. A l'aide d'un tableau, étudier le signe de l'expression $\dfrac{(3+2x)(3-2x)}{2x-1}$.

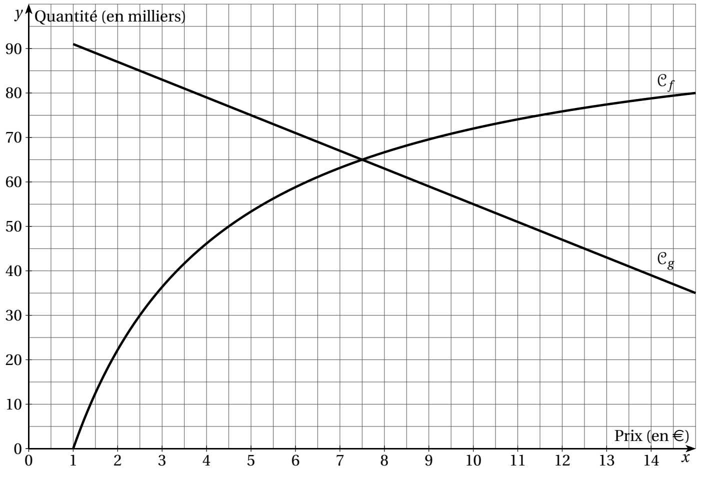
  c. En déduire la position relative des courbes C_f et D.

EXERCICE 501 **20 minutes**

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.

Une étude de marché a permis d'établir que les fonctions f et g représentées ci-dessous, modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

- $f(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros ;
- $g(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.



Partie A : Lecture graphique

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 2,50 €.
Comparer l'offre et la demande pour ce prix de vente.

2. Déterminer le prix de vente à partir duquel le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 75 000.
Quel problème cela pose-t-il ?

3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

Partie B : La fonction demande

La demande des consommateurs est modélisée par la fonction affine g définie sur l'intervalle $[1; p]$ telle que $g(5) = 75$ et $g(10) = 55$.

1. Déterminer l'expression de g en fonction de x.
2. Déterminer le prix de vente p d'un article pour lequel la demande est nulle.

Partie C : La fonction d'offre

L'offre des producteurs est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par $f(x) = 100 - \dfrac{700}{2x+5}$.

1. Soit a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2. Selon ce modèle, est-il possible que l'offre des producteurs soit de 100 milliers d'articles ?

Partie D : Le prix d'équilibre

Le prix d'équilibre est le réel $x \geqslant 1$ solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Vérifier que $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-15)(4x+45)}{2x+5}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
En déduire le nombre d'articles échangés au prix d'équilibre.

EXERCICE 502 **15 minutes**

Partie A - Etude de fonction

On considère la fonction f, définie sur $[1\,;\,15]$, par $f(t) = \dfrac{1615}{t} - \dfrac{595}{t^2}$.

1. a. Démontrer que, pour tout $t \in [1\,;\,15]$, $f(t) = \dfrac{1615t - 595}{t^2}$.
b. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.
c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.
On arrondira les valeurs remarquables à l'unité.

2. Compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité :

t	1	2	3	4	5	8	10	12	15
$f(t)$						193			

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
Construire la courbe $\mathcal{C}$, en prenant comme unités graphiques : 1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B - Application

Un patient s'est vu administrer 1 200 mg d'un médicament. On admet que la quantité de médicament en mg présente dans le sang du malade au-delà de la première heure est donnée par $f(t)$, avec t en heures.

1. **a.** Estimer graphiquement la quantité de médicament présente dans le sang du patient au bout de 3 h 30 min.

   b. Vérifier ce résultat par un calcul.

2. On estime que ce médicament devient inefficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang est inférieure à 200 mg.
   Estimer graphiquement le temps au bout duquel il devient inefficace.

EXERCICE 503 **10 minutes**

La trypsine est une enzyme digestive du suc pancréatique qui a pour but de digérer les protéines. Elle est synthétisée sous forme de trypsinogène puis stockée dans les vésicules enzymatiques des cellules acineuses, d'où elle est excrétée au moment de la digestion.
Le but de cet exercice est de rechercher pour quelle valeur du pH du duodénum l'action de la trypsine est la plus efficace.
Soit f la fonction, définie sur [6; 9J par $f(x) = 0,37x^3 - 9,35x^2 + 76,51x - 200,95$.
La fonction f mesure l'efficacité de la trypsine lors de la digestion pour différentes valeurs x du pH.

1. Tracer la courbe de f sur la calculatrice.
2. A l'aide du graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f, sur l'intervalle $[6; 9]$.
3. Quel doit être le pH du duodénum pour que la réaction protéinique soit la plus efficace possible?

EXERCICE 504 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(x-5)$, $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminer le réel k tel que la droite d'équation $y = k$ coupe $\mathcal{P}$ en A et B tels que $AB = 6$.

EXERCICE 505 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite d'équation $y = 1 - x$. On note S le sommet de $\mathcal{P}$.
Déterminer la valeur de $AS^2 + BS^2 - AB^2$.

EXERCICE 506 **10 minutes**

Soit f une fonction affine telle que $f(-2) = 1$ et $f(1) = -2$.
Déterminer $f\big(f(0)\big)$.

EXERCICE 507 **10 minutes**

Soit f une fonction affine vérifiant les conditions : $f(-2) = 1$ et $f(2) = -f(1)$.
Déterminer une expression de f.

EXERCICE 508 **15 minutes**

Soit f une fonction affine vérifiant : pour tout x réel, $f\left(f(x)\right) = 2x+1$.
Déterminer les valeurs possibles de $f(1)$.

EXERCICE 509 **15 minutes**

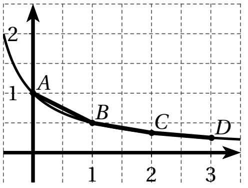
Soient f la fonction qui ajoute 1, g la fonction double et h la fonction « carré ».
Calculer les expressions suivantes :

1. $f(2)$	**6.** $g\left(f(2)\right)$	**11.** $f\left(g(x)\right)$	**16.** $g\left(g(x)\right)$
2. $g(2)$	**7.** $f\left(g(h(2))\right)$	**12.** $f(h(x))$	**17.** $h(h(x))$
3. $h(2)$	**8.** $f(x)$	**13.** $g\left(f(x)\right)$	**18.** $f\left(g(h(x))\right)$
4. $f\left(g(2)\right)$	**9.** $g(x)$	**14.** $g(h(x))$	**19.** $f\left(h\left(g(x)\right)\right)$
5. $f(h(2))$	**10.** $h(x)$	**15.** $f\left(f(x)\right)$	**20.** $h\left(g\left(f(x)\right)\right)$

2.9 Vers la première

EXERCICE 510 **20 minutes**

Dans un repère orthonormé, on veut calculer, sur l'intervalle $[0\,;\,3]$, une valeur approchée de la longueur de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.



1. Pour cela, on a placé sur la courbe quatre points A, B, C et D d'abscisses respectives 0, 1, 2 et 3 formant trois segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
En calculant la somme $AB + BC + CD$ donner une première approximation de la longueur de la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

2. Une meilleure approximation s'obtient avec un plus grand nombre de points sur la courbe dont les abscisses sont réparties régulièrement sur l'intervalle $[0;3]$.
La fonction à compléter suivant permet d'obtenir une approximation de la longueur de la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$ en fonction du nombre n de segments ainsi formés.

```
def f(x) :
    return 1/(x+1)
```

```
def longueur(n) :
    L = 0
    p = 3/n
    x1 = 0
    x2 = x1 + p
    for i in range(n) :
        y1 = f(x1)
        y2 = f(x2)
        L = ···
        x1 = x2
        x2 = x2 + p
    print(L)
```

a. Que fait la première def?

b. Que permet de calculer la variable p ?
c. Compléter la ligne 8.

3. Tester ce programme pour plusieurs valeurs de n.
☞ Ne pas oublier de saisir au début du programme « from math import* ».
4. Modifier la def longueur afin de pouvoir obtenir une approximation de la longueur de la courbe de la fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
5. Déterminer la longueur de la courbe de la fonction f sur $[1\ ;\ 5]$, sur $[0\ ;\ 10]$.

EXERCICE 511 **10 minutes**

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, déterminer la longueur de la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.

EXERCICE 512 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 3$.

1. La fonction f est-elle paire ou impaire ?
2. On pose $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$. La fonction g est-elle paire ou impaire ?
3. On pose $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. La fonction h est-elle paire ou impaire ?

EXERCICE 513 **15 minutes**

Une société commercialise deux types d'appareils (type A et type B).
Le bénéfice journalier, en euro, réalisé par la vente de x appareils A et y appareils B est donné par la fonction $f(x; y) = 15x + 8y - 2$.

1. Calculer l'image de chacun des couples $(x; y)$ suivants pour la fonction f, puis donner sa signification : $(1;3)$, $(5;5)$, $(9;4)$, $(15;0)$ et $(0;10)$.
2. Des contraintes imposent le fait que, chaque jour, $x \in [0;15]$ et $y \in [0;10]$. Ecrire un programme en python qui détermine le nombre d'appareils de chaque type vendus pour que la société fasse un bénéfice journalier supérieur ou égal à 250 €.

EXERCICE 514 **15 minutes**

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 2$ et $g(x) = ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
On sait que, pour tout x réel, $f\Big(g(x)\Big) = 9x^2 - 3x + 2$.
Déterminer a et b.

EXERCICE 515 **15 minutes**

La fonction f est telle qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x réel : $f(x) = ax + b$ et $f(ax + b) = x$.
Que valent a et b ?

EXERCICE 516 **15 minutes**

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)+3g(x)=x^2+x+6 \\ 2f(x)+4g(x)=2x^2+4 \end{cases}$.

Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x)=g(x)$?

EXERCICE 517 **15 minutes**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des rationnels distincts de 1 par $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.
On souhaite étudier le comportement des images successives de 8.

1. Résoudre l'équation $f(x)=1$.
   Comment modifier l'ensemble de définition de f pour que l'image de tout élément de cet ensemble ait aussi une image ?
2. On appelle x_1 l'image de 8 par f, x_2 l'image de x_1 etc.
   Compléter le tableau suivant :

x	8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$f(x)$	$-\frac{9}{7}$								

3. Ce comportement périodique est-il propre au nombre 8 ?

EXERCICE 518 **25 minutes**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par $\begin{cases} f(x)=2x \text{ pour } 0<x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ f(x)=2(1-x) \text{ pour } \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$

1. Démontrer que, pour tout $x\in\,]0\,;\,1[$, $f(x)\in\,]0\,;\,1]$.
2. En calculant les images successives de $\dfrac{3}{11}$ par f, on obtient : $\dfrac{3}{11}\mapsto\dfrac{6}{11}\mapsto\dfrac{10}{11}\mapsto\dfrac{2}{11}\mapsto\cdots$.
   On a donc $f\left(\dfrac{3}{11}\right)=\dfrac{6}{11}$, $f\left(f\left(\dfrac{3}{11}\right)\right)=f\left(\dfrac{6}{11}\right)=\dfrac{10}{11}$
   $f\left(f\left(f\left(\dfrac{3}{11}\right)\right)\right)=f\left(f\left(\dfrac{6}{11}\right)\right)=f\left(\dfrac{10}{11}\right)=\dfrac{2}{11}$
   On note $f^{(2)}\left(\dfrac{3}{11}\right)=\dfrac{10}{11}$, $f^{(3)}\left(\dfrac{3}{11}\right)=\dfrac{2}{11}$.
   Calculer, s'ils sont définis, les réels $f^{(4)}\left(\dfrac{3}{11}\right)$, $f^{(5)}\left(\dfrac{3}{11}\right)$, $f^{(6)}\left(\dfrac{3}{11}\right)$ et $f^{(7)}\left(\dfrac{3}{11}\right)$.
3. Existe-t-il un réel a tel que $f(a)=a$?
4. Déterminer toutes les valeurs possibles de x telles que $f^{(3)}(x)=1$.

EXERCICE 519 **20 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+12x+30$.
Quelle est la plus grande solution de l'équation $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)=0$?
☞ Ne pas développer !

EXERCICE 520 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x)=x^2-2bx-1$ avec b un réel donné.

Est-il possible que la différence entre les valeurs maximum et minimum de la fonction f soit égale à 1 ?

EXERCICE 521 **15 minutes**

Soit f la fonction définie pour tout entier $n > 1$ par $f(n) = \dfrac{2n^2+n-1}{2n^2-n-1}$.
Simplifier le produit $f(2)f(3)f(4)\cdots f(99)f(100)$.

EXERCICE 522 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 4 \text{ si } x < -4 \\ -x \text{ si } -4 \leqslant x \leqslant 5 \\ -5 \text{ si } x > 5 \end{cases}$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{25 - \left(f(x)\right)^2}$.

1. Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.
2. Préciser la nature de la courbe sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,-4[$, $[-4\,;\,5]$ et $]5\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 523 **15 minutes**

On appelle **partie entière** d'un réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
Par exemple $\lfloor 5,8 \rfloor = 5$ et $\lfloor -5,8 \rfloor = -6$.

1. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction partie entière.
2. Donner l'allure de la fonction m, définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (on l'appelle la mantisse).
3. Représenter la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - \left(\lfloor x \rfloor\right)^2$.
   ☞ On pourra commencer par faire la liste des images possibles d'un réel de $[0\,;\,2]$ par f.

EXERCICE 524 **15 minutes**

Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^\star$ vérifiant : pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} f(-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$.

☞ On pourra commencer par remplacer x par $-\dfrac{1}{x}$ dans la relation.

EXERCICE 525 **15 minutes**

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous réels x et y, la relation $f\left(x - f(y)\right) = 1 - x - y$.

EXERCICE 526 **15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\begin{cases} f(4) = 10 \\ \text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \end{cases}$$

Déterminer $f(2022)$.

EXERCICE 527 **15 minutes**

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.
Déterminer tous les réels x tels que $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 3$.

EXERCICE 528 **15 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel la relation $f\left(f(x)\right) = x^2 - x + 1$.
Déterminer $f(0)$.

EXERCICE 529 **25 minutes**

Déterminer toutes les fonctions f vérifiant, pour tous réels x et y, la relation
$f\left(f(x) + f(y)\right) = f\left(x^2\right) + 2x^2 f(y) + \left(f(y)\right)^2$.
☞ On pourra commencer par poser $a = f(0)$ et $b = f(1)$.

EXERCICE 530 **20 minutes**

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant, pour tous x et y entiers la relation $f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right) = f(x+y) \cdot f(x-y)$.

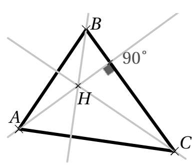
Chapitre 3

Géométrie

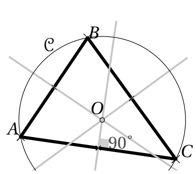
3.1 Droites remarquables

3.1.1 Point de cours

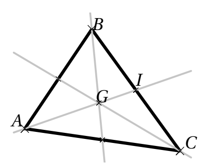
La **hauteur** issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé (BC).
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé **l'orthocentre** du triangle.



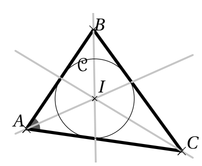
La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite coupant ce segment perpendiculairement en son milieu. C'est aussi l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B.
Les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.



La **médiane** issue du sommet A est la droite passant par A et par le milieu I du côté opposé $[BC]$.
Les trois médianes sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité** du triangle.
$AG = \frac{2}{3}AI$.



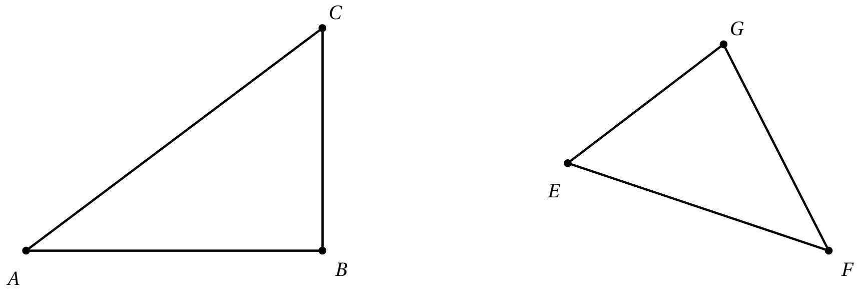
La **bissectrice** d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.
Les trois bissectrices sont concourantes en un point I qui est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.



3.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 531 **5 minutes**

Construire le cercle circonscrit aux triangles ABC et EFG.

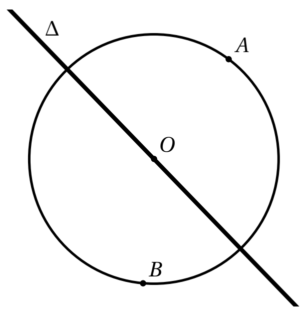


EXERCICE 532 **5 minutes**

Tracer un cercle en piquant la pointe du compas dans une gomme. Par une construction géométrique retrouver le centre de ce cercle.

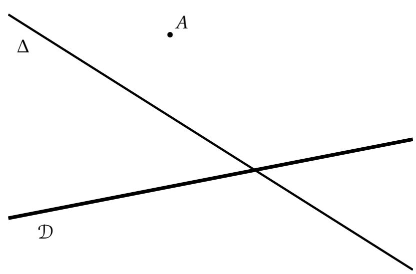
EXERCICE 533 **5 minutes**

Placer le point C pour que le cercle soit circonscrit au triangle, sachant que la droite Δ est la médiatrice du côté BC.



EXERCICE 534 **5 minutes**

Construire le triangle ABC dont les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont deux médiatrices.



EXERCICE 535 **5 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $BC = 6$ cm. Soit O le milieu de $[BC]$.

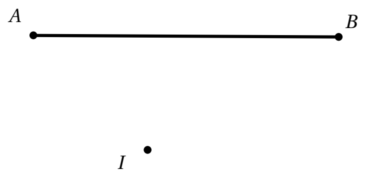
1. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

2. En déduire l'égalité de trois longueurs.

3. Quelle est la longueur du segment $[OA]$?

EXERCICE 536 **5 minutes**

Placer le point C sachant que I est le point d'intersection des bissectrices du triangle.

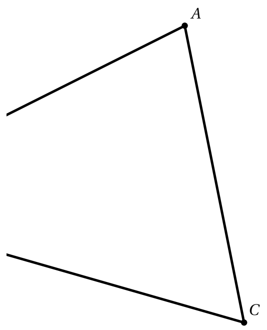


EXERCICE 537 **5 minutes**

Dessiner trois droites d, d' et d'', concourantes en O, A un point de d.
Construire le triangle ABC admettant d, d' et d'' comme hauteurs.

EXERCICE 538 **10 minutes**

Le sommet B du tringle ABC est en dehors de la figure.
Construire la médiane issue de B du triangle ABC.



EXERCICE 539 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[DC]$.

1. Que représente la droite (AJ) dans le triangle ACD ?
2. Démontrer que les droites (AJ), (CI) et (BD) sont concourantes.

EXERCICE 540 **10 minutes**

Soient $ABCD$ un parallélogramme, I le projeté orthogonal de A sur (BC), J le projeté orthogonal de C sur (AB), H le point d'intersection de (AI) et (CJ).
Démontrer que (BH) est perpendiculaire à (AC).

3.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 541 **20 minutes**

1. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $b \neq d$, deux fractions. On pose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

- **a.** Vérifier que $(a-c) = k(b-d)$.
- **b.** En déduire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

2. Soit ABC un triangle quelconque, M un point intérieur au triangle ABC. La droite (AM) coupe le segment $[BC]$ en U. On note h la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- **a.** Exprimer l'aire du triangle ABU et du triangle ACU en fonction de h et des longueurs BU et CU.
- **b.** En déduire une expression du quotient $\frac{aire(ABU)}{aire(ACU)}$ à l'aide des longueurs BU et CU.

3. Procéder de même pour obtenir une expression du quotient $\frac{aire(MBU)}{aire(MCU)}$ à l'aide des longueurs BU et CU.

4. Démontrer à l'aide de la question **1** l'égalité : $\frac{aire(AMB)}{aire(AMC)} = \frac{UB}{UC}$.

5. Propriété caractéristique de la médiane.

- **a.** On suppose dans cette question que M appartient à la médiane issue de A.
  Quelle est alors la position du point U sur le segment $[BC]$?
  En déduire que $aire(AMD) = aire(AMC)$.
- **b.** Réciproquement, on suppose dans cette question que $aire(AMD) = aire(AMC)$.
  Démontrer que M appartient à la médiane issue de A.

6. Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Les médianes (AA') et (BB') se coupent en G.

- **a.** En utilisant le fait que $G \in [AA']$, justifier que $aire(ABG) = aire(ACG)$.
- **b.** Démontrer que même que $aire(ABG) = aire(BCG)$.
- **c.** En déduire une nouvelle égalité d'aires.
- **d.** Démontrer que G appartient à la médiane (CG).
- **e.** Quelle propriété remarquable du triangle vient d'être démontrée ?

EXERCICE 542 : UNE AUTRE MÉTHODE **10 minutes**

Soit ABC un triangle. Soient J et K les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. Les droites (CK) et (BJ) se coupent en G.
Soit A' le symétrique de A par rapport au point G.

1. Démontrer que les droites (BJ) et $(A'C)$ sont parallèles.
☞ On pourra considérer pour cela le triangle $AA'C$.

2. Démontrer, de même, que les droites (CK) et $(A'B)$ sont parallèles.

3. Démontrer que le quadrilatère $BGCA'$ est un parallélogramme.

4. Démontrer que (AG) est une médiane du triangle ABC.

5. Conclure.

EXERCICE 543 **10 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, C', A' et B' les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
Les perpendiculaires en C' à la droite (AB) et en B' à la droite (AC) se coupent en O.

1. Démontrer que $OB = OC$.
2. En déduire que la droite (OA') est la médiatrice de $[BC]$.
3. Conclure.

EXERCICE 544 **15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, d_A la droite parallèle à (BC) passant par A, d_B la droite parallèle à (AC) passant par B, d_C la droite parallèle à (AB) passant par C
d_A et d_B se coupent en D, d_B et d_C se coupent en E, d_C et d_A se coupent en F.
H est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

1. Démontrer que B est le milieu de $[DE]$.
2. Démontrer que (BH) est la médiatrice de $[DE]$.
3. De la même manière, démontrer que les deux autres hauteurs dans le triangle ABC sont les deux autres médiatrices dans le triangle DEF.
4. Conclure.

EXERCICE 545 **15 minutes**

Le but de l'exercice est de démontrer que les bissectrices sont concourantes.
Soit ABC est un triangle quelconque.

- I est le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
- L est le pied de la perpendiculaire à (BC) passant par I.
- M est le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par I.

1. **a.** Justifiez que $IH = IL$.
b. Soit K le pied de la perpendiculaire à (AC) passant par I. Démontrer que $IK = IL$.
c. En déduire que $IH = IK$.
2. **a.** Le point I appartient-il à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$? Justifier.
b. En déduire que la droite (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.
c. En déduire que les bissectrices sont concourantes.
d. Tracer le cercle de centre I passant par L. Que constate-t-on?

EXERCICE 546 **10 minutes**

Soient ABC un triangle quelconque, E, F et G les points tels que les quadrilatères $ABEC$, $BCFA$ et $CAGB$ soient des parallélogrammes.
Démontrer que les droites (AE), (BF) et (CG) sont concourantes.

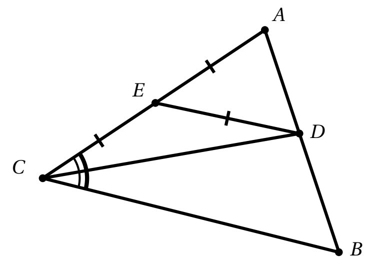
EXERCICE 547 **10 minutes**

Soit une droite $\mathcal{D}$, E et F deux points placés du même côté de $\mathcal{D}$.
Soit U le symétrique du point E par rapport à $\mathcal{D}$.
La médiatrice du segment $[EF]$ coupe $\mathcal{D}$ en I.

La perpendiculaire à (UF) passant par I coupe (UF) en G.
Démontrer que G est le milieu du segment $[UF]$.

EXERCICE 548 **15 minutes**

On donne la figure suivante sur laquelle les hypothèses ont été directement codées.



Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

EXERCICE 549 **10 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe $[BC]$ en I, la parallèle à (AI) passant par B coupe (AC) en D.
Démontrer que $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$.

EXERCICE 550 : Une autre méthode **20 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, la bissectrice de l'angle A coupe le segment $[BC]$ en U.
On note h la hauteur du triangle issue de A.

1. Une première égalité.

a. Démontrer que l'aire du triangle BAU est égale à $\dfrac{BU \times h}{2}$.

b. Démontrer que l'aire du triangle CAU est égale à $\dfrac{CU \times h}{2}$.

c. Démontrer que $\dfrac{aire(BAU)}{aire(CAU)} = \dfrac{UB}{UC}$.

2. Une deuxième égalité.

a. Justifier que U est à la même distance des droites (AB) et (AC).
On note d cette distance commune.

b. Démontrer que l'aire du triangle BAU est égale à $\dfrac{AB \times d}{2}$.

c. Démontrer que l'aire du triangle CAU est égale à $\dfrac{AC \times d}{2}$.

d. Démontrer que $\dfrac{aire(BAU)}{aire(CAU)} = \dfrac{AB}{AC}$.

3. Déduire des questions précédentes que $\dfrac{UB}{UC} = \dfrac{AB}{AC}$.

4. Application : ABC est un triangle rectangle isocèle en B tel que $BC = 1$.
La bissectrice issue de A coupe $[BC]$ en U.
Démontrer que $BU = \sqrt{2} - 1$.

EXERCICE 551 **15 minutes**

Le but de ce problème est de déterminer la nature d'un triangle ABC ayant deux hauteurs $[BH]$ et $[CK]$ de même longueur.

1. Réalisation d'une figure : exécuter le programme de construction suivant :
• tracer un segment $[BH]$, puis la droite perpendiculaire en H à la droite (BH) ;
• placer sur cette droite un point C distinct de H ;
• tracer le cercle de centre C et de rayon BH, puis le cercle de diamètre $[BC]$; nommer K l'intersection des deux cercles qui se trouve du même côté que H par rapport à la droite (BC) ;
• nommer A le point d'intersection des droites (CH) et (BK).

2. Prouver que sur la figure précédente, on a bien $BH = CK$, et que les droites (BH) et (CK) sont bien les hauteurs du triangle ABC issues de B et C.

3. Emettre une conjecture sur la nature du triangle ABC.

4. Démonstration
On pose $h = BH = CK$, la longueur commune des hauteurs issues de B et de C.

- **a.** Exprimer de deux façons différentes l'aire du triangle ABC en fonction de h, d'abord en prenant pour base $[AC]$, puis en prenant pour base $[AB]$.
- **b.** En déduire une égalité qui permettra de conclure sur la nature du triangle ABC.

EXERCICE 552 **10 minutes**

1. Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, placer deux points M et R qui ne sont pas diamétralement opposés et tels que (OM) et (OR) ne sont pas perpendiculaires.
Les tangentes en M et R se coupent en B.
La droite (OR) coupe la droite (BM) en C. La droite (OM) coupe la droite (BR) en A.

2. Démontrer que (OB) est bissectrice de l'angle $\widehat{MBR}$.

3. Démontrer que les droites (OB) et (AC) sont perpendiculaires.

4. Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

EXERCICE 553 **10 minutes**

Soit C un point d'un cercle de diamètre $[AB]$. Soient E et F les symétriques de A et B par rapport au point C.
Démontrer que le quadrilatère $ABEF$ est un losange.

EXERCICE 554 **15 minutes**

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC. $[AD]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. H est le symétrique de D par rapport au milieu A' de $[BC]$.

1. Faire une figure.

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $BDCH$?
   b. En déduire la position relative des droites (BH) et (AC), puis des droites (CH) et (AB).
   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
3. Les droites (OH) et (AA') se coupent en G.
   a. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle ADH.
   b. Pourquoi a-t-on $AG = \frac{2}{3}AA'$?
   c. En déduire que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 555 **20 minutes**

Soient A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et $[AD]$ un diamètre de ce cercle.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.
2. Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?
3. La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E.
   Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.
4. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en A et J, la droite (CE) en H et la droite (BC) en I.
   a. Que représente H pour le triangle ABC ?
   b. En déduire que (BH) est perpendiculaire à (AC).
   c. Montrer que (BH) est parallèle à (CD).
5. Démontrer que $BHCD$ est un parallélogramme. On appelle K le point d'intersection de ses diagonales. Que représente K pour le segment $[HD]$
6. a. Quelle est la nature du triangle ADJ ? En déduire que (CI) et (DJ) sont parallèles.
   b. Montrer que I est le milieu de $[HJ]$.
      ☞ On pourra utiliser le triangle HDJ, après avoir précisé la position de K sur le segment $[HD]$.

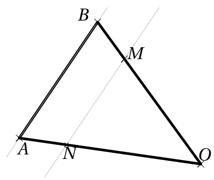
3.2 Thalès et Pythagore

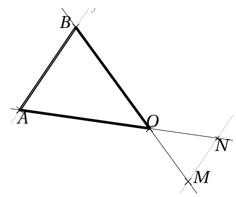
3.2.1 Point de cours

Théorème de Thalès : soient O, A, B sont trois points du plan, $M \in (OA)$ et $N \in (OB)$.

• Si les droites (AB) et (MN) sont parallèles alors $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}$.

• Réciproquement, si $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$ et si les points O, A, M et O, B, N sont alignés dans le même ordre alors les droites (AB) et (MN) sont parallèles.





☞ **Cas particulier : le théorème des milieux**

On se place dans un triangle quelconque.

- La droite passant par les milieux de deux des côtés est parallèle au troisième côté
- Si une droite passe par le milieu d'un premier côté et est parallèle au second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

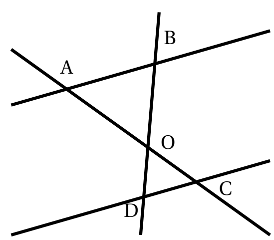
Théorème de Pythagore
Dans un triangle ABC est rectangle en A on a la relation $AC^2 + AB^2 = BC^2$.
Réciproquement, lorsque dans un triangle ABC la longueur des côtés vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ce triangle est rectangle en A.

3.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 556 **5 minutes**

Sur cette figure, on a les longueurs suivantes $OA = 7,5$ cm, $OB = 4$ cm, $OC = 3$ cm $OD = 1,6$ cm.

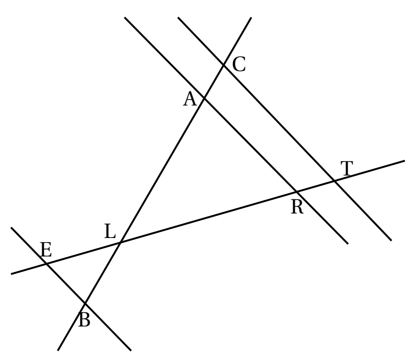
1. Montrer que les droites (DC) et (AB) sont parallèles.
2. Sachant que $DC = 5$ cm, calculer AB.



EXERCICE 557 **10 minutes**

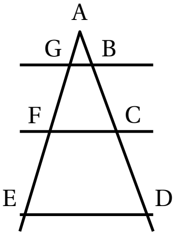
Les droites (AR) et (CT) sont parallèles.
Les points E, L, R, T sont alignés.
Les points C, A, L, B sont alignés.
On donne : $LC = 6$ cm, $LT = 9$ cm, $LA = 4,8$ cm, $LB = 2$ cm, $LE = 3$ cm.

1. Calculer LR.
2. Les droites (EB) et (CT) sont-elles parallèles ?
   La figure n'est pas conforme aux dimensions données.



EXERCICE 558 **10 minutes**

Les mesures de longueurs sont données en centimètres. La figure n'est pas en vraie grandeur.

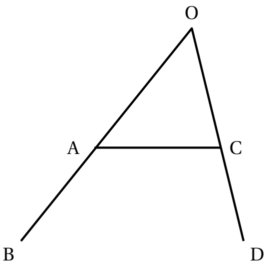


On a AG = 2 ; AF = 5 ; AC = 4 ; GB = 1,5 ;
AE = 10 ; AD = 8 ; (GB)//(FC).

1. Calculer les longueurs AB et FC.
2. Les droites (FC) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

EXERCICE 559 **10 minutes**

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, le point A est sur le segment [OB] et le point C est sur le segment [OD].
On donne : OA = 8,5 cm ; AB = 11,5 cm ; OC = 5 cm ;
CD = 7 cm.



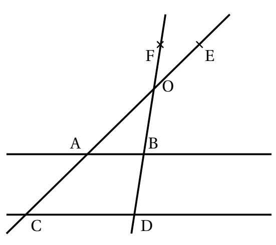
1. Calculer les longueurs OB et OD.
2. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

EXERCICE 560 **10 minutes**

$[AC]$ et $[EF]$ sont deux segments sécants en B. On sait que $AB = 6$ cm et $BC = 10$ cm ; $EB = 4,8$ cm et $BF = 8$ cm.

1. Faire une figure.
2. Les droites (AE) et (FC) sont-elles parallèles ? Justifier.
3. Les droites (AF) et (EC) sont-elles parallèles ? Justifier.

EXERCICE 561 **10 minutes**

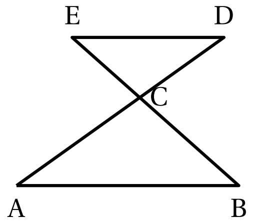


Pour tout l'exercice, l'unité de longueur est le centimètre.
Les points E, O, A, C d'une part et F, O, B, D d'autre part sont alignés dans cet ordre.
De plus, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On donne OA = 2,4 ; OC = 6 ; OD = 5 ; AB = 1,5 ; OE = 1,8 ; OF = 1,5.

1. Calculer OB et CD.
2. Démontrer que les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

EXERCICE 562 **15 minutes**

La figure suivante est donnée à titre indicatif pour préciser la position des points A, B, C, D et E. Les longueurs représentées ne sont pas exactes.



On donne : $CE = 5$; $CD = 12$
$CA = 18$; $CB = 7{,}5$ et $AB = 19{,}5$.

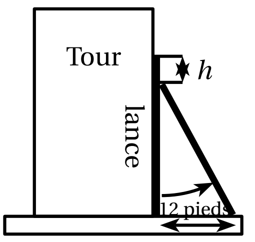
1. Montrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.
2. Montrer que ED = 13.
3. Montrer que le triangle CED est rectangle.

EXERCICE 563 **10 minutes**
Dans chaque cas, justifier que les triangles ABC est ou n'est pas rectangle.

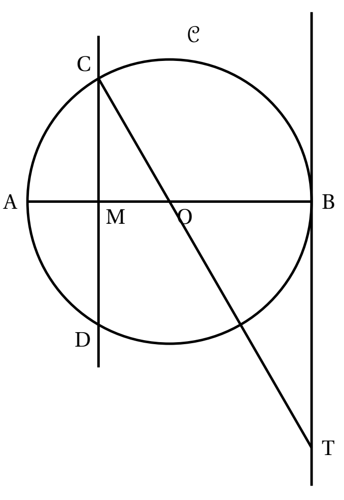
1. $AB = 12$, $AC = 16$ et $BC = 20$.
2. $AB = 11$, $AC = 4{,}5$ et $BC = 10$.
3. $AB = 13$, $AC = 5$ et $BC = 12$.

3.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 564 **10 minutes**
A Pise vers 1200 après J. C. (problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Age).
Une lance, longue de 20 pieds, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol. Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?
Un pied est une unité de mesure valant environ 30 cm.



EXERCICE 565 **10 minutes**
Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de centre O est égal à 3 cm.
$[AB]$ est un diamètre de ce cercle.
Les points C et D appartiennent au cercle et la droite (CD) est la médiatrice du rayon $[OA]$.
La droite (OC) coupe en T la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point B.
La figure ci-contre n'est pas donnée en vraie grandeur.

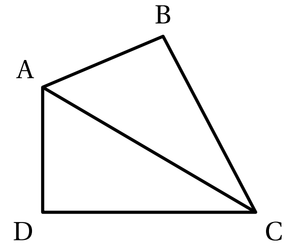


1. Montrer que (CM) et (BT) sont parallèles.
2. Calculer la longueur OT.
3. **a.** Démontrer que le triangle COA est équilatéral.
b. En déduire une mesure (en degrès) de l'angle $\widehat{MCO}$, puis une mesure (en degrés) de l'angle $\widehat{DOT}$.

EXERCICE 566 **10 minutes**
Tom est propriétaire d'un champ, représenté par le triangle ABC ci-dessous. Il achète à son

voisin le champ adjacent, représenté par le triangle ADC. On obtient ainsi un nouveau champ formé par le quadrilatère $ABCD$.

Tom sait que le périmètre de son champ ABC est de 154 mètres et que $BC = 56$ m.
Son voisin l'informe que le périmètre du champ ADC est de 144 mètres et que $AC = 65$ m.
De plus, il sait que AD = 16 m.



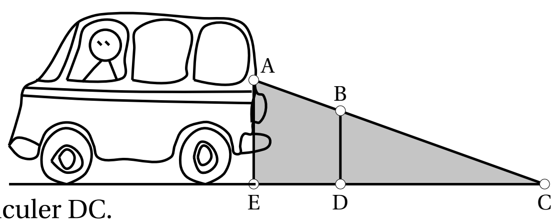
1. **a.** Justifier que les longueurs AB et DC sont respectivement égales à 33 m et 63 m.
   b. Calculer le périmètre du champ $ABCD$.
2. Démontrer que le triangle ADC est rectangle en D.
   On admet que le triangle ABC est rectangle en B.
3. Calculer l'aire du champ $ABCD$.
4. Tom veut clôturer son champ avec du grillage. Il se rend chez son commerçant habituel et tombe sur l'annonce suivante :

Grillage : 0,85 € par mètre

   Combien va-t-il payer pour clôturer son champ ?

EXERCICE 567 **10 minutes**

En se retournant lors d'une marche arrière, le conducteur d'une camionnette voit le sol à 6 m derrière son camion.
Sur le schéma, la zone grisée correspond à ce que le conducteur ne voit pas lorsqu'il regarde en arrière.



Données :
(AE) // (BD)
AE = 1,50 m
BD = 1,10 m
EC = 6 m

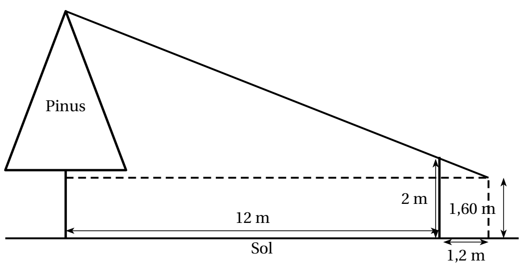
1. Calculer DC.
2. En déduire que ED = 1,60 m.
3. Une fillette mesure 1,10 m. Elle passe à 1,40 m derrière la camionnette.
   Le conducteur peut-il la voir ? Expliquer.

EXERCICE 568 **10 minutes**

Teiki se promène en montagne et aimerait connaître la hauteur d'un *Pinus* (ou Pin des Caraïbes) situé devant lui. Pour cela, il utilise un bâton et prend quelques mesures au sol. Il procède de la façon suivante :

- Il pique le bâton en terre, verticalement, à 12 mètres du *Pinus*.
- La partie visible (hors du sol) du bâton mesure 2 m.
- Teiki se place derrière le bâton, de façon à ce que son œil, situé à 1,60 m au dessus du sol, voit en alignement le sommet de l'arbre et l'extrémité du bâton.
- Teiki marque sa position au sol, puis mesure la distance entre sa position et le bâton. Il trouve alors 1,2 m.

On peut représenter cette situation à l'aide du schéma ci-dessous :



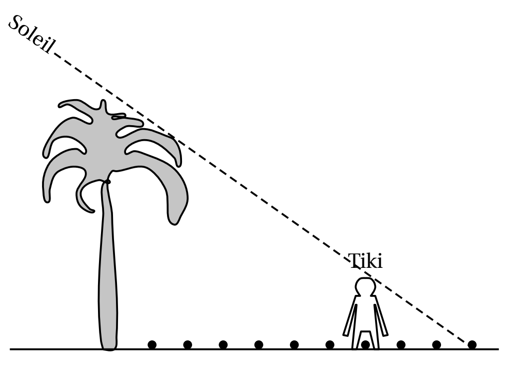
Quelle est la hauteur du *Pinus* au-dessus du sol ?

EXERCICE 569 **10 minutes**

Document 1 : Extrait de la liste alphabétique des élèves de la 2e 4 et d'informations relevées en E. P. S. pour préparer des épreuves d'athlétisme.

Prénoms	**Date de naissance**	**Année**	**Taille en m**	**Nombre de pas réalisés sur 100 m**
Lahaina	26-oct.	1997	1,81	110
Manuarii	20-mai	1997	1,62	123
Maro-Tea	5-nov.	1998	1,56	128
Mehiti	5-juin	1997	1,60	125
Moana	10-déc.	1997	1,80	111
Rahina	14-mai	1997	1,53	130

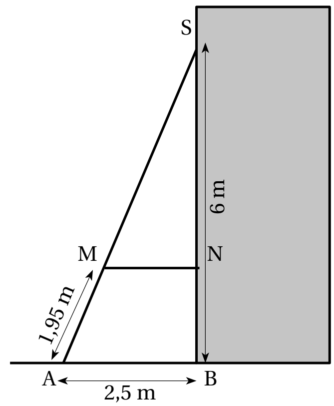
Document 2 : Dans le croquis ci-dessous, le tiki représente Moana, élève de 2e 4.



Moana a d'abord posé sur le sol, **à partir du cocotier**, des noix de coco régulièrement espacées à chacun de ses pas, puis il s'est ensuite placé exactement comme indiqué sur le croquis, au niveau de la 7e noix de coco.
A l'aide d'informations qui proviennent des documents précédents, calculer la hauteur du cocotier en expliquant clairement la démarche.

EXERCICE 570 — 10 minutes

Pour consolider un bâtiment, on a construit un contrefort en bois (dessin ci-contre).
On donne :
$BS = 6$ m; $BN = 1,8$ m;
$AM = 1,95$ m; $AB = 2,5$ m.



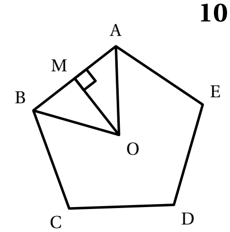
1. En considérant que le montant $[BS]$ est perpendiculaire au sol, calculer la longueur AS.
2. Calculer les longueurs SM et SN.
3. Démontrer que la traverse $[MN]$ est bien parallèle au sol.

EXERCICE 571 — 10 minutes

1. **a.** Construire un triangle EFG, de base $[FG]$ tel que $EF = 5,4$ cm; $EG = 7,2$ cm; $FG = 9$ cm.
   b. Soit M le point du segment $[EF]$ tel que $EM = \dfrac{2}{3} \times EF$.
   Calculer la longueur EM puis placer le point M.
   c. Par M on mène la parallèle à la base $[FG]$; elle coupe le côté $[EG]$ en N.
   Compléter la figure.
   Calculer EN.
2. **a.** Démontrer que le triangle EFG est rectangle en E.
   b. En déduire l'aire du triangle EMN.

EXERCICE 572 — 10 minutes

Le Pentagone est un bâtiment hébergeant le ministère de la défense des Etats-Unis.
Il a la forme d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $OA = 238$ m.
Il est représenté par le schéma ci-contre.

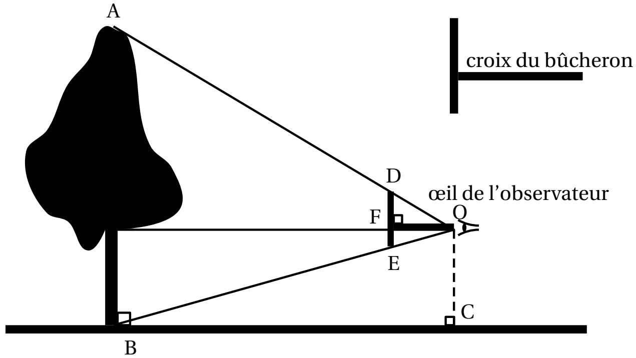


1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. La hauteur issue de O dans le triangle AOB coupe le côté $[AB]$ au point M.
   a. Justifier que (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de $[AB]$.

b. Prouver que $[AM]$ mesure environ 140 m.
c. En déduire une valeur approchée du périmètre du Pentagone.

EXERCICE 573 **10 minutes**

Julien veut mesurer un jeune chêne avec une croix de bûcheron comme le montre le schéma ci-dessous.

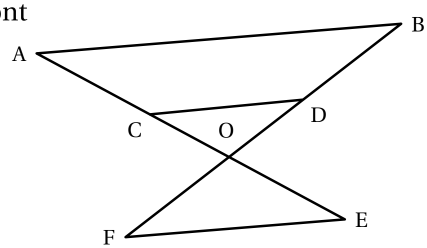


Il place la croix de sorte que O, D et A d'une part et O, E et B d'autre part soient alignés.
Il sait que $DE = 20$ cm et $OF = 35$ cm. Il place $[DE]$ verticalement et $[OF]$ horizontalement.
Il mesure au sol $BC = 7,7$ m.

1. Le triangle ABO est un agrandissement du triangle ODE. Justifier que le coefficient d'agrandissement est 22.
2. Calculer la hauteur de l'arbre en mètres.
3. Certaines croix du bûcheron sont telles que $DE = OF$.
   Quel avantage apporte ce type de croix?
4. Julien enroule une corde autour du tronc de l'arbre à 1,5 m du sol. Il mesure ainsi une circonférence de 138 cm.
   Quel est le diamètre de cet arbre à cette hauteur? Donner un arrondi au centimètre près.

EXERCICE 574 **10 minutes**

Sur le figure, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
OA = 8
OB = 10
OC = 6,4
OE = 2
OF = 2,5

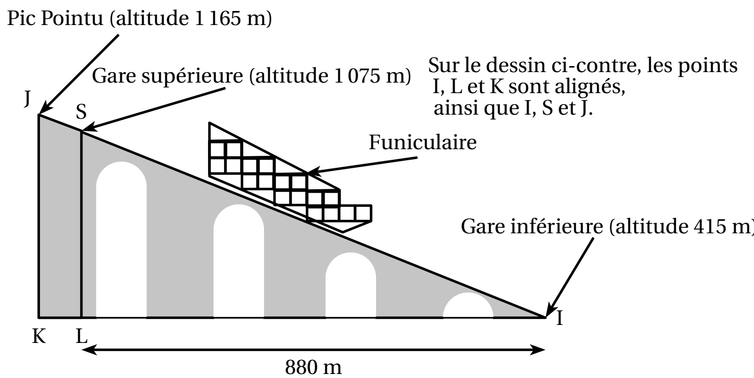


1. Calculer la longueur OD.
2. Démontrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

EXERCICE 575 **15 minutes**

Tom décide de monter au Pic Pointu en prenant le funiculaire[1] entre la gare inférieure et la gare supérieure, la suite du trajet s'effectuant à pied.

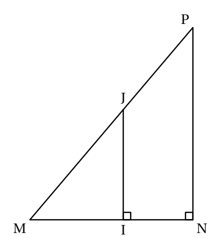
(1) Un funiculaire est une remontée mécanique équipée de véhicules circulant sur des rails en pente.



1. A l'aide des altitudes fournies, déterminer les longueurs SL et JK.
2. **a.** Montrer que la longueur du trajet SI entre les deux gares est 1 100 m.
   b. Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{SIL}$. On arrondira à un degré près.
3. Le funiculaire se déplace à la vitesse moyenne constante de 10 km.h^{-1}, aussi bien à la montée qu'à la descente.
   Calculer la durée du trajet aller entre les deux gares. On donnera le résultat en min et s.
4. Entre la gare supérieure et le sommet, Tom effectue le trajet en marchant.
   Quelle distance aura-t-il parcourue à pied ?

EXERCICE 576 **5 minutes**

MNP est un triangle rectangle en N tel que $MP = 25$.
I est le point du segment $[MN]$ tel que : $MI = 8$ et $IN = 7$.
La perpendiculaire au côté $[MN]$ passant par I coupe le côté $[MP]$ en J.



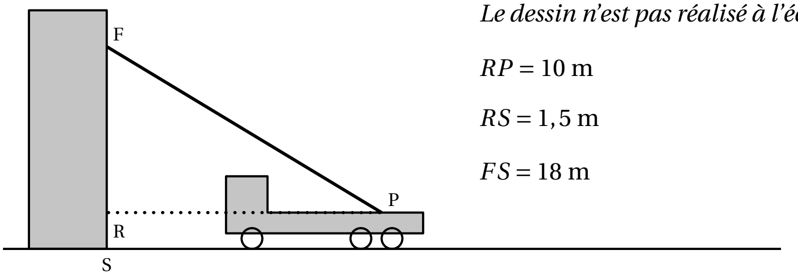
1. Justifier que les droites (IJ) et (NP) sont parallèles.
2. Calculer MJ.

EXERCICE 577 **10 minutes**

1. Construire un triangle RAS tel que : $RA = 8$ cm, $RS = 6,4$ cm et $AS = 4,8$ cm.
2. Prouver que le triangle RAS est rectangle.
3. **a.** Placer le point M du segment $[RS]$ tel que $RM = 4,8$ cm et le point N du segment $[RA]$ tel que $RN = 6$ cm.
   b. Prouver que les droites (MN) et (AS) sont parallèles.
   c. Calculer MN.

EXERCICE 578 **10 minutes**

Lors d'une intervention, les pompiers doivent atteindre une fenêtre F située à 18 mètres au-dessus du sol en utilisant leur grande échelle $[PF]$. Ils doivent prévoir les réglages de l'échelle. Le pied P de l'échelle est situé sur le camion à 1,5 m du sol et à 10 m de l'immeuble.



Le dessin n'est pas réalisé à l'échelle.

$RP = 10$ m

$RS = 1{,}5$ m

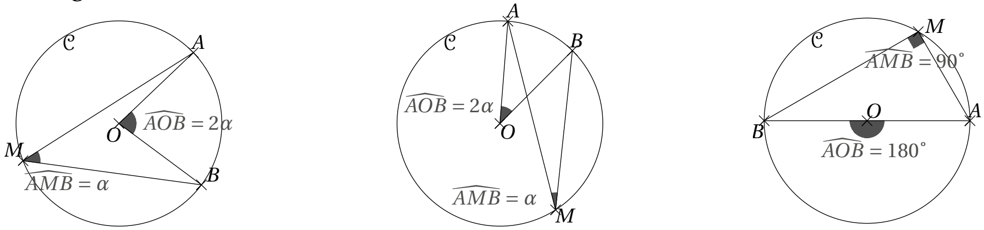
$FS = 18$ m

1. D'après les informations ci-dessus, déterminer la longueur RF.
2. Déterminer l'angle que fait l'échelle avec l'horizontale, c'est-à-dire $\widehat{FPR}$, arrondi à l'unité.
3. L'échelle a une longueur maximale de 25 mètres. Sera-t-elle assez longue pour atteindre la fenêtre F ?

3.3 Angles et trigonométrie

3.3.1 Point de cours

Soient A et B deux points d'un cercle de centre O.
Pour tout point M de ce cercle, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ est égale à la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.



Conséquences :

- Si M et N sont deux points du cercle de centre O alors $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.
- Si le triangle ABC est rectangle en A alors il est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$.
- Si le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$ alors il est rectangle en A.

Formules de trigonométrie : soit ABC un triangle rectangle en A alors

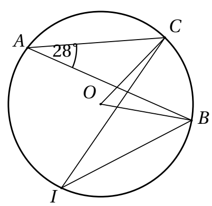
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}, \qquad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\widehat{ABC} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

Valeurs remarquables :

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

3.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 579 **5 minutes**



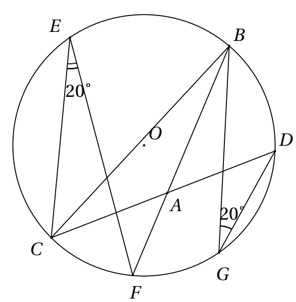
On sait que $\widehat{BAC} = 28°$.
Donner, en justifiant la réponse, la mesure des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{BIC}$.

EXERCICE 580 **5 minutes**

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, ne contenant pas C, du cercle circonscrit au triangle ABC.
Déterminer les mesures des angles $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{AMB}$.

EXERCICE 581 **5 minutes**

Déterminer la mesure des angles du triangle ABC.

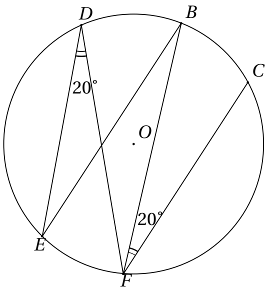


EXERCICE 582 **5 minutes**

Soit O est le centre du cercle passant par les points A, B, C, déterminer la mesure des angles du triangle ABC sachant que $\widehat{\mathrm{AOB}} = 50°$ et $\widehat{\mathrm{BOC}} = 150°$.

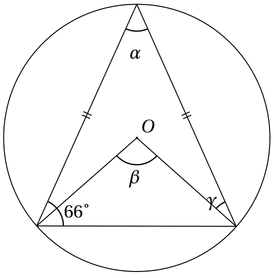
EXERCICE 583 **5 minutes**

Démontrer que les droites (BE) et (CF) sont parallèles.



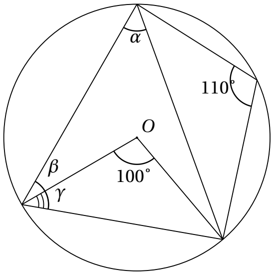
EXERCICE 584 **5 minutes**

Déterminer les mesures des angles α, β et γ si O est le centre du cercle.



EXERCICE 585 **5 minutes**

Déterminer les mesures des angles α, β et γ si O est le centre du cercle.



EXERCICE 586 **10 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A, on désigne par H le pied de la hauteur issue de A. On sait que $\widehat{ABC} = 30°$ et $BC = 6$ cm. Calculer AB, AC, BH, CH et AH.

EXERCICE 587 **10 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A, on désigne par H le pied de la hauteur issue de A. On sait que $\widehat{ABC} = 45°$ et $BH = 8$ cm. Calculer AH, AB, CH, AC et BC.

EXERCICE 588 **10 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A, on désigne par H le pied de la hauteur issue de A. On sait que $\widehat{ABC} = 52°$ et $BH = 3$ cm. Calculer AB, AC, BC, HC et AH.

EXERCICE 589 **15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Compléter le tableau suivant, en arrondissant à $0,01°$ pour les angles et à $0,01$ cm pour les longueurs.

$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$	AB	BC	AC
65°			8 cm	
	15°	12 cm		
		5 cm	8 cm	
		4 cm		5 cm
		10 cm		2cm

EXERCICE 590 **15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Compléter le tableau suivant, en arrondissant à $0,01°$ pour les angles et à $0,01$ cm pour les longueurs.

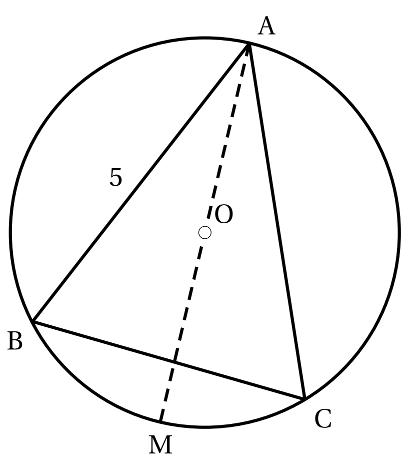
$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$	AB	BC	AC
22°				4 cm
	42°		16 cm	
		5 cm	10 cm	
		6 cm		6 cm
		17 cm		8 cm

3.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 591 **5 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en B, démontrer que $\left(\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(\sin\widehat{A}\right)^2 = 1$.
☞ On démontrerait de même que $\left(\cos\widehat{C}\right)^2 + \left(\sin\widehat{C}\right)^2 = 1$.

EXERCICE 592 **10 minutes**



On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50° et AB est égal à 5 cm.
On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (OA) coupe ce cercle, noté (C), en un autre point M.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAM}$? Aucune justification n'est demandée.
2. Quelle est la nature du triangle BAM ? Justifier.
3. Calculer la longueur AM et en donner un arrondi au dixième de centimètre près.
4. La droite (BO) coupe le cercle (C) en un autre point K. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BKC}$? Justifier.

EXERCICE 593 **10 minutes**

1. Soit $[AB]$ un segment tel que $AB = 7$ cm.
Placer un point C tel que $\widehat{BAC} = 70$ ° et $\widehat{ABC} = 60$ °.

2. Construire le cercle circonscrit au triangle ABC, et appeler O son centre.

3. Donner la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ en justifiant la réponse.

EXERCICE 594 **10 minutes**

Soit AIR est un triangle rectangle en A tel que $AI = 6,5$ cm et $\widehat{\text{AIR}} = 35$ degrés.
La hauteur issue de A coupe le côté $[RI]$ en P.

1. Faire la figure.

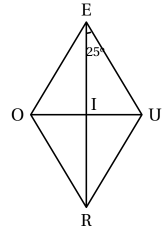
2. a. Exprimer $\tan\left(\widehat{\text{AIR}}\right)$ en fonction des côtés du triangle AIR.

b. En déduire la longueur AR en cm (on donnera la valeur arrondie au centième).

3. En utilisant le triangle PAI, calculer la longueur AP en cm (on donnera la valeur arrondie au centième).

EXERCICE 595 **10 minutes**

Le quadrilatère $EURO$ est un losange de centre I.
L'angle $\widehat{IEU}$ vaut 25° et la diagonale [ER] mesure 10 cm.

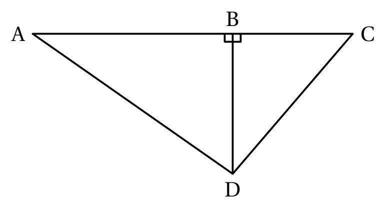


1. Prouver que le triangle EIU est rectangle en I.

2. Calculer la valeur arrondie au centième de cm de la longueur IU.

EXERCICE 596 **10 minutes**

On donne : $BD = 7$ cm ; $AD = 12$ cm et $\widehat{\text{BCD}} = 50°$

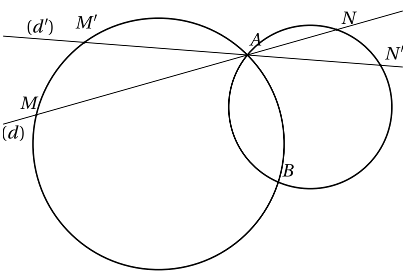


1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ (on donnera le résultat arrondi au degré).

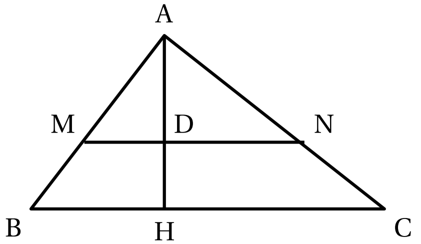
2. Calculer la longueur CD (on donnera le résultat arrondi au dixième).

EXERCICE 597 **10 minutes**

Deux cercles se coupent en A et B. Une droite (d) passant par A coupe ces cercles en M et N. Une droite (d') coupent ces cercles en M' et N'.
Démontrer que $\widehat{MBN} = \widehat{M'BN'}$.



EXERCICE 598 **10 minutes**



On donne la figure ci-contre dans laquelle les dimensions ne sont pas respectées.
Les longueurs réelles sont :
AM = 9 cm, MB = 6 cm
BH = 9 cm, HC = 16 cm
AC = 20 cm

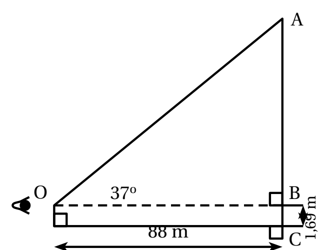
Les droites (MN) et (AH) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (BC) et (AH).

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer la longueur AH en justifiant ce calcul.
2. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ABH}$. En déduire une valeur approchée au degré près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABH}$.
3. Justifier que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Calculer la longueur MD en justifiant ce calcul.
4. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Justifier la réponse.

EXERCICE 599 **5 minutes**

Michel a reculé pour mieux admirer un monument en entier.
Il se trouve maintenant à 88 m de celui-ci et l'angle entre l'horizontale de ses yeux et le haut du monument est de 37° (schéma ci-contre).
Sachant que les yeux de Michel sont à 1,69 m du sol, calculer la longueur AC (arrondir à 0,01 m près).



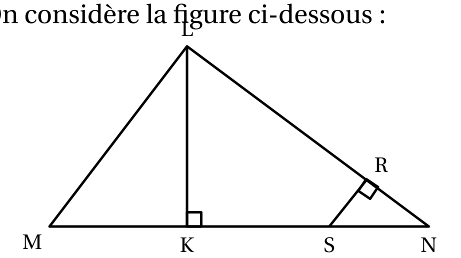
Voici une liste de monuments connus et leurs hauteurs respectives :

Acropole d'Athènes	50 m	Panthéon	80 m
Arc de triomphe de l'Etoile	49,55 m	Pyramide de Kheops	138 m
Notre Dame de Paris	68 m	Basilique St Pierre de Rome	45 m

De quel monument peut-il s'agir ?

EXERCICE 600 **10 minutes**

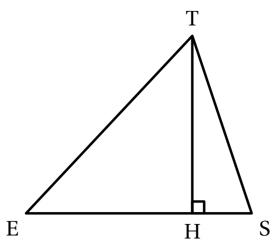
On considère la figure ci-dessous :



On donne MN = 8 cm ; ML = 4,8 cm
LN = 6,4 cm.

1. Démontrer que le triangle LMN est rectangle.
2. Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{LNM}$.
3. Soit K le pied de la hauteur issue de L. Montrer que LK = 3,84 cm.
4. Soit S le point de $[MN]$ tel que $NS = 2$ cm, la perpendiculaire à (LN) passant par S coupe $[LN]$ en R. Calculer RS.

EXERCICE 601 **10 minutes**



Le triangle ci-contre représente un triangle EST, isocèle en E, $[TH]$ est la hauteur issue de T.
On sait que :

- $ES = ET = 12$ cm (les dimensions ne sont pas respectées sur la figure) ;
- l'aire du triangle EST est de 42 cm^2.

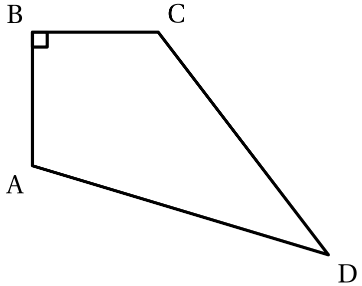
1. Prouver que $TH = 7$ cm.
2. Calcule l'angle $\widehat{TES}$ (on donnera sa valeur arrondie au degré près).
3. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{EST}$.

EXERCICE 602 **10 minutes**

Construire un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ avec $AB = 6$ cm.
Placer sur ce cercle un point C tel que $BC = 3,6$ cm.

1. Quelle est la nature du triangle ACB ? Justifier.
   Démontrer que la longueur AC est égale à $4,8$ cm.
2. Déterminer par le calcul la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{COB}$.
   On arrondira les deux mesures à l'unité.
3. Soit E le milieu du segment $[OB]$. La parallèle à (BC) passant par E coupe le segment $[AC]$ en F.
   Calculer les longueurs exactes des segments $[AF]$ et $[FE]$.

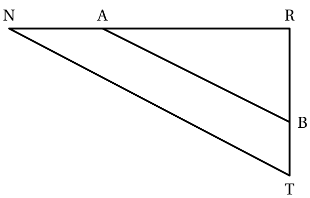
EXERCICE 603 **10 minutes**



Sur la figure suivante (les unités ne sont pas respectées), on a :
$\widehat{ABC}$ est un angle droit ; $AD = 10$ cm ; $CD = 8$ cm ;
$AB = 3,6$ cm et $BC = 4,8$ cm.

1. Calcule la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$. En déduire une valeur arrondie au degré de $\widehat{BAC}$.
2. Calculer la longueur AC et montrer que le triangle ACD est rectangle.
3. Montrer que le triangle ABC est une réduction du triangle ACD dont on précisera le coefficient de réduction.

EXERCICE 604 **10 minutes**

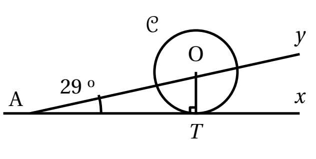


Sur ce dessin, les dimensions ne sont pas respectées.
On considère un triangle RNT rectangle en R tel que :
$NR = 9$ cm ; $AR = 6$ cm ;
$NT = 10,2$ cm ; $BT = 1,6$ cm.

1. Calculer la valeur de RT.
2. En considérant que $RT = 4,8$ cm, démontrer que les droites (AB) et (NT) sont parallèles.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{RNT}$, en donner la valeur arrondie au degré près.

EXERCICE 605 **10 minutes**

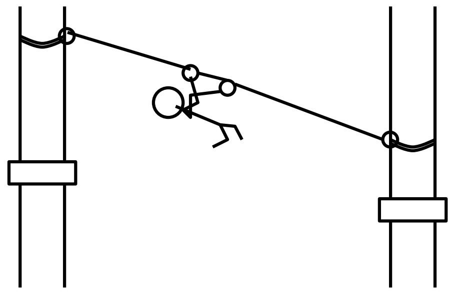
La figure ci-contre n'est pas à l'échelle
On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, point de la demi-droite $[Ay)$. La demi-droite $[Ax)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en T. On donne $AT = 9$ cm.



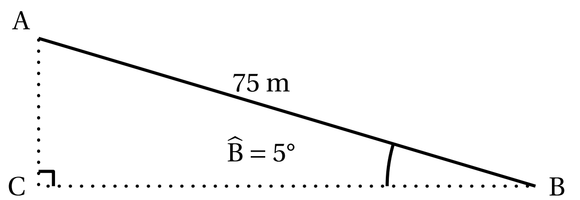
1. Calculer une valeur approchée au millimètre près du rayon du cercle $(\mathcal{C})$.
2. A quelle distance de A faut-il placer un point B sur $[AT]$ pour que l'angle $\widehat{OBT}$ mesure 30° ? Donner une valeur approchée arrondie au millimètre.

EXERCICE 606 **10 minutes**

Dans un parc d'activités, une épreuve consiste à parcourir une certaine distance entre deux arbres, avec une tyrolienne (sorte de poulie qui permet de glisser le long d'un câble).



La situation est schématisée dans un plan vertical par le triangle ABC ci-après, où A et B désignent les points de fixation du câble sur les arbres, le segment $[AB]$ représentant le câble.
On sait que le câble mesure 75 m de long, qu'il fait un angle de 5° avec l'horizontale représentée par le segment $[BC]$ sur le schéma.



1. Calculer la valeur arrondie au centimètre de la distance BC entre les deux arbres.
2. En utilisant une relation trigonométrique, calculer la troncature au centimètre de la différence de hauteur entre les deux plate-formes, représentée par $[AC]$ sur le schéma.

EXERCICE 607 **10 minutes**

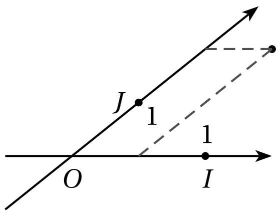
Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC < AB$. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N.

1. Démontrer que les triangles BMC et BNC sont rectangles. En déduire que les angles $\widehat{CBN}$ et $\widehat{BCM}$ sont égaux.
2. Démontrer que les angles $\widehat{BCM}$ et $\widehat{BNM}$ sont égaux.
3. Démontrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

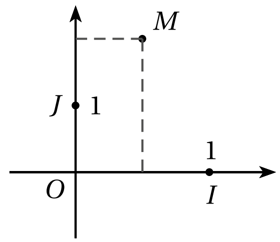
3.4 Repérage dans le plan

3.4.1 Point de cours

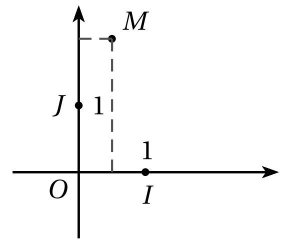
Propriété 1 :
Repères du plan
Un **repère** du plan est défini par la donnée, dans un ordre précis, de trois points non alignés : O, I et J.



Repère **quelconque**



Repère **orthogonal** :
Les axes sont perpendiculaires. Les unités sur chaque axe ne sont pas nécessairement les mêmes.



Repère **orthonormé** :
Les axes sont perpendiculaires. Les unités sont les mêmes sur chaque axe.

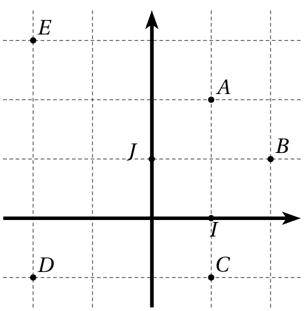
☞ Pour **lire les coordonnées d'un point**, on trace des lignes parallèles aux axes et on respecte l'unité définie sur chaque axe par les points I et J.

Propriétés : Soient $A(\ x_A\ ;\ y_A\ )$ et $B(\ x_B\ ;\ y_B\ )$ deux points dans un repère $(O; I, J)$.
Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.
La longueur du segment $[AB]$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - yA)^2}$

3.4.2 Exercices d'application de cours

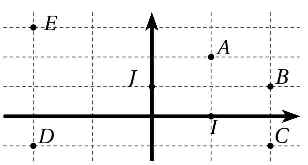
EXERCICE 608 **5 minutes**

Lire sur le graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère $(O;\ I,\ J)$.



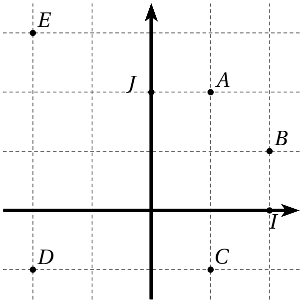
EXERCICE 609 **5 minutes**

Lire sur le graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère $(O;\ I,\ J)$.



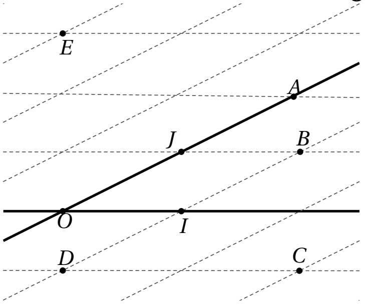
EXERCICE 610 **5 minutes**

Lire sur le graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère $(O;\ I,\ J)$.



EXERCICE 611 **5 minutes**

Lire sur le graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère $(O;\ I,\ J)$.



EXERCICE 612 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté 2, on note O son centre, E le point de $[BC]$ tel que $BE = \frac{1}{4}BC$ et F le point de $[CD]$ tel que $CF = \frac{1}{4}CD$.

1. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A;\ B,\ D)$.

2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(O;\ B,\ C)$.

EXERCICE 613 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 1$ et $BC = 2$, on note O son centre, E le point de $[BC]$ tel que $BE = \frac{1}{4}BC$ et F le point de $[CD]$ tel que $CF = \frac{1}{4}CD$.

1. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A;\ B,\ D)$.

2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(O;\ C,\ D)$.

EXERCICE 614 **5 minutes**

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère les points $A(-3\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ 9)$ et $C(9\ ;\ 4)$.

1. Faire une figure.

2. On note M le milieu du segment $[AC]$. Calculer les coordonnées du point M.

3. Calculer la longueur BC.

EXERCICE 615 **10 minutes**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre

1. Placer les points $A(-2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 4)$ et $C(6\ ;\ -1)$.
   On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC (on donnera les valeurs exactes).
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
4. Soit M le milieu de $[AC]$. Calculer les coordonnées du point M.

EXERCICE 616 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $A(2\ ;\ 1)$, $B(5\ ;\ 5)$ et $C(6\ ;\ 2)$.
2. Calculer la distance AB.
3. Placer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
4. Donner sans justifier les coordonnées du point D.
5. Calculer les coordonnées du centre du parallélogramme $ABCD$.

EXERCICE 617 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $A(-1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 2)$ et $C(3\ ;\ -4)$.
2. Montrer que $AB = \sqrt{8}$, $AC = \sqrt{32}$ et $BC = \sqrt{40}$.
3. En déduire que le triangle ABC est rectangle et préciser l'angle droit.

EXERCICE 618 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $E(-4\ ;\ -1)$, $F(4;4)$ et $G(2\ ;\ -1)$.
2. Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[EG]$.
3. Soit le point H$(4\ ;\ -1)$. On admet que $[FH]$ est la hauteur issue de F du triangle EFG et que $FH = 5$ cm.
   Calculer EG puis en déduire l'aire du triangle EFG.

EXERCICE 619 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $A(-3\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ -2)$ et $C(2\ ;\ 3)$ dans le repère.
2. Calculer les distances AC et BC.
3. Qu'en déduire pour le triangle ABC ? Justifier.

EXERCICE 620 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.
On considère les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ 1)$, $C(-3\ ;\ -2)$ et $D(0\ ;\ -1)$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O; I, J)$.
2. Calculer les distances AB et BC.

3. Calculer les distances AD et CD.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier .

3.4.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 621 **15 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Dans un tel repère, placer les points : $A(3\ ;\ -2)$, $B(1\ ;\ 2)$ et $C(-3\ ;\ 0)$.
2. Calculer la valeur exacte de AB.
3. **a.** Calculer la valeur exacte de BC, en déduire que ABC est un triangle isocèle.
b. Calculer la valeur exacte de AC, prouver que ABC est un triangle rectangle.
4. Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment $[AC]$. Placer M.
5. Construire le point D symétrique du point B par rapport au point M.
Calculer les coordonnées du point D.
6. Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
7. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 622 **15 minutes**

1. Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, placer les points $A(5\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(2\ ;\ 5)$.
2. **a.** Calculer AB et BC.
b. On donne $AC = 5$. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
3. Soit le point E symétrique du point A par rapport au point C et soit le point F symétrique du point B par rapport au point C.
a. Construire les points E et F.
b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABEF$? Justifier la réponse.

EXERCICE 623 **15 minutes**

1. Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre. placer les points suivants A$(2\ ;\ -1)$, B$(-2\ ;\ 3)$ et C$(-4\ ;\ -3)$.
2. **a.** Calculer AC et BC.
b. En déduire que le triangle ABC est isocèle.
3. Démontrer que J est le milieu du segment $[AB]$.
4. Démontrer que la droite (CJ) est la médiatrice du segment $[AB]$.

EXERCICE 624 **10 minutes**

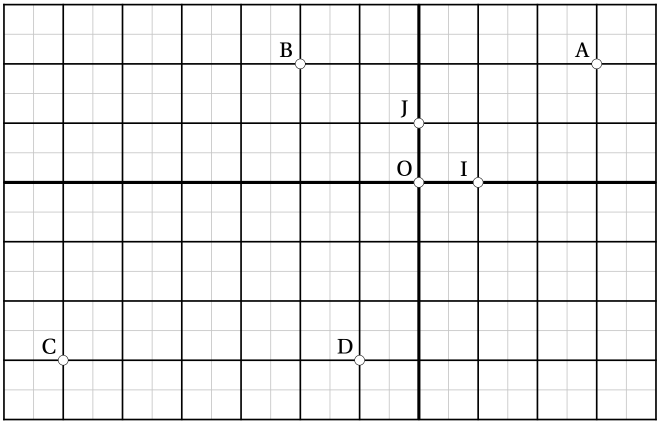
On considère un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $A(2;2)$, $B(-4\ ;\ 5)$ et $C(-4\ ;\ -2)$.
2. **a.** Montrer que AC est égale à $\sqrt{52}$ cm.
b. Calculer BC.
c. Le triangle ABC est-il isocèle en C ? Justifier.

3. **a.** Construire le milieu K du segment $[AB]$.
   b. La droite (CK) est-elle la médiatrice du segment $[AB]$? Justifier.

EXERCICE 625 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.



1. Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Calculer la distance CB.
3. Calculer les coordonnées de E, milieu de $[BD]$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

EXERCICE 626 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. **a.** Placer le point $A(5;3)$.
   b. Déterminer la distance IA.
2. On considère le point $B(-1\ ;\ \sqrt{21})$.
   a. Prouver que A et B sont sur le cercle de centre I et de rayon 5.
   b. Tracer ce cercle et placer le point B.
3. **a.** Placer le point C, symétrique de A par rapport à I.
   b. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 627 **10 minutes**

1. Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, placer les points $A(-4\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ -3)$ et $C(4\ ;\ 0)$.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
3. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
4. Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallèlogramme.
   Montrer que les coordonnées de D sont $(1\ ;\ 5)$.
5. Préciser alors la nature du quadrilatère $ABCD$ et justifier la réponse.

EXERCICE 628 **15 minutes**

On se placera dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ où l'unité est le centimètre et on complétera la figure au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points $A(1;5)$, $B(-1\ ;\ 3)$ et $K(7\ ;\ -1)$.
2. On appelle G le milieu du segment $[BK]$, montrer par le calcul que les coordonnées du point sont $(3\ ;\ 1)$, puis le placer sur la figure.
3. Construire le point R symétrique du point A par rapport au point G.
   Lire les coordonnées du point R sur le graphique.
4. Démontrer que $BK = 4\sqrt{5}$ cm.
5. Sachant que $RA = 4\sqrt{5}$ cm, démontrer, sans nouveau calcul, que $ABRK$ est un rectangle.
6. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BK]$ et montrer que son rayon GB est égal à $2\sqrt{5}$ cm.
7. Placer le point $E(1\ ;\ -3)$. Calculer GE et en déduire que ce point E appartient au cercle $\mathcal{C}$.
8. En déduire, sans aucun calcul, que le triangle BEK est rectangle en E.

EXERCICE 629 **15 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Représenter les points M$(1\ ;\ -2)$; N$(2 ; 1)$ et P$(5 ; 0)$.
2. Montrer que $MN = \sqrt{10}$ cm, $NP = \sqrt{10}$ cm et $MP = 2\sqrt{5}$ cm.
3. En déduire que le triangle MNP est rectangle et isocèle en N.
4. **a.** Soit K le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle MNP. Calculer les coordonnées de K et construire K.
   b. Montrer que le rayon r du cercle (Γ) est égal à $\sqrt{5}$ cm.
5. **a.** Construire le cercle (Γ).
   Construire le point $D(2\ ;\ -3)$ et montrer que le point D appartient au cercle (Γ).
   b. Montrer que $\widehat{NDP} = \widehat{NMP} = 45°$.

EXERCICE 630 **10 minutes**

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre, placer les points $A(6\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -3)$ et $C(-4\ ;\ 0)$.

1. Montrer que $AB = 4\sqrt{5}$.
2. On donne de plus $AC = \sqrt{125}$ et $BC = \sqrt{45}$.
   En déduire la nature du triangle ABC.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Préciser la position de son centre appelé K et la longueur de son rayon. Placer K.
   b. Calculer les coordonnées de K.

EXERCICE 631 **15 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points $A(3;0)$, $B(4;3)$, $C(-4,5\ ;\ 0)$ et $D(-6\ ;\ -4,5)$.
   On admet que les points B, O et D sont alignés.

2. Donner sans justifier les longueurs CA et OC.
Montrer que $OB = 5$ cm et $OD = 7,5$ cm.
3. Prouver que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
4. Calculer les coordonnées de M milieu de $[AB]$.
Placer le point M. Tracer la droite (OM) ; elle coupe le segment $[CD]$ en N.
5. La propriété de Thalès permet d'écrire :

$$\text{d'une part}\quad \frac{OC}{OA} = \frac{CN}{AM}, \quad \text{et d'autre part}\quad \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

Quels sont les deux triangles considérés dans le premier cas ? dans le deuxième cas ?
6. En utilisant les deux égalités précédentes et en remplaçant AB par $2AM$, prouver que N est le milieu de $[CD]$.

3.5 Vecteurs du plan

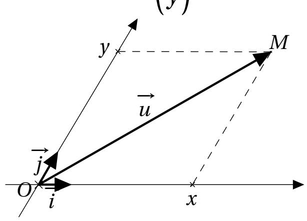
3.5.1 Point de cours

Définition 1 : Dans le repère $(O;\ I,\ J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
On peut aussi écrire $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\ ;\ y - B - y_A\right)$.

Notation : Dans la suite, nous utiliserons généralement les vecteurs $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Propriété 1 : Dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de l'unique point $M(x\ ;\ y)$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarque : Un repère peut n'être ni orthonormé, ni orthogonal, mais quelconque comme dans l'illustration ci-contre.



Propriété 2 : Somme de deux vecteurs
• Relation de Chasles : quels que soient les points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
• Règle du parallélogramme : la somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $AOBM$ est un parallélogramme.

Propriété 3 : Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un **opposé** noté $-\overrightarrow{u}$ et pour tous points A et B du plan, on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Propriété 4 : La **norme** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à la longueur du segment $[AB]$, elle se note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. On a alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

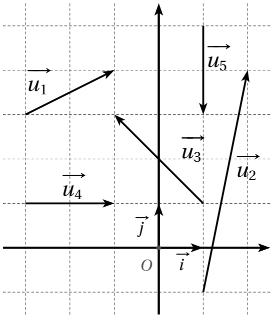
Propriété 5 : Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et k un réel

- Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement si leurs coordonnées sont égales :
  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
- Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

3.5.2 Exercices d'application de cours

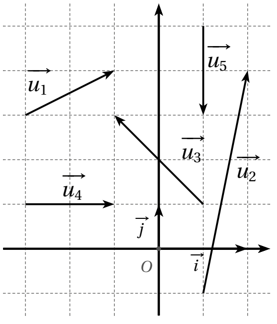
EXERCICE 632 **5 minutes**

Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$ et $\overrightarrow{u_5}$ dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



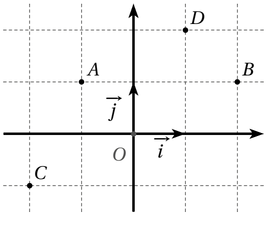
EXERCICE 633 **5 minutes**

Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$ et $\overrightarrow{u_5}$ dans le repère orthogonal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



EXERCICE 634 **5 minutes**

Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DC}$ dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



EXERCICE 635 **5 minutes**

A l'aide de la relation de Chasles, écrire, si c'est possible, sous la forme d'un seul vecteur les expressions suivantes :

1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$
2. $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{AR}$
4. $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AF}$
6. $\overrightarrow{GT} + \overrightarrow{FG}$

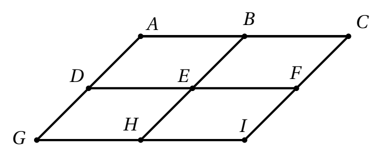
EXERCICE 636 **10 minutes**

En utilisant la relation de Chasles, écrire plus simplement les vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JK}$
4. $\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GD}$

EXERCICE 637 **5 minutes**

En utilisant les points de la figure ci-contre, répondre aux questions suivantes :



1. Nommer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$ (en utilisant uniquement les points nommés).
2. Compléter les égalités suivantes par des points présents dans la figure.
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{...F}$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{...H}$
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{...I}$ $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{I...}$

EXERCICE 638 **5 minutes**

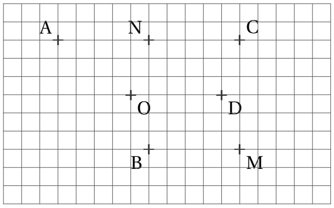
Compléter les égalités vectorielles :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{\dots B}$
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{\dots}$
2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{\dots}$
5. $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{C\dots} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{G\dots}$
3. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\dots} + \overrightarrow{CA}$
6. $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{\dots}$

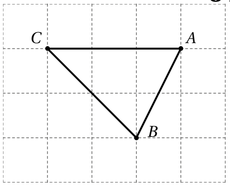
EXERCICE 639 **5 minutes**

Compléter les quatre égalités ci-dessous :

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\dots N}$
$\overrightarrow{M\dots} = \overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{\dots}$
$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{\dots}$

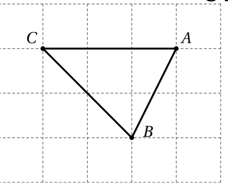


EXERCICE 640 **5 minutes**



1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.
2. Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$.
3. Placer le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 641 **5 minutes**



1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$.
2. Placer le point N tel que $\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.
3. Placer le point P tel que $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 642 **10 minutes**

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}$
3. $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$
4. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}$

EXERCICE 643 **10 minutes**

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(1\,;\,2)$, $(-2\,;\,5)$ et $(-3\,;\,-4)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$.

EXERCICE 644 **10 minutes**

Soient E, F et G les points de coordonnées respectives $(-5\,;\,-3)$, $(2\,;\,-8)$ et $(3\,;\,4)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{FE}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{GE}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{GF}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{FE}\right\|$.

EXERCICE 645 **10 minutes**

1. Tracer un carré EFGH de côté 6 cm.
2. Placer le point J tel que $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.
3. Placer le point K tel que $\overrightarrow{\mathrm{FK}}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.

EXERCICE 646 **5 minutes**

Soit $\left(\mathrm{O};\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé.

1. Dans ce repère, placer les points A, B et C tels que : $A(-3\,;\,2)$, $B(2\,;\,5)$ et $C(4\,;\,-1)$
2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 647 **5 minutes**

Soient A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(5\,;\,-1)$, $(1\,;\,7)$, $(3\,;\,4)$ et $(x\,;\,y)$.

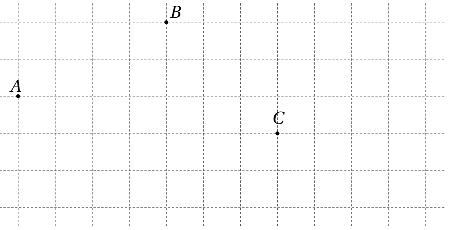
1. Déterminer par calcul les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer par calcul les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 648 **10 minutes**

1. Construire le point E tel que $ABEC$ est un parallélogramme.
2. **a.** Construire le point F tel que :

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

   b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCF$?
3. Démontrer que $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE}$. Que peut-on en déduire pour le point C ?



EXERCICE 649 **5 minutes**

Dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(-3;-2)$, $B(1;-1)$, $C(4;4)$ et $D(0;3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3.5.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 650 **10 minutes**

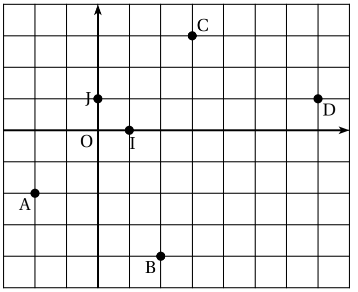
Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

1. Démontrer que si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. Démontrer réciproquement que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
4. Conclure.

EXERCICE 651 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Lire les coordonnées des points A, B et C.
2. Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.



EXERCICE 652 **10 minutes**

Dans un plan muni du repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, placer les points : $A(8\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 8)$ et $C(-4\ ;\ 7)$.

1. **a.** Donner sans justifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $OABC$?
2. Démontrer que $OABC$ est un losange.

EXERCICE 653 **10 minutes**

Etant donné les points $A(-2;1)$, $B(1;2)$, $C(2;-1)$ et $D(-1;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
   $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}$; $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; $3\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{BA}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 654 **10 minutes**

Soit $[IJ]$ un segment et M un point du cercle de diamètre $[IJ]$.

1. Faire une figure.
2. Que dire de l'angle $\widehat{IMJ}$? Justifier.
3. Construire le point K tel que $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IM}$.
4. Construire le point L tel que $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JK}$.
5. Déterminer la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 655 **10 minutes**

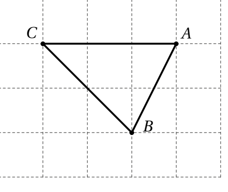
$[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. Placer les points C, D, E et F tels que :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EB} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$

EXERCICE 656 **15 minutes**

Soit X, Y, C et D quatre points distincts du plan et I et J les milieux respectifs des segments $[XD]$ et $[YC]$.
Démontrer que $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{DY} = 2\overrightarrow{IJ}$.

EXERCICE 657 **15 minutes**

1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Placer le point N tel que $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$.
3. Placer le point P tel que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.



EXERCICE 658 **15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque. Placer le point M tel que $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

EXERCICE 659 **10 minutes**

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives (1 ; 2), (−2 ; 5) et (−3 ; −4).
Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

3.6 Vecteurs colinéaires

3.6.1 Point de cours

Définition 1 : Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, non nuls, sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

Propriété 1 : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition 2 : Le **déterminant** des vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le réel $xy' - yx'$.

On le note $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Propriété 2 : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

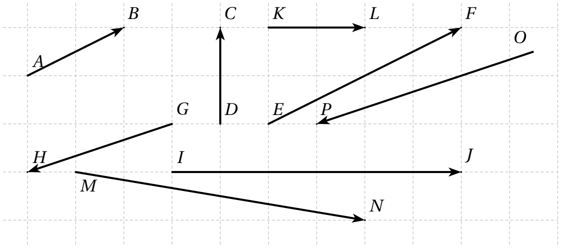
Propriété 3 : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 4 : Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3.6.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 660 **5 minutes**

Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs sont colinéaires et, s'ils le sont, le justifier par une égalité vectorielle :



1. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{KL}$
3. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$
4. $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EF}$
5. $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OP}$
6. $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{DC}$

EXERCICE 661 **5 minutes**

Dans chaque cas, déterminer le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{u}$ par rapport à $\overrightarrow{v}$.

1. $2\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{v}$
2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{u} = \frac{5}{6}\overrightarrow{v}$
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
4. $5\left(2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$
5. $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
6. $3\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = 5\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$

EXERCICE 662 **5 minutes**

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 663 **5 minutes**

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v} = -9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 664 **10 minutes**

Dans chaque cas, déterminer le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{u}$ par rapport à $\overrightarrow{v}$.

1. $\overrightarrow{u}(-2\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{v}(4\ ;\ -6)$
2. $\overrightarrow{u}(3\ ;\ 4)$ et $\overrightarrow{v}(9\ ;\ 12)$
3. $\overrightarrow{u}(1\ ;\ -0{,}7)$ et $\overrightarrow{v}(-7\ ;\ 4{,}9)$
4. $\overrightarrow{u}\left(\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{6}\right)$ et $\overrightarrow{v}\left(-1\ ;\ \sqrt{3}\right)$
5. $\overrightarrow{u}(0{,}7\ ;\ 4{,}1)$ et $\overrightarrow{v}(2{,}8\ ;\ 16{,}4)$
6. $\overrightarrow{u}(2\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{v}(-4{,}2\ ;\ -6{,}3)$

EXERCICE 665 **10 minutes**

En calculant le déterminant, justifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont, ou ne sont pas, colinéaires.

1. $\overrightarrow{u}(1\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{v}(3\ ;\ 4)$
2. $\overrightarrow{u}(3\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{v}(1\ ;\ 3)$
3. $\overrightarrow{u}(\sqrt{2}\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{v}(1\ ;\ \sqrt{2})$
4. $\overrightarrow{u}(7\ ;\ -5)$ et $\overrightarrow{v}(3\ ;\ -2)$
5. $\overrightarrow{u}(0{,}3\ ;\ 5{,}1)$ et $\overrightarrow{v}(-1\ ;\ -17)$
6. $\overrightarrow{u}(5\ ;\ -3{,}5)$ et $\overrightarrow{v}(-2\ ;\ 1{,}4)$

EXERCICE 666 **5 minutes**

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ 2)$, $(4\ ;\ 4)$ et $(-5\ ;\ -2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 667 **5 minutes**

Dans chaque cas, dire si les trois points sont alignés :

1. $A\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$; $B(1;3)$ et $C\left(\frac{7}{2};4\right)$.
2. $I(1;3)$; $J\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

EXERCICE 668 **10 minutes**

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On considère les points $A(-2;5)$, $B(1;4)$, $C(-2;-5)$, $D(-4;-1)$ et $E(0;1)$.

1. Démontrer que les points B, C et E sont alignés.
2. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

EXERCICE 669 **5 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, P et Q deux points tels que $\overrightarrow{AP} = -4\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AQ} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les points A, P et Q sont alignés.

EXERCICE 670 **5 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, P et Q deux points tels que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que les points A, P et Q sont alignés.

EXERCICE 671 **15 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Placer les points $A(-4;-3)$, $B(-1;3)$ et $C(3;1)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis, placer D sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M le point défini par : $6\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{CB}$
   a. Démontrer que $\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   b. Construire le point M sur la figure (*on laissera apparents les traits de construction*).
   c. Calculer les coordonnées de M.
5. Les points D, I et M sont-ils alignés? Justifier la réponse.

EXERCICE 672 **10 minutes**

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-3 ; 3)$, $(3 ; -1)$ et $(1 ; 5)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées du point $D\left(x_D ; y_D\right)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer les coordonnées du point $E\left(x_E ; y_E\right)$ tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer les coordonnées du point $F\left(x_F ; y_F\right)$ tel que $ABCF$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 673 **10 minutes**

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(1 ; 3)$, $(-2 ; -1)$ et $(-2 ; 5)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées du point $D\left(x_D ; y_D\right)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer les coordonnées du point $E\left(x_E ; y_E\right)$ tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point $F\left(x_F ; y_F\right)$ tel que $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

3.6.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 674 **10 minutes**

Démontrer que deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

EXERCICE 675 **10 minutes**

Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

EXERCICE 676 **10 minutes**

Soient A, B, C et D quatre points du plan, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

EXERCICE 677 **10 minutes**

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.
Démontrer que les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

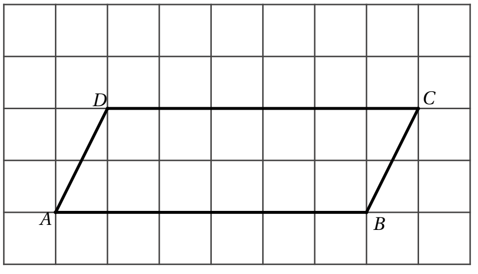
EXERCICE 678 : Programmation **15 minutes**

1. Ecrire une fonction en python qui prend en arguments les coordonnées de deux points A et B sous forme de deux listes et retourne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit forme d'une liste.
2. Ecrire une fonction en python qui prend en arguments les coordonnées de trois points A, B et C sous forme de trois listes et retourne le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Ecrire une fonction en python qui prend en arguments les coordonnées de trois points A, B et C sous forme de deux listes et affiche « les points sont alignés » ou « les points ne sont pas alignés » suivants les cas.

EXERCICE 679 : Programmation **15 minutes**

1. Ecrire une fonction en python qui prend en arguments deux points A et B et retourne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit forme d'une liste.
   Les coordonnées des points seront données sont forme de listes en dehors de la fonction mais avant son appel.
2. Ecrire une fonction qui prend en arguments quatre points A, B,C et D et retourne le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. Ecrire une fonction qui prend en arguments quatre points A, B, C et D et affiche « les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires » ou « les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires » suivants les cas.

EXERCICE 680 **10 minutes**



Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E et H sont tels que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

1. Placer les points E et H.

2. Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{AE}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{CH}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
5. Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires et conclure.

EXERCICE 681 **10 minutes**

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 682 **10 minutes**

Soient ABC un triangle quelconque, M, N et P trois points tels que

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{BC}.$$

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
☞ On pourra utiliser la relation de Chasles pour écrire $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

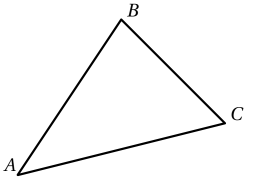
EXERCICE 683 **15 minutes**

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points I, J, K et L sont définis par :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Faire une figure.
2. Justifier que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan.
3. Donner les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.
5. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

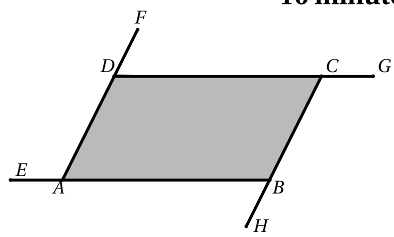
EXERCICE 684 **15 minutes**

Soient ABC un triangle, I le milieu de $[AC]$,
J le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
et D le point d'intersection des droites (BC) et (IJ).



1. La parallèle à (IJ) passant par B coupe (AC) en K.
  a. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$.
  b. En déduire l'expression de $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$.
  c. Que peut-on en déduire concernant le point K ?
2. Montrer que B est le milieu de $[DC]$.

EXERCICE 685 **10 minutes**



$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E, F, G et H sont tels que $AE = DF = CG = BH$.
Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme.
☞ On pourra utiliser le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ et poser $AE = a$.

EXERCICE 686 **10 minutes**
$ABCD$ est un carré. Le point E est intérieur au carré et tel que le triangle ABE est équilatéral.
Le point F est extérieur au carré et tel que le triangle BFC est équilatéral.
En choisissant bien le repère, démontrer que les points E, D et F sont alignés.

EXERCICE 687 **20 minutes**
Soit ABC un triangle quelconque, D et E deux points tels que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$.
Démontrer, par deux méthodes, que les points B, D et E sont alignés.

EXERCICE 688 **20 minutes**
Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

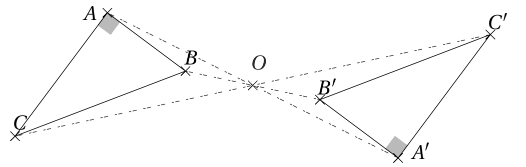
1. On note H le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   - **a.** Faire une figure.
   - **b.** Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
   - **c.** Démontrer que (AH) est perpendiculaire à (BC)
   - **d.** Que représente la droite (AH) dans le triangle ABC.
   - **e.** Quelles autres relations peut-on obtenir de la même maniére ?
   - **f.** Quelle propriété vient-on ainsi de démontrer ?
2. On note G le centre de gravité du triangle ABC.
   - **a.** Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
   - **b.** Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
3. Que peut-on en déduire pour le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle quelconque ?

3.7 Transformations du plan

3.7.1 Point de cours

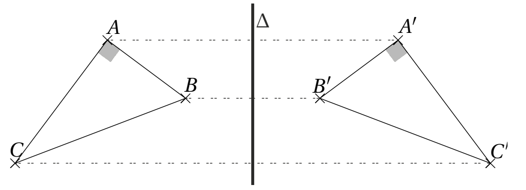
Symétrie centrale
M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O signifie que O est le milieu de $[MM']$.

La symétrie centrale conserve les longueurs, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et orientés, les formes et les figures.



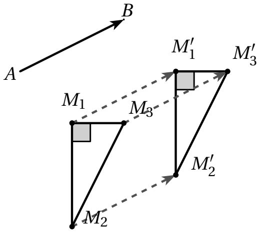
Symétrie axiale
M' est l'image du point M par la **symétrie d'axe** Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.

La symétrie axiale conserve les longueurs, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, les formes et les figures.
Par contre, elle inverse les angles orientés.



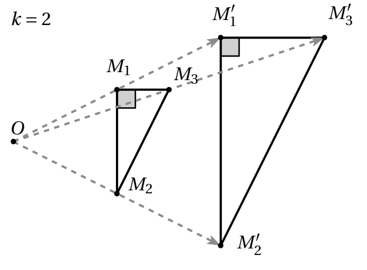
Translation
M' est l'image du point M par la **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** signifie que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

La translation conserve les longueurs, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et orientés, les formes et les figures.



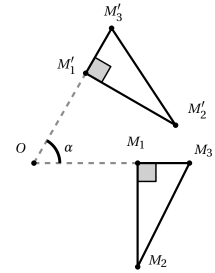
Homothétie
M' est l'image du point M par la **l'homothétie de centre** O **et de rapport** $\boldsymbol{k}$ signifie que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

L'homothétie conserve le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et les formes.
Par contre elle ne conserve pas les longueurs (les longueurs sont multipliées par $|k|$), ni l'orientation des angles si k est négatif.
Si $k = -1$, l'homothétie de centre O est alors égale à la symétrie de centre O.



Rotation
M' est l'image du point M par la **rotation de centre** O **et d'angle** $\boldsymbol{\theta}$ signifie que $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \theta$.

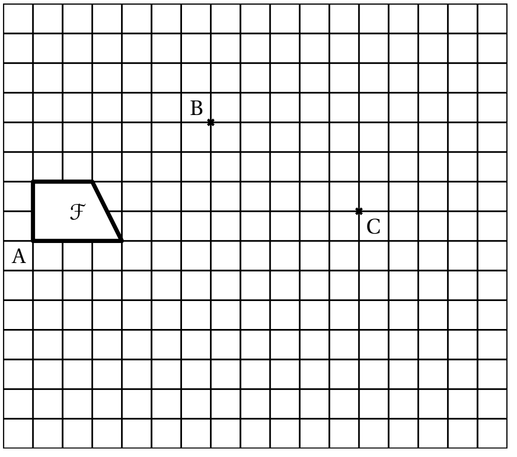
La rotation conserve le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et orientés et les formes.



3.7.2 Exercices d'application de cours

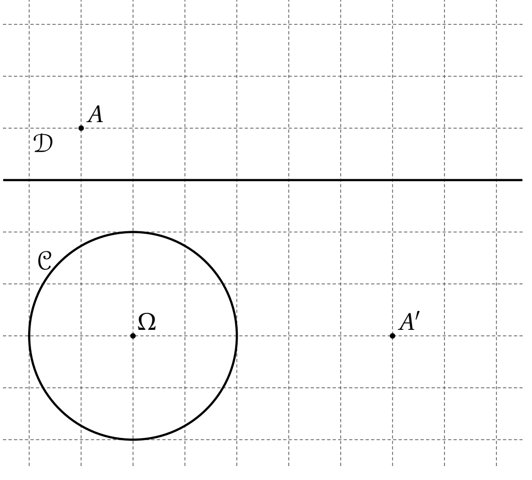
EXERCICE 689 **5 minutes**

1. Construire
   a. la figure $\mathcal{F}_1$, image de la figure $\mathcal{F}$ par la symétrie centrale de centre B (on nommera E l'image de A).
   b. la figure $\mathcal{F}_2$, image de la figure $\mathcal{F}_1$ par la symétrie centrale de centre C (on nommera T l'image de E).
2. Quelle transformation permet de passer directement de la figure $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}_2$?



EXERCICE 690 **5 minutes**

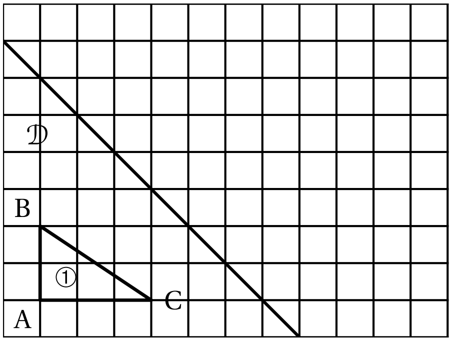
Construire l'image de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$ par la symétrie centrale qui transforme A et A'.



EXERCICE 691 **5 minutes**

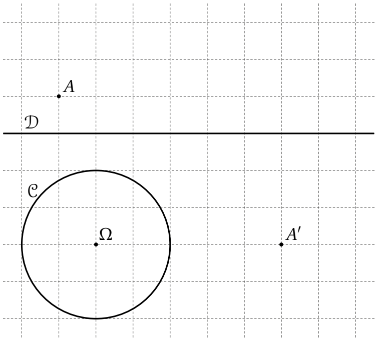
Sur le quadrillage ci-dessous, construire :

- la figure ② image du triangle ① par la symétrie d'axe $\mathcal{D}$.



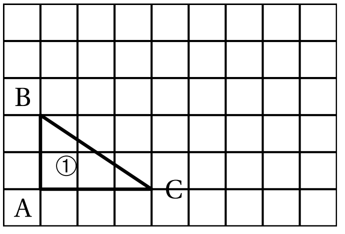
EXERCICE 692 **5 minutes**

Construire l'image de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$ par la symétrie axiale qui transforme A en A'.



EXERCICE 693 **5 minutes**

1. Construire
   a. La figure ② image du triangle ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. La figure ③ image du triangle ② par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Quelle transformation permet de passer directement de la figure ① à ③?



EXERCICE 694 **5 minutes**

Tracer un carré RIEN de côté 5 cm.

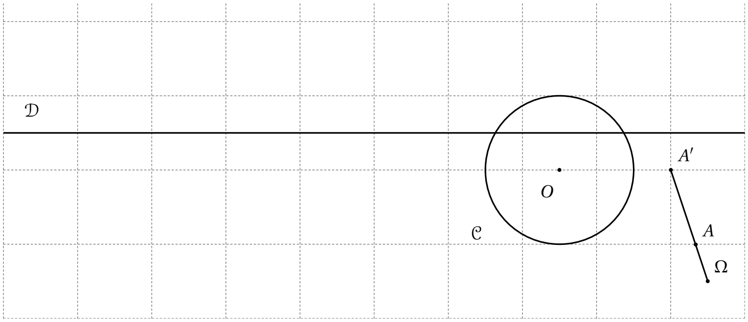
1. Construire le point P image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{RE}$.

2. Sans utiliser d'autres points que ceux de la figure, compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{EI} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{IP} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RI} = \ldots$$

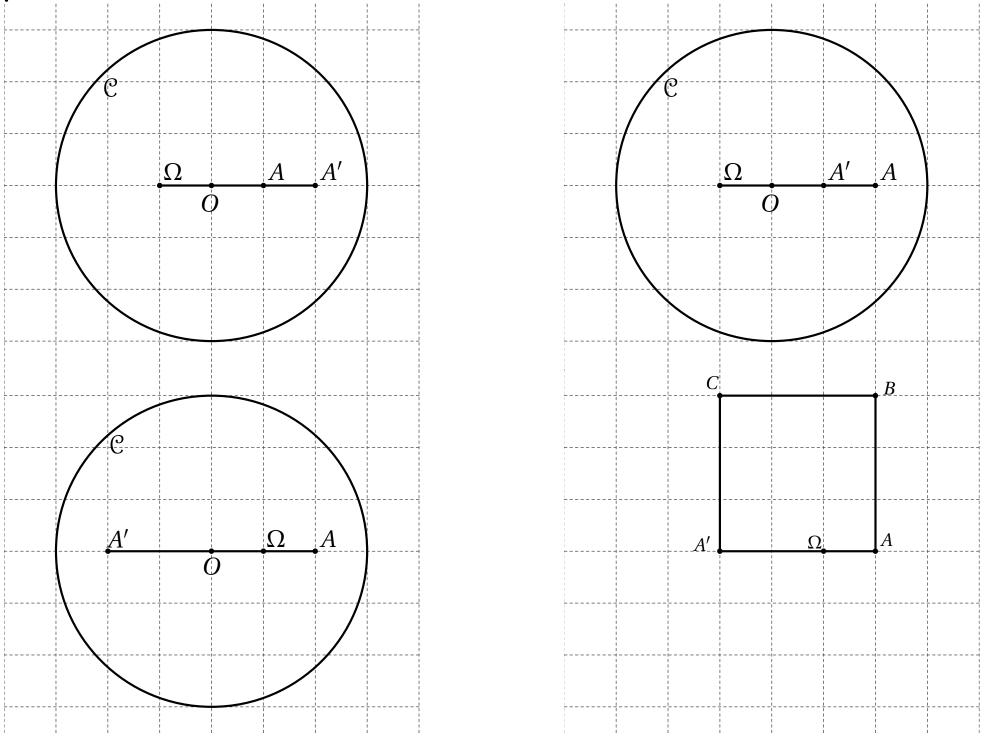
EXERCICE 695 **5 minutes**

Construire l'image de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A'.



EXERCICE 696 **10 minutes**

Dans chaque cas, construire l'image de la figure par l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A'.

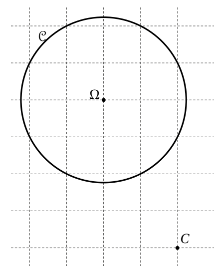


EXERCICE 697 **5 minutes**

1. Placer les points $A(3;3)$, $B(4;2)$, $C(2;2)$ et $D(1;1)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.
2. Tracer les segments $[AD]$, $[AB]$ et $[BC]$. On obtient une figure appelé $\mathcal{T}$.
3. Construire l'image de $\mathcal{T}$ par la rotation de centre O, d'angle 90 °, dans le sens des aiguilles d'une montre.

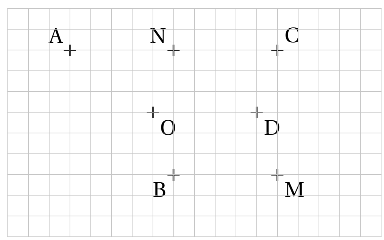
EXERCICE 698 **5 minutes**

Construire l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la rotation de centre C et d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre.



EXERCICE 699 **5 minutes**

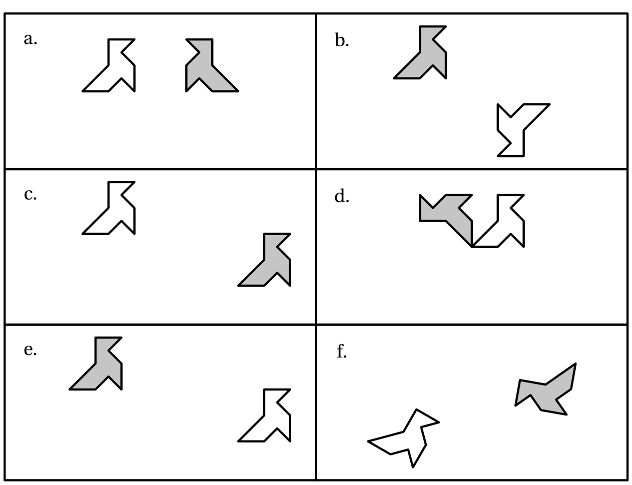
1. Quelle est l'image du quadrilatère $ODMB$ par la symétrie d'axe (OD) ?
2. Quelle est l'image du triangle NOB par la translation de vecteur $\overrightarrow{AN}$?



EXERCICE 700 **10 minutes**

La figure grise est obtenue après avoir appliqué une transformation du plan à la figure blanche. Dans chaque cas :

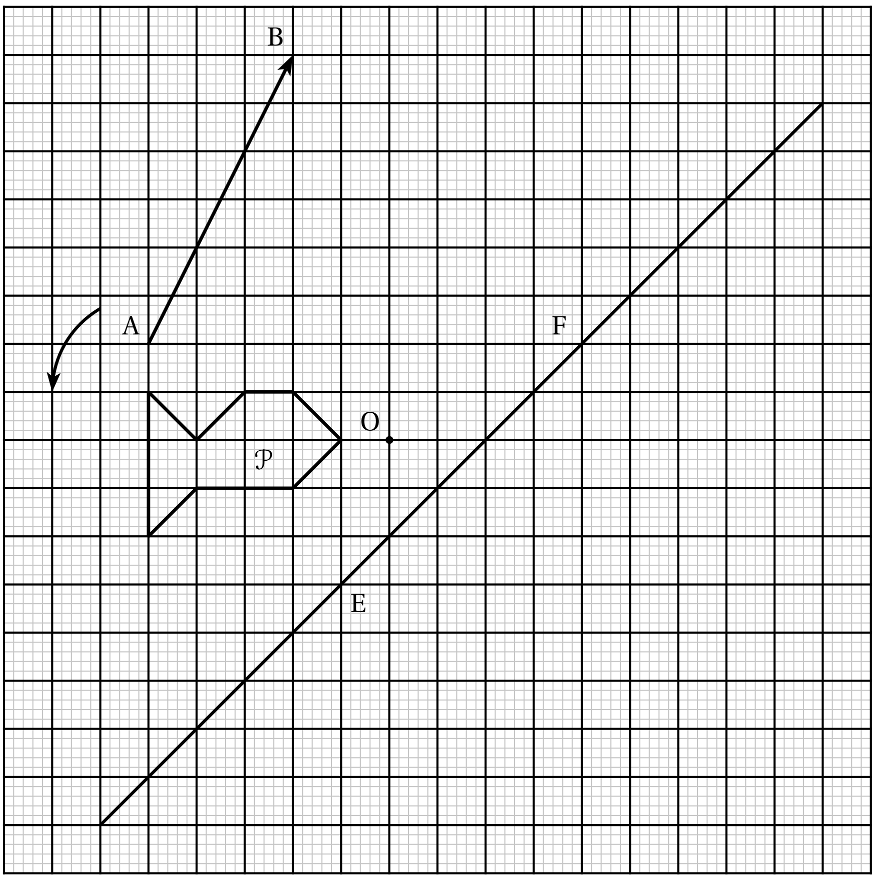
- Préciser le type de transformation (symétrie axiale centrale, translation, rotation).
- Faire apparaître et préciser le(s) élément(s) caractéristique(s) de cette transformation (axe, centre, vecteur, angle, sens de rotation).



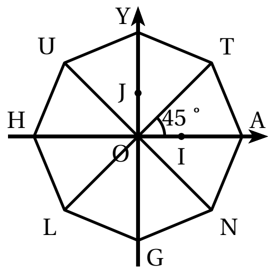
3.7.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 701 **10 minutes**

1. Tracer, sur le graphique, le symétrique $\mathcal{P}_1$ de la figure $\mathcal{P}$ par rapport au point O.
2. Tracer, sur le graphique, le symétrique $\mathcal{P}_2$ de la figure $\mathcal{P}$ par rapport à la droite (EF).
3. Tracer, sur le graphique, l'image $\mathcal{P}_3$ de la figure $\mathcal{P}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Tracer, sur le graphique, l'image $\mathcal{P}_4$ de la figure $\mathcal{P}$ dans la rotation de centre E, d'angle 90° dans le sens de la flèche.
5. Tracer, sur le graphique, l'image $\mathcal{P}_5$ de la figure $\mathcal{P}$ dans l'homothétie de centre E et de rapport 2.



EXERCICE 702 **5 minutes**



Dans le repère (O, I, J) ci-contre, on sait que HUYTANGL est un octogone régulier.

1. Quel est le symétrique de T par la symétrie centrale de centre O ?
2. Quel est le symétrique de T par rapport à l'axe des ordonnées ?
3. Quelle est l'image de T par la rotation de centre O et d'angle 135 °dans le sens des aiguilles d'une montre ?
4. Quelle est l'image de U par la translation de vecteur $\overrightarrow{AN}$?

EXERCICE 703 **10 minutes**

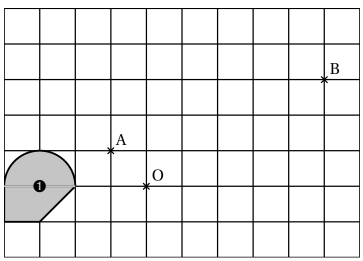
Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$, puis le point F, image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $DCFE$? Justifier la réponse.
3. Construire le point H tel que $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CH}$.
4. Montrer que le point C est le milieu commun des trois segments $[AF]$, $[BE]$ et $[DH]$.

EXERCICE 704 **5 minutes**

Construire sur le schéma ci-après :

1. La figure ❷, image de la figure ❶ par la symétrie d'axe (OA).
2. La figure ❸, image de la figure ❶ par la symétrie de centre O.
3. La figure ❹, image de la figure ❶ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

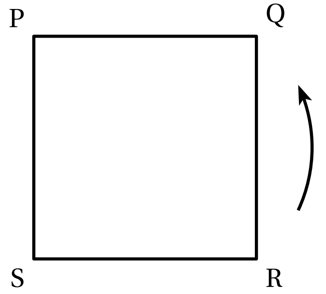


EXERCICE 705 **5 minutes**

Prévoir de la place autour du tracé du triangle ABC.

1. Tracer le triangle ABC tel que $BC = 4$ cm ; $AB = 3$ cm ; $AC = 2$ cm (on appellera cette figure F_1).
2. Construire l'image de F_1 par la symétrie d'axe (AB) (on l'appellera F_2).
3. Construire l'image de F_1 par la symétrie de centre B (on l'appellera F_3).
4. Construire l'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (on l'appellera F_4).

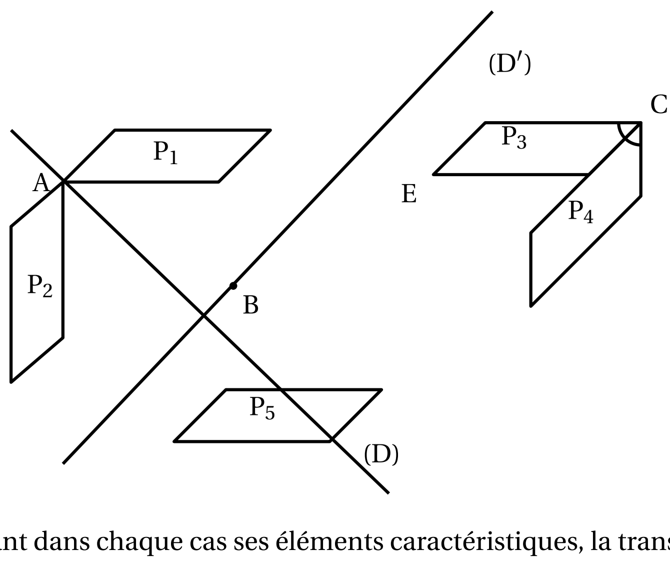
EXERCICE 706 **5 minutes**



PQRS est un carré. La flèche indique le sens direct.
Pour chacune des questions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, une seule réponse est exacte.

Q_1	$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$	$\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{QS}$	$\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$
Q_2	$\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{QS}$	$\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RP}$	$\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RS}$
Q_3	L'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{SR}$ est R	R a pour image S par la translation de vecteur $\overrightarrow{QP}$	Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{SQ}$ sont égaux.
Q_4	L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° dans le sens indiqué sur la figure est P	L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 45° dans le sens indiqué sur la figure est P	L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° dans le sens indiqué sur la figure est S.

EXERCICE 707 **5 minutes**



Préciser en donnant dans chaque cas ses éléments caractéristiques, la transformation permettant de passer :

1. de P_1 à P_2 ;

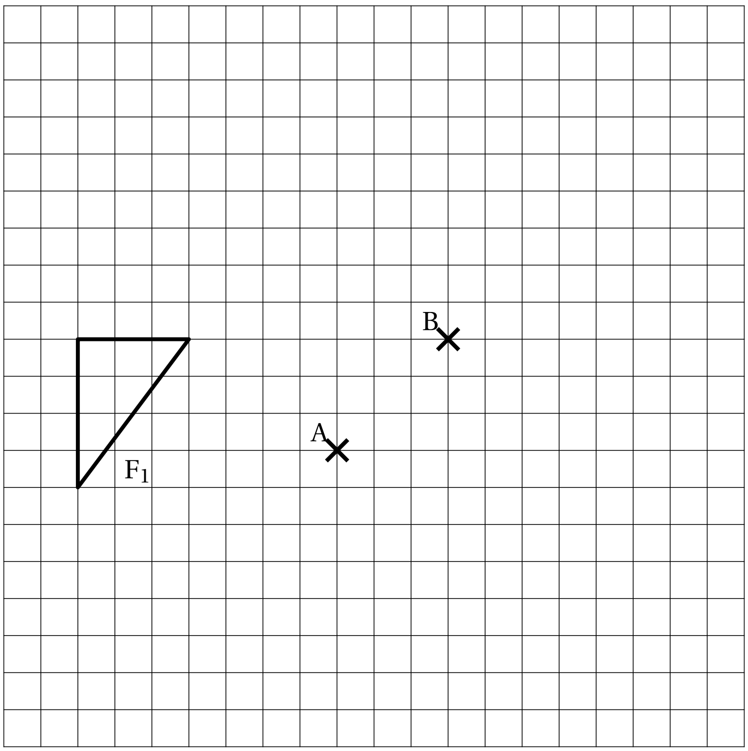
2. de P_1 à P_3 ;

3. de P_3 à P_4 ;

4. de P_1 à P_5.

EXERCICE 708 **10 minutes**

1. En utilisant le quadrillage ci-dessous, construire :
   - **a.** La figure F_2 image de la figure F_1 par la symétrie d'axe (AB).
   - **b.** La figure F_3 image de la figure F_1 par la symétrie de centre A.
   - **c.** La figure F_4 image de la figure F_3 par la symétrie de centre B.
2. Quelle est la transformation qui permet de passer de la figure F_1 à la figure F_4 (on précisera les éléments caractéristiques) ?



EXERCICE 709 **10 minutes**

Soient $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$, P le point d'intersections de (ID) et (AC), Q le point d'intersection de (IC) et (BD).

1. Faire une figure.
2. Que représente le point P dans le triangle ABD ? De même que représente le point Q dans le triangle ABC ?
3. Démontrer qu'il existe une homothétie de centre I qui transforme D en P et C en Q.
4. En déduire que (PQ) et (AB) sont parallèles et calculer $\dfrac{PQ}{AB}$.

EXERCICE 710 **10 minutes**

Le but de l'exercice est de démontrer que l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
Soit h une homothétie de rapport k, A et B deux points distincts du plan.
On pose $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.

1. Soit M un point de (AB). Démontrer que $M' = h(M)$ appartient à la droite $\left(A'B'\right)$.
2. Soit N un point de la droite $\left(A'B'\right)$. Justifier qu'il existe un réel x tels que $\overrightarrow{A'N} = x\overrightarrow{A'B'}$.
3. Soit M le point défini par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$. Démontrer que M appartient à (AB) et que $h(M) = N$.
4. Conclure.

EXERCICE 711 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que les droites (BD) et (AC) perpendiculaires.

1. Faire une figure.
2. Tracer le cercle qui passent par les trois points O, B et C. Justifier la position de son centre I.
3. Placer les points M et P tels que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$.
4. Utilisation d'une transformation.
   a. Par quelle transformation a-t-on à la fois : O a pour image C et B a pour image M ?
   b. Montrer que, par cette transformation, le point D a pour image le point P.
   c. Montrer que les points P, C, M sont alignés.

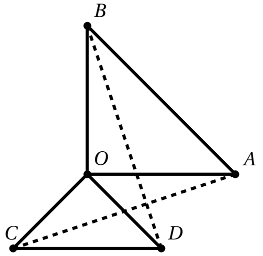
EXERCICE 712 **10 minutes**

Soit MAK un triangle équilatéral de côté mesurant 4 cm.

1. a. Faire une figure.
   b. Construire le point I image de M par la rotation de centre K et d'angle 120° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
   c. Quelle est la nature exacte du triangle AKI ?
2. Construire le point S symétrique de M par rapport à K.
3. Construire le point O tel que K soit le milieu de $[AO]$.
   a. Construire le point N image de K dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.
   b. Quelle est la nature exacte du quadrilatère $AMNK$?

EXERCICE 713 **10 minutes**

Soient OAB et OCD deux triangles isocèles rectangles en O.
Démontrer que :
1. $AC = BD$
2. (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
☞ Penser à une rotation.



EXERCICE 714 **15 minutes**

Soient une droite $\mathcal{D}$, A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et M un point de $\mathcal{D}$.
On note M' le symétrique de M par rapport à A.
Quel est le lieu des points M' lorsque M décrit $\mathcal{D}$?

EXERCICE 715 **15 minutes**

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ (on notera O son centre) et Ω un point de (AB).
A tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B, on associe le point m diamétralement opposé à M sur le cercle et le point M', intersection des droites (mB) et (ΩM).

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M'.
   ☞ On pourra observer la configuration formée par les triangles ΩAM et $\Omega BM'$.
3. Tracer Γ.

3.8 Equations de droites

3.8.1 Point de cours

Définition 1 : Soient A et B deux points d'une droite $\mathcal{D}$ du plan.
On appelle vecteur directeur de $\mathcal{D}$ tout vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 : Toute droite du plan de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \text{ et } a \text{ ou } b \text{ non nul}$$

Propriété 2 : Soit c un réel.

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = c$,
- L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété 3 : Soient a et b des réels.

1. Tout droite non parallèle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme $y = mx + p$,
2. L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = mx + p$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarques :

- Le réel m s'appelle le **coefficient directeur**.
- Le réel p est l'**ordonnée à l'origine**.
- Une équation de droite peut toujours s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$, avec a et b non simultanément nuls : c'est ce qu'on appelle l'**équation cartésienne** de la droite.

Définition 3 : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite $\mathcal{D}$.
Le coefficient directeur se calcule grâce à la formule : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Propriété 4 : Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont :

- parallèles, si et seulement si, $m = m'$,
- sécantes, si et seulement si, $m \neq m'$.

Propriété 5 : Les équations $ax+by = c$ et $a'x+b'y = c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Résoudre le système $(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique.
- Si $ab' - a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système n'admet aucune solution ou une infinité de solutions.

3.8.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 716 **5 minutes**
Dans chaque cas, donner une équation de la droite verticale et une équation de la droite horizontale passant par le point A.
1. $A(2\ ;\ 5)$ **2.** $A(-1\ ;\ 2)$ **3.** $A(0\ ;\ 2)$ **4.** $A(2\ ;\ 0)$

EXERCICE 717 **5 minutes**
Les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(-2\ ;\ 4)$ appartiennent-ils aux droites dont les équations sont :
$\mathcal{D}_1 : y = 3x - 4$ $\mathcal{D}_2 : x + 3y - 10 = 0$ $\mathcal{D}_3 : x = 2$ $\mathcal{D}_4 : 2x - 3y = 2$

EXERCICE 718 **10 minutes**
Dans chaque cas, donner un vecteur directeur et un point de la droite d'équation :
$\mathcal{D}_1 : 2x - 3y - 4 = 0$ $\mathcal{D}_3 : x = 2$ $\mathcal{D}_5 : y = 4x - 1$ $\mathcal{D}_7 : y = 8$
$\mathcal{D}_2 : x + y - 10 = 0$ $\mathcal{D}_4 : 2x - 3y = 2$ $\mathcal{D}_6 : y = -7x + 8$ $\mathcal{D}_8 : 9y - 2x = 7$

EXERCICE 719 **10 minutes**
Dans chaque cas, donner une équation cartésienne, puis l'équation réduite de la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point A :
$\mathcal{D}_1 : \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 0)$ $\mathcal{D}_3 : \vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $A(-1\ ;\ 4)$ $\mathcal{D}_5 : \vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 1)$
$\mathcal{D}_2 : \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $A(0\ ;\ 2)$ $\mathcal{D}_4 : \vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A(-2\ ;\ 6)$ $\mathcal{D}_6 : \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $A(-2\ ;\ 5)$

EXERCICE 720 **10 minutes**

Dans chaque cas, déterminer l'ordonnée du point A pour qu'il appartienne à la droite $\mathcal{D}$:

$\mathcal{D}_1 : 2x-3y+1=0$ et $x_A=1$ $\mathcal{D}_3 : y=3x-2$ et $x_A=2$ $\mathcal{D}_5 : 3x-y-2=0$ et $x_A=5$

$\mathcal{D}_2 : -5x+2y-7=0$ et $x_A=-2$ $\mathcal{D}_4 : y=\dfrac{1}{2}x-6$ et $x_A=3$ $\mathcal{D}_6 : \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{4}=0$ et $x_A=\dfrac{4}{3}$

EXERCICE 721 **10 minutes**

Dans chaque cas, déterminer l'abscisse du point A pour qu'il appartienne à la droite $\mathcal{D}$:

$\mathcal{D} : 2x-3y+1=0$ et $y_A=1$ $\mathcal{D}_3 : y=3x-2$ et $y_A=2$ $\mathcal{D}_5 : 3x-y-2=0$ et $y_A=5$

$\mathcal{D} : -5x+2y-7=0$ et $y_A=-2$ $\mathcal{D}_4 : y=\dfrac{1}{2}x-6$ et $y_A=3$ $\mathcal{D}_6 : \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{4}=0$ et $y_A=\dfrac{4}{3}$

EXERCICE 722 **10 minutes**

Les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ sont-elles parallèles?

1. $A(5;-10)$, $B(7;-2)$ et $(\mathcal{D}) : y=4x+5$
2. $A(91;-280)$, $B(277;830)$ et $(\mathcal{D}) : y=6x-2$
3. $A(13\,351;17\,630)$, $B(-7\,432;5\,754)$ et $(\mathcal{D}) : y=\dfrac{4}{7}x$
4. $A(0;1)$, $B(3;1)$ et $(\mathcal{D}) : 6y-4x+1=0$

EXERCICE 723 **10 minutes**

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles?

1. $A(2;-1)$, $B(3;5)$, $C(3;-5)$ et $D(5;7)$
2. $A(15;30)$, $B(5;20)$, $C(-10;-20)$ et $D(50;40)$
3. $A(8;210)$, $B(177;14)$, $C(88;312)$ et $D(86;222)$
4. $A(15;30)$, $B(155;20)$, $C(-10;-20)$ et $D(-10;40)$

EXERCICE 724 **10 minutes**

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne, puis l'équation réduite, de la droite (AB) :

1. $A(0\,;\,1)$ et $B(1\,;\,0)$ **3.** $A\left(\sqrt{2}\,;\,3\sqrt{3}\right)$ et $B\left(-2\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\right)$ **5.** $A(3\,;\,-4)$ et $B(-3\,;\,-4)$

2. $A(2\,;\,-3)$ et $B(-1\,;\,6)$ **4.** $A\left(\dfrac{1}{4}\,;\,-3\right)$ et $B\left(-2\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$ **6.** $A(-9\,;\,2)$ et $B(2\,;\,-9)$

EXERCICE 725 **10 minutes**

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne, puis l'équation réduite, de la droite parallèle à (AB) passant par C :

1. $A(1\,;\,0)$, $B(0\,;\,1)$, $C(3\,;\,5)$ **4.** $A(2\,;\,2)$, $B(2\,;\,-2)$, $C(3\,;\,5)$

2. $A(1\,;\,1)$, $B(2\,;\,1)$, $C(3\,;\,-1)$ **5.** $A(-5\,;\,1)$, $B(-1\,;\,-1)$, $C(2\,;\,2)$

3. $A(2\,;\,2)$, $B(-3\,;\,-3)$, $C(3\,;\,0)$ **6.** $A(-1\,;\,-1)$, $B(3\,;\,5)$, $C(-2\,;\,-2)$

EXERCICE 726 **5 minutes**

Pour chacun des systèmes suivants :
déterminer le nombre de solutions; puis résoudre les systèmes ayant des solutions.

1. $\begin{cases} y = -x+2 \\ y = -3x+4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y = -2x+\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

EXERCICE 727 **10 minutes**

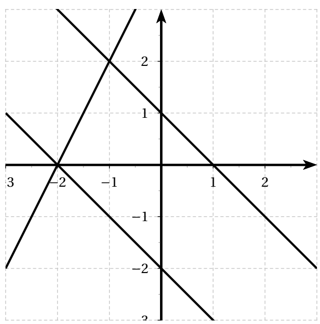
Pour chacun des systèmes suivants :

- déterminer le nombre de solutions;
- résoudre les systèmes ayant des solutions.

1. $\begin{cases} 3y+6x = -3 \\ 2y-4x = 6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y = 2x+3 \\ y = -3x-4 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} y = 3x-5 \\ 2y-6x = 4 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x-2 \\ x = 4 \end{cases}$

EXERCICE 728 **5 minutes**

A l'aide du graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes suivants.

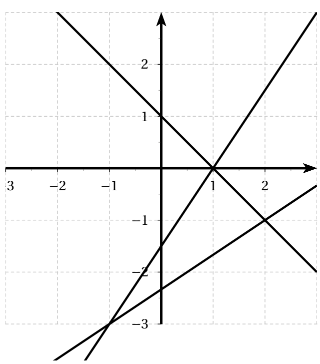


1. $\begin{cases} y = 2x+4 \\ y = -x+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = -x+1 \\ y = -x-2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 2x+4 \\ y = -x-2 \end{cases}$

EXERCICE 729 **5 minutes**



1. $\begin{cases} y = -x+1 \\ y = \dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} \\ y = -x+1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

3.8.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 730 **10 minutes**

Démontrer la propriété : « Toute droite du plan de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec a, b, $c \in \mathbb{R}$ et a ou b non nul

EXERCICE 731 **10 minutes**

Ecrire une fonction en python qui prend en arguments a, b et c (les coefficients de l'équation cartésienne d'une droite), qui demande les coordonnées d'un point et qui affiche si le point appartient ou non à cette droite.

EXERCICE 732 **10 minutes**

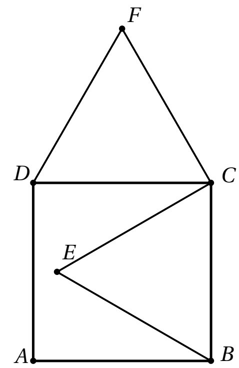
Ecrire une fonction en python qui prend en arguments les coordonnées du vecteur directeur, demande les coordonnées d'un point et affiche une équation cartésienne de la droite passant par le point donné.

EXERCICE 733 **10 minutes**

Soient A un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(a\ ;\ 0)$ et B un point de l'axe des ordonnées de coordonnées $(0\ ; b)$ avec a et b non nuls.

1. Démontrer que la droite (AB) a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$.
2. Sans calcul, déterminer une équation de la droite (AB) sachant que $A(5\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ -3)$.

EXERCICE 734 **10 minutes**



Soit $ABCD$ un carré de côté a (a réel positif), BCE et CDF sont deux triangles équilatéraux.

1. Calculer la hauteur de chaque triangle équilatéral.
2. En déduire les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère orthonormé $\left(A\ ; \overrightarrow{u}\ , \overrightarrow{v}\right)$ avec $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AD}$.
3. Etablir une équation de la droite (AF).
4. Démontrer que le point E appartient à la droite (AF).

EXERCICE 735 **15 minutes**

Soient $ABCD$ un parallélogramme, J le milieu de $[AD]$, I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K un point intérieur à $ABCD$ tel que $AIKJ$ soit un parallélogramme.
M est le point d'intersection des droites (DI) et (BJ).
L'objectif de l'exercice est de démontrer que les points M, K et C sont alignés.

1. En se plaçant dans le repère $\left(A\ ; \overrightarrow{AI}\ , \overrightarrow{AJ}\right)$, déterminer les coordonnées des points B, C, D et K.
2. Déterminer une équation des droites (ID) et (BJ).
3. Déterminer les coordonnées du point M.
4. Conclure.

EXERCICE 736 **15 minutes**

Soient ABC un triangle quelconque, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Justifier que $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
2. Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Etablir une équation des trois médianes du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (AA') et (BB').
5. Vérifier que ce point appartient à la droite (CC').
6. Conclure.

EXERCICE 737 **15 minutes**

Soient ABC un triangle quelconque, K le milieu de $[BC]$, A' le symétrique de A par rapport à C, C' le symétrique de C par rapport à A.
La droite (AB) coupe $(A'K)$ en I et $(C'K)$ en J.

1. En se plaçant dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$, déterminer les coordonnées des points A', C' et K.
2. Déterminer une équation des droites $(A'K)$ et $(C'K)$.
3. En déduire les coordonnées des points I et J.
4. Etablir un lien entre les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IB}$.

EXERCICE 738 **10 minutes**

Soient $\mathcal{D}$ une droite et F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. On pose $p = d(F\,;\ \mathcal{D})$ avec p réel strictement positif.
On appelle (E) l'ensemble des points M équidistants de F et $\mathcal{D}$.

1. En construisant géométriquement un point, montrer que (E) n'est pas un ensemble vide.
2. En choisissant convenablement un repère orthonormé, donner une équation cartésienne de (E) et reconnaître cet ensemble.

EXERCICE 739 **20 minutes**

On considère, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$, trois points $A(1;7)$, $B(-5;-5)$ et $C(7;-1)$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points A', B' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
   b. Déterminer l'équation réduite des droites (AA') et (BB').
   c. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection K.
   d. Montrer, par le calcul, que K appartient à la droite (CC').
   e. Quel théorème de géométrie aurait permis de démontrer le résultat précédent ?
   f. Montrer que K est situé aux deux-tiers des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ en partant des points A, B et C.
2. Calculer les distances OA, OB, et OC. Que peut-on en déduire pour le point O ?
3. On considère le point $H(3;1)$.

- **a.** Soit $A_1(4;-2)$. Montrer que A, H et A_1 sont alignés.
- **b.** Soit $C_1(-1;3)$. Montrer que C, H et C_1 sont alignés.
- **c.** Montrer que les triangles AA_1C et CC_1A sont des triangles rectangles.
- **d.** Que peut-on en déduire sur le point H?

4. Montrer que les points O, K et H sont alignés.
5. Rechercher la définition de la droite d'Euler.

3.9 Exercices de synthèse

EXERCICE 740 **20 minutes**

1. **a.** Tracer un segment $[BC]$ tel que $BC = 15$ cm.
Placer un point A tel que $AB = 9$ cm et $AC = 12$ cm.
b. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. **a.** Placer le milieu M du segment $[BC]$. Tracer le cercle de diamètre $[AB]$. Ce cercle recoupe le segment $[BC]$ en D et la droite (AM) en E.
b. Démontrer que les triangles ABE et ABD sont rectangles.
3. **a.** Construire le point F, symétrique du point E par rapport au point M.
b. Démontrer que le quadrilatère $BECF$ est un parallélogramme.
c. En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles, et que les droites (AF) et (CF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le point d'intersection des droites (AD) et (BE). Soit K le point d'intersection des droites (AD) et (CF).

a. Que représentent les droites (AD) et (BE) pour le triangle ABM?
En déduire que les droites (HM) et (AB) sont perpendiculaires.
Démontrer de même que les droites (KM) et (AC) sont perpendiculaires.
b. On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (MH).
On appelle J le point d'intersection des droites (AC) et (KM).
Démontrer que le quadrilatère $AIMJ$ est un rectangle.
En déduire que le triangle HMK est rectangle.

EXERCICE 741 **20 minutes**

Dans tout le problème, l'unité de longueur est le centimètre.

Partie A

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), placer les points : $A(1;1,5)$ $B(5,5\ ;\ 7,5)$ $C(5\ ;\ -1,5)$.
2. Calculer la longueur BC (on donnera la valeur exacte).
3. On donne $AB = 7,5$ et $AC = 5$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.

Partie B

On considère le triangle ABC rectangle en A obtenu dans la partie A.

1. Sur la figure de la partie A, placer le point K du segment $[AC]$ tel que $CK = 2$ et tracer la perpendiculaire à la droite (AC) passant par K. Cette droite coupe la droite (BC) en L.
2. Montrer que les droites (AB) et (KL) sont parallèles.
3. Calculer la longueur KL.

Partie C

Soit T un point du segment $[AK]$; on note $KT = x$ avec $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.
On rappelle que :
- KL = 3 ;
- l'aire du triangle ABC est 18,75 cm^2.

1. Exprimer l'aire du triangle LTC en fonction de x.
2. Montrer que l'aire du quadrilatère $ABLT$ est $15,75 + 1,5x$.
3. L'aire du quadrilatère $ABLT$ peut-elle être égale à celle du triangle LTC ? Pourquoi ?

EXERCICE 742 **20 minutes**

Soit ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $BC = 7,5$ cm et $\widehat{ABC} = 60°$. D est le point du segment $[AB]$ tel que $AD = 2$ cm.
La parallèle à la droite (BC) passant par D coupe le segment $[AC]$ en E.

1. Faire une figure qui sera complétée au cours de l'exercice.
2. **a.** Démontrer que $DE = 3$ cm.
   b. En déduire que le triangle BDE est isocèle.
3. **a.** Justifier que les angles $\widehat{DEB}$ et $\widehat{EBC}$ sont égaux.
   b. En déduire que la demi-droite $[BE)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.
4. **a.** Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DE}$.
   b. Démontrer que le quadrilatère $BDEF$ est un losange.
   c. On note I le centre du losange $BDEF$.
   Démontrer que le triangle BDI est rectangle.
5. **a.** Quelle est la longueur de $[DF]$? Justifier.
   b. Calculer la valeur exacte de BI, et en déduire celle de BE.
   c. Calculer l'aire du losange $BDEF$.

EXERCICE 743 **20 minutes**

Les deux parties sont indépendantes, sauf pour la dernière question du problème.
L'unité choisie, pour tout le problème est le centimètre.

Partie A

1. Résoudre par le calcul le système : $\begin{cases} y = 2,4x \\ y = -0,8x + 24 \end{cases}$
2. On pose : $f(x) = 2,4x$ et $g(x) = -0,8x + 24$.

a. Compléter le tableau :

x	0	10
$f(x)$		
$g(x)$		

b. Représenter les deux fonctions f et g, pour x compris entre 0 et 10, dans un repère orthonormé.

3. Retrouver graphiquement le résultat de la question 1.
Pour cela, on fera apparaître de façon bien visible sur le graphique les tracés nécessaires ainsi que les coordonnées.

Partie B

ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $BC = 8$ et $AC = 6$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2. M est un point quelconque du segment $[AB]$.
La droite parallèle à la droite (BC) passant par M coupe le segment $[AC]$ en D.
Trouver deux quotients égaux à $\dfrac{AM}{AB}$.

3. On pose $AM = x$.

a. Quelles sont les valeurs prises par x ?

b. Montrer que $AD = 0,6x$ et $MD = 0,8x$.

c. Exprimer MB et DC en fonction de x.

4. On veut chercher le point M du segment $[AB]$ tel que les périmètres du triangle ADM et du trapèze $BCDM$ soient égaux. Calculer la valeur commune des deux périmètres.

EXERCICE 744 **20 minutes**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Roméo (R) veut rejoindre Juliette (J) à sa fenêtre. Pour cela, il place une échelle $[JR]$. Le mur et le sol sont perpendiculaires.
On donne $HR = 3$ m et $JH = 4$ m.

a. Calculer la longueur JR.

b. Calculer $\cos\widehat{HJR}$ puis la valeur de l'angle $\widehat{HJR}$ arrondie au degré.

2. L'échelle glisse. On donne $JR = 5$ et $\widehat{HJR} = 40°$.

a. Calculer la longueur HR (donne la valeur arrondie au dixième).

b. Ecrire l'expression de $\tan\widehat{HJR}$ puis calculer la longueur JH (donner la valeur arrondie au dixième).

Partie B

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, l'unité graphique est le centimètre.

1. Placer les points $A(2\ ;\ 0)$; $B(3,5\ ;\ 6)$ et $C(9\ ;\ 5,5)$.
2. Placer dans ce repère le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de D.
4. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
5. Calculer les coordonnées du milieu M du segment [AC].
6. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

EXERCICE 745 **20 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité choisie est le centimètre. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Placer les points $A(4\ ;\ 5)$, $B(0\ ;\ -3)$ et $C(-6\ ;\ 0)$.
2. **a.** Montrer que $AB = \sqrt{80}$ cm, $AC = \sqrt{125}$ cm et $BC = \sqrt{45}$ cm.
   b. En déduire que ABC est un triangle rectangle. Préciser l'angle droit.
3. **a.** Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   b. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
   c. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
   d. Vérifier à l'aide d'un calcul que les coordonnées du point D sont $(-2\ ;\ 8)$.
4. **a.** Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AC]$.
   b. Que représente le point K pour le quadrilatère $ABCD$?
5. **a.** Quels sont le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC ? Justifier.
   b. Montrer que le point D est sur le cercle $\mathcal{C}$.
6. Soit F l'image du point A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.
   Montrer que la droite (CF) coupe le segment $[AB]$ en son milieu.

EXERCICE 746 **20 minutes**

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J) placer les points suivants : $A(-1\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 3)$, $C(5\ ;\ -1)$ et $D(1\ ;-3)$.
   L'unité est le centimètre.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
   En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. Calculer la distance BC.
4. On admet que $AB = 2\sqrt{5}$ et $AC = 2\sqrt{10}$.
   a. Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle.
   b. Préciser alors, en justifiant la réponse, la nature du quadrilatère $ABCD$.
5. Soit M le milieu de $[AC]$.
   Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$.
6. Sans justification, répondre aux questions suivantes :
   a. Quelle est l'image de BMC par la symétrie de centre M ?
   b. Quelle est l'image de AMB par la symétrie d'axe BM ?
   c. Quelle est l'image de AMB par la rotation de centre M, d'angle 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ?

d. Tracer et colorier l'image de AMB par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
e. Tracer et hachurer l'image de AMB par l'homothétie de centre A et de rapport -2.

EXERCICE 747 **15 minutes**

Un triangle ABD rectangle en B est tel que $AB = 9$ cm et $\widehat{BAD} = 40$ °.

1. Tracer ce triangle.
2. Calculer la longueur BD en justifiant la démarche utilisée ; on en donnera une valeur arrondie au millimètre.
3. Construire le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABD (*aucune justification n'est attendue pour cette construction*) ; on précisera la position du centre I de ce cercle.
4. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en S ; placer le point S sur la figure.
5. Déterminer la mesure exacte de l'angle $\widehat{SIB}$ en justifiant la démarche utilisée.

EXERCICE 748 **15 minutes**

Dans le repère orthonormé (O, I, J) d'unité le centimètre.

1. **a.** Placer les points $R(-7\ ;\ -2)$, $F(-5\ ;\ 2)$ et $V(-3\ ;\ -4)$.
   b. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RF}$.
   c. Vérifier que $RF = 2\sqrt{5}$.
   d. On donne $RV = \sqrt{20}$ et $VF = 2\sqrt{10}$. Prouver que le triangle RFV est **rectangle isocèle**.
2. Calculer les coordonnées du point K milieu de $[FV]$.
3. **a.** Déterminer par son centre et son rayon le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle RFV. Justifier puis tracer $\mathcal{C}$.
   b. Placer le point N symétrique de R par rapport à K. Démontrer que le quadrilatère $RFNV$ est un carré.
   c. Donner les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de $RFNV$.
4. Sachant que le point $P(-3\ ;\ 2)$ est sur le cercle $\mathcal{C}$, tracer l'angle $\widehat{RPV}$ et prouver que sa mesure est 45°.

EXERCICE 749 **20 minutes**

Construire un triangle MNP tel que $PN = 13$ cm, $PM = 5$ cm et $MN = 12$ cm

Partie A

1. Prouver que ce triangle MNP est rectangle en M.
2. Calculer son périmètre et son aire.
3. Tracer le cercle circonscrit au triangle MNP ; préciser la position de son centre O et la mesure de son rayon.
4. Calculer la tangente de l'angle $\widehat{PNM}$. En déduire une mesure approchée de cet angle à 1° près.

Partie B

A est un point quelconque du côté $[PM]$.
On pose : AM $= x$.
La parallèle à (PN) passant par A coupe le segment $[MN]$ en B.

1. Quelles sont les valeurs prises par x ?
2. En précisant la propriété utilisée, exprimer MB et AB en fonction de x.
3. Exprimer, en fonction de x, le périmètre du triangle AMB.
4. Résoudre l'équation : $x + \dfrac{12x}{5} + \dfrac{13x}{5} = 18$.
5. **a.** Faire une nouvelle figure en plaçant le point A de façon que le périmètre du triangle AMB soit 18 cm.
   b. Quelle est alors l'aire du triangle AMB ?

EXERCICE 750 **20 minutes**

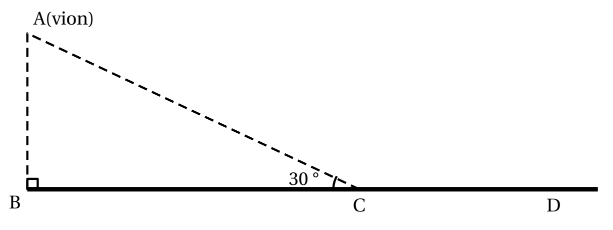
Soient les points $A(-4\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;\ 5)$.

1. Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer la longueur du segment $[AB]$.
3. Démontrer que $BC = 10$ et $AC = 5\sqrt{5}$.
4. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
5. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AC]$ et placer le point M sur la figure.
6. Démontrer que $MB = MC$.
7. Sur la figure, placer le point N, image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
8. Déterminer par le calcul les coordonnées de N.
9. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont égaux.
10. Démontrer que le quadrilatère $BMCN$ est un losange.
11. Démontrer que le triangle ABC et le losange $BMCN$ ont la même aire.

EXERCICE 751 **15 minutes**

Un avion, de tourisme est en phase d'approche de l'aérodrome de Magenta suivant le trajet AC. On donne :

- altitude de l'avion : $AB = 1058$ m ;
- $\widehat{ACB} = 30°$.

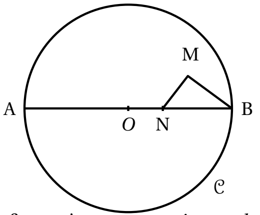


1. Démontrer que la longueur AC qu'il reste à parcourir à l'avion pour rejoindre le point d'atterrissage C est égale à 2 116 m.
2. Sachant que cet avion se déplace de A vers C avec une vitesse constante v de 92 mètres par seconde, calculer le temps qu'il mettra pour parcourir la distance AC.

3. Trouver, en mètres (arrondis au dixième), la distance CD nécessaire à l'arrêt de l'appareil; cette distance se calcule grâce à la formule : $CD = \dfrac{2v^2 + 6600}{25}$ où v est la vitesse en mètres par seconde de l'appareil lorsqu'il touche le sol en C.

EXERCICE 752 **25 minutes**

On donne :
– un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 6 cm;
– un diamètre $[AB]$ de ce cercle $\mathcal{C}$;
– le point N du segment $[OB]$ tel que $BN = 4$ cm;
– le point M situé à 3,2 cm de B et tel que le triangle BMN est rectangle en M.



Cette figure n'est pas en vraie grandeur

1. a. Calculer la longueur du segment $[MN]$.
   b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MBN}$ (arrondir à un degré près).
   La droite (BM) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en P.
2. a. Démontrer que le triangle BPA est rectangle en P.
   b. En déduire que les droites (PA) et (MN) sont parallèles.
3. On sait maintenant que le triangle BPA est un agrandissement du triangle BMN.
   a. Calculer le coefficient d'agrandissement.
   b. Calculer BP.
   c. Calculer l'aire du triangle BMN et en déduire l'aire du triangle BPA.
4. Soit E le milieu de $[BN]$. Démontrer que les droites (PO) et (ME) sont parallèles.
5. La droite (PO) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en K et la droite (PN) coupe la droite (BK) en I.
   On rappelle que lorsqu'un point appartient à une médiane d'un triangle et est situé aux deux tiers de cette médiane en partant du sommet, alors ce point est le centre de gravité du triangle.
   Ecrire le rapport $\dfrac{BN}{BO}$ sous forme d'une fraction irréductible, puis démontrer que I est le milieu du segment $[BK]$.

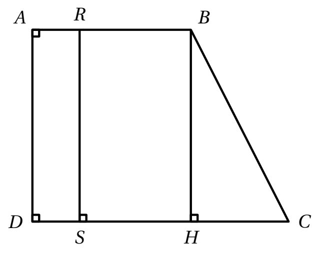
EXERCICE 753 **15 minutes**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points : $A(-1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 4)$, $C(1\ ;\ -1)$, $D(4\ ;\ 2)$ et $E(4\ ;\ -2)$.
Affirmation 1 : Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.
Affirmation 2 : Une équation de la droite parallèle à la droite d'équation $2x - 5y + 1 = 0$ passant par C est $-4x + 10y - 4 = 0$.
Affirmation 3 : $\widehat{BAD} = 30°$.
Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les droites Δ et (D) d'équations respectives $3x - 2y + 3 = 0$ et $-6x + 4y + 1 = 0$ sont sécantes.

Affirmation 5 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la droite passant par le point E et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ a pour équation $3x+2y-8=0$.

EXERCICE 754 **20 minutes**

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, $ABCD$ est un trapèze rectangle.
On donne $AB = 6$ cm, $AD = 8$ cm et $DC = 10$ cm.
(HB) et (RS) sont perpendiculaires à (DC) et R est un point du segment $[AB]$ tel que $AR = x$.



1. Calculer l'aire du trapèze $ABCD$.
2. Calcul de BC.

   a. Démontrer que $ADHB$ est un rectangle. En déduire HC.
   b. Calculer BC. (On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible).

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$, arrondie au dixième de degré.
4. Calculs d'aires.

   a. Exprimer, en fonction de x, l'aire $f(x)$ du rectangle $ARSD$.
   b. Exprimer, en fonction de x, l'aire $g(x)$ du trapèze $RBCS$.
   c. Calculer x pour que ces deux aires soient égales; donner alors la valeur commune de chacune de ces deux aires.

EXERCICE 755 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question une seule est exacte.

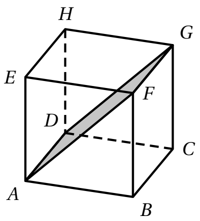
1. IJK est un triangle rectangle en I tel que : $IK = 2,7$ cm et $KJ = 4,5$ cm. Quelle est la longueur du côté $[IJ]$?

   A : $12,96$ cm **B :** $3,6$ cm **C :** $1,8$ cm **D :** $5,2$ cm

2. On rappelle la formule du volume d'une boule de rayon r : $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times r^3$.
   Le volume exact en cm^3 d'une balle de tennis de 3,3 cm de rayon est :

   A : $13,2\pi$ **B :** 150 **C :** 47π **D :** $47,916\pi$

3. Dans le cube $ABCDEFGH$, le quadrilatère $ADGF$ est un :

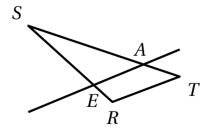


A : losange
B : carré
C : rectangle
D : parallélépipède rectangle

EXERCICE 756 **10 minutes**

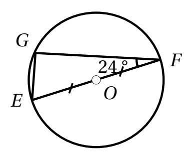
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question une seule est exacte.

1. (RE) et (TA) se coupent en S. (RT) et (AE) sont parallèles.
$ST = 5$ cm ; $SA = 4$ cm et $SE = 3$ cm.
Alors la longueur RS est égale à ...



A : $3,75$ cm **B :** $2,4$ cm **C :** $0,266$ cm

2. Le point G est sur le cercle de centre O et de diamètre $[EF]$.
$\widehat{EFG} = 24$ °.
La mesure de l'angle $\widehat{GEF}$ est égale à ...

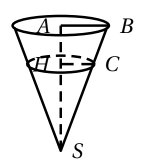


A : 90° **B :** 24° **C :** 66°

3. En triplant les longueurs d'un côté d'un triangle, les mesures des angles sont ...

A : conservées **B :** multipliées par 3 **C :** multipliées par 9

4. Un cône de révolution a pour rayon AB = 10 cm et pour hauteur SA = 24 cm.
On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base et qui passe par le point H de $[SA]$ tel que $SH = 18$ cm. Le rayon HC de la section est ...



A : 10 cm **B :** $7,5$ cm **C :** 5 cm

EXERCICE 757 **15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A, non isocèle. On construit extérieurement au triangle ABC les carrés $ABDE$ et $ACFG$.

1. Démontrer que les points A, D et G d'une part et A, E et C d'autre part sont alignés.
2. Démontrer que les droites (BC), (FD) et (GE) sont concourantes.

EXERCICE 758 **10 minutes**

Soit ABC un triangle équilatéral de côtés de longueur a. On construit, à l'extérieur du triangle,

les carrés $ABDE$, $BCFG$ et $ACHI$, de centres respectifs J, K et L.
L'objectif de l'exercice est de montrer que JKL est un triangle équilatéral.
On note O le milieu de $[AB]$ et P le centre du triangle ABC. On pose $\overrightarrow{u} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{OP}\overrightarrow{OP}$.

1. Vérifier que le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ est orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
3. Déterminer les coordonnées des points G, I puis J, K et L.
4. Démontrer que le triangle JKL est équilatéral.

EXERCICE 759 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{CAD} = 45°$, $\widehat{ACD} = 30°$, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 15°$.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DBC}$?

EXERCICE 760 **15 minutes**

Soit un cercle de diamètre AB, de centre O et de rayon R.
Sur la tangente en B, on porte le segment $BC = R\sqrt{2}$, CA coupe le cercle en M et le diamètre perpendiculaire à AB en F.

1. Calculer AC, MB, CM, MA en fonction de R.
2. Montrer que le quadrilatère $MFOB$ est inscriptible dans un cercle, dont on précisera la position du centre, I.
3. Calculer le rayon du cercle I.

EXERCICE 761 **10 minutes**

Sur un cercle de centre O, de rayon R, on prend trois points A, B et C. On désigne par AA', BB' et CC' les hauteurs du triangle ABC, par H son orthocentre.
Démontrer que $(A'A)$, $(B'B)$, $(C'C)$ sont bissectrices des angles du triangle $A'B'C'$.

EXERCICE 762 **15 minutes**

Soit un cercle de centre O et de diamètre $AB = 2R$. Deux points M et N, situés sur le même demi-cercle de diamètre $[AB]$, sont tels que le quadrilatère $AMNB$ soit un trapèze.

1. Quelle particularité présente le trapèze $AMNB$?
   Calculer, en fonction de R, le côté MN, la hauteur MH et les diagonales, dans le cas $AM = R$.
2. Les côtés AM et BN se coupent en P et les diagonales en S. Que dire du point S par rapport au triangle PAB ?
   Dans le cas où $AM = R$, calculer OP et OS.
3. Si M et N varient sur le demi-cercle, montrer que P et S restent sur une droite fixe.

EXERCICE 763 **20 minutes**

On considère trois points alignés P, C et D, dans cet ordre, tels que PC = 4 cm , PD = 9 cm, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre CD, de centre O, et un point A de ce cercle tel que PA = 6 cm.

1. Démontrer que (PA) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

2. On mène la corde $[AB]$ perpendiculaire à la droite (CD), elle coupe en H.
Prouver que les droites (AC) et (AD) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{PAB}$.
Que représente le point C pour le triangle PAB ?

3. Le cercle de centre P et de rayon PA recoupe la droite (DA) en E et la droite (AC) en F.
Démontrer que les points P, E et F sont alignés et que la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (PD).

EXERCICE 764 **20 minutes**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, placer les points A, B, C et D définis par : $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} - 2\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i}$; $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$; $\overrightarrow{OD} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$. Placer le point E.

3. Calculer les coordonnées du point P pour que $BCPD$ soit un parallélogramme. Placer le point P.

4. Démontrer que les points P, C et E sont alignés.

5. Démontrer que le triangle ADE est un triangle rectangle.

6. $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ADE. Quel est son centre et pourquoi ? Tracer $\mathcal{C}$.

7. Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 765 **10 minutes**

Soit ABC un triangle équilatéral, de côté a, sur la hauteur AD on choisit le point O tel que $AO = 2OD$. Soit (Cx) la perpendiculaire à (BC) passant par C. La droite (BO) coupe la droite (Cx), au point E.

1. Déterminer la nature du triangle AEC.

2. Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est inscriptible dans un cercle.

3. Calculer BE et CE en fonction de a.

4. Déterminer le centre et calculer le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCE$.

EXERCICE 766 **15 minutes**

Soit un segment de droite AB. Des points A et B on mène, perpendiculairement à AB et dans le même sens, les demi-droites $[Ax)$ et $[By)$.
Soit D un point de $[By)$, la perpendiculaire à (AD) passant par B coupe (AD) en I et $[Ax)$ en C.

1. Montrer que, quelle que soit la position du point D sur $[By)$, le point I appartient à un cercle $\mathcal{C}$, dont on précisera le centre, O.

2. Démontrer que les triangles ABD et ABC sont semblables. En déduire que $AB^2 = AC.BD$.

3. Démontrer la relation $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

EXERCICE 767 **15 minutes**

On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre $AB = 2R$ et un point C sur $[AB]$.
On désigne par D l'un des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et d'un arc de cercle de centre A et

de rayon AC.
La droite (DC) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point E.

1. Comparer les triangles CAD et CEB.
   Démontrer que le point E appartient à la médiatrice du segment BC.
2. Etablir la relation $CD \times BE = CA \times CB$.
3. Montrer que la médiatrice de $[BC]$ passe par le milieu I, de l'arc $\widehat{BD}$ et que les points B, C et D appartiennent à un cercle de centre I.

EXERCICE 768 **15 minutes**

Un triangle ABC est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe BC en D et le cercle en M.

1. Démontrer que le point M est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$.
2. Démontrer que les triangles DMC, CMA et DBA sont semblables. En déduire les relations :
   $MC^2 = MD \times MA$ et $AB \times AC = AM \times AD$

EXERCICE 769 **15 minutes**

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre AB et de centre O, C un point de $\mathcal{C}$, D un point de la droite (AC) tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que le triangle ABD est isocèle.
2. La perpendiculaire à (AC) en A coupe le cercle $\mathcal{C}$ en E.
   Montrer que le quadrilatère $ACBE$ est un rectangle. En déduire que les points E, O, C sont alignés.
3. Soit F le point de la droite (EA) tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE}$. Montrer que les points F, B, D sont alignés et que (EC) est parallèle à (FD).
4. A et B étant fixes, quelle est la courbe décrite par D et F lorsque C décrit le cercle O ?

3.10 Vers la première

EXERCICE 770 **10 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.
Déterminer la distance du sommet A au côté $[BC]$.

EXERCICE 771 **10 minutes**

Soient ABC un triangle équilatéral et M un point intérieur au triangle.
On appelle M_1, M_2 et M_3 les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ABC.
Démontrer, en calculant des aires, que la somme $MM_1 + MM_2 + MM_3$ est constante.

EXERCICE 772 **15 minutes**

Soient ABC un triangle quelconque et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle en prenant comme base le côté $[BC]$.

2. En déduire que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.

3. Démontrer de même que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ et $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$.

4. *Applications :*

a. Déterminer l'aire du triangle ABC sachant que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{A} = 30°$.

b. Déterminer l'aire du triangle ABC sachant que $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm et $\widehat{B} = 60°$.

c. Déterminer l'aire du triangle ABC sachant que $AC = 5$ cm, $BC = 5$ cm et $\widehat{C} = 45°$.

EXERCICE 773 **20 minutes**

Soit ABC un triangle d'aire $\mathcal{A}$ on note H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, p le demi-périmètre du triangle ABC soit $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

1. Démontrer que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

2. A l'aide de la formule d'Al-Kashi, démontrer que $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

3. Démontrer que $\left(\sin\widehat{A}\right)^2 = \dfrac{\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)}{4b^2c^2}$.
☞ On pourra utiliser une formule de trigonométrie puis une identité remarquable.

4. En déduire que $\left(\sin\widehat{A}\right)^2 = \dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$.

5. A l'aide des questions précédentes, démontrer la formule de Héron :
$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
☞ $0 \leqslant \sin\widehat{A} \leqslant 1$.

6. Déterminer l'aire du triangle ABC tel que $AB = 5$, $BC = 6$ et $AC = 7$.

EXERCICE 774 **20 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque tel que $\widehat{ACB}$ soit aigu. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. A l'aide de relations trigonométriques, exprimer HA et HC en fonction de AC.

2. En déduire une expression de BH en fonction de BC, AC et $\cos\widehat{C}$.

3. En déduire que $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos\widehat{C}$.
☞ Cette relation dite « formule d'Al Kashi » reste vraie quel que soit l'angle $\widehat{C}$ (aigu ou obtus).
On a de même $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos\widehat{B}$ et
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{A}$.

4. *Application*

a. Déterminer BC sachant que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{A} = 30°$.

b. Déterminer AC sachant que $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm et $\widehat{B} = 60°$.

c. Déterminer AB sachant que $AC = 7$ cm, $BC = 8$ cm et $\widehat{C} = 120°$.

EXERCICE 775 **15 minutes**

La formule d'Al-Kashi permet de calculer le troisième côté d'un triangle quelconque connaissant deux côtés et un angle. Pour un triangle ABC, on a :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AC} \times \mathrm{AB} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right).$$

On considère pour tout l'exercice que : $AB = 6$ cm, $AC = 12$ cm et $\widehat{BAC} = 60°$.

1. Construire un triangle ABC vérifiant les conditions précédentes.

2. Donner la valeur de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
En déduire avec la formule d'Al-Kashi que l'on a $BC^2 = AC^2 + AB^2 - AC \times AB$.
Montrer que $BC = \sqrt{108}$ cm.

3. En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 776 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm et $\widehat{DAB} = 60°$.
Déterminer $\widehat{ABC}$, BD et AC.

EXERCICE 777 **10 minutes**

Soit ABC un triangle tel que $AB = 14$ cm, $BC = 12$ cm et $AC = 11$ cm.
Déterminer la mesure des trois angles de ce triangle.

EXERCICE 778 **15 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les points $A(x\ ;\ y)$ et $B(x'\ ;\ y')$.

1. Exprimer OA^2, OB^2 et AB^2 en fonction de x, y, x' et y'.

2. Montrer que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$.
☞ Si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, on dira que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

3. *Application :* Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils orthogonaux?

- **a.** $\overrightarrow{u}\,(3\ ;\ 6)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\ ;\ 1)$.
- **b.** $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ -3)$ et $\overrightarrow{v}\,(6\ ;\ 4)$.
- **c.** $\overrightarrow{u}\,(\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{2})$ et $\overrightarrow{v}\,(-\sqrt{6}\ ;\ 3)$.

EXERCICE 779 **20 minutes**

Soient ABC un triangle quelconque et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et S l'aire du triangle ABC.

1. Justifier les deux égalités : $AH = b\sin\widehat{C}$ et $AH = c\sin\widehat{B}$.

2. Démontrer alors que $\dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{c}$.

3. Démonter de même que $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b}$

4. Démontrer que $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

5. En déduire que $\sin \widehat{A} = \dfrac{2S}{bc}$.

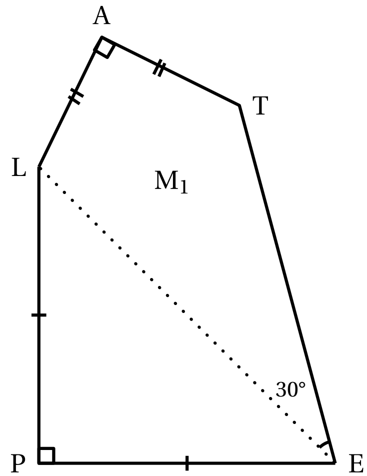
6. Démontrer que $\dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c} = \dfrac{2S}{abc}$.

7. *Application :* Soit ABC un triangle tel que $AB = 125$, $\widehat{A} = 72°$ et $\widehat{B} = 48°$.
Déterminer AC, BC et S.

EXERCICE 780 **10 minutes**

La maille *Pétale* M_1 est constituée :

- d'un triangle PLE rectangle et isocèle en P tel que PE = PL = 4 ;
- d'un triangle LET tel que tel que $\widehat{LET} = 30°$ et TE = 5 ;
- d'un triangle LAT rectangle et isocèle en A.



1. Calculer la longueur LE.

2. En appliquant la formule d'Al-Kashi dans le triangle LET, calculer la longueur LT.
On arrondira le résultat au dixième.

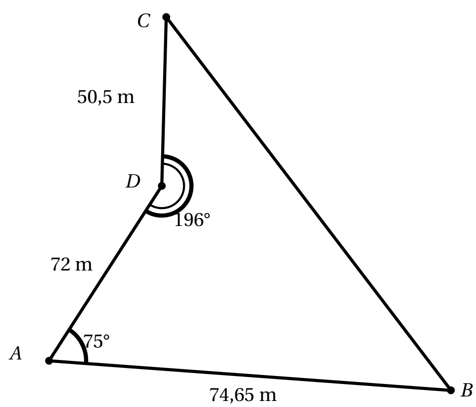
3. Calculer la longueur TA.
On arrondira le résultat au dixième.

EXERCICE 781 **10 minutes**

$ABCD$ est un quadrilatère tel que
- $AB = 74,65$ m
- $AD = 72$ m
- $CD = 50,5$ m
- $\widehat{BAD} = 75°$
- $\widehat{ADC} = 196°$.

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle.

Déterminer la distance AC.



EXERCICE 782 **20 minutes**

Dans un repère orthonormé $(O;\ I,\ J)$, le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, appelé **sens direct**.

On note J' le symétrique de J par rapport à O.

Soient $\mathcal{T}$ la droite perpendiculaire à (OI) passant par I, M un point de $\mathcal{C}$ (différent de J et de J'), C et S ses projetés orthogonaux respectivement sur (OI) et (OJ).

La droite (OM) coupe $\mathcal{T}$ en T.

On pose $\widehat{IOM} = \alpha$.

1. Justifier que $OC = \cos\alpha$, $OS = \sin\alpha$ et $IT = \tan\alpha$.
2. On suppose dans cette question que $\widehat{IOM_1} = \alpha = 60°$.
   - **a.** Quelle est la nature du triangle OIM_1 ?
   - **b.** Déterminer la longueur de OC_1, M_1C_1 et IT_1.
   - **c.** En déduire la valeur exacte de $\cos(60°)$, $\sin(60°)$ et $\tan(60°)$.
3. On suppose dans cette question que $\widehat{IOM_2} = \alpha = 45°$.
   - **a.** Quelle est la nature du triangle OC_2M_2 ?
   - **b.** Déterminer la longueur de OC_2, M_2C_2 et IT_2.
   - **c.** En déduire la valeur exacte de $\cos(45°)$, $\sin(45°)$ et $\tan(45°)$.
4. On suppose dans cette question que $\widehat{IOM_3} = \alpha = 30°$.
   - **a.** Par des considérations géométriques, déterminer sans calculs supplémentaires, la longueur de OC_3 et M_3C_3.
   - **b.** En déduire la valeur exacte de $\cos(30°)$ et $\sin(30°)$.
   - **c.** Déterminer la valeur exacte de $\tan(30°)$.

EXERCICE 783 **15 minutes**

On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ (voir exercice précédent).

Définition : Le **radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1. Par conséquent $360° = 2\pi$ radians.

1. Compléter le tableau de conversion suivant :

angle en degrés	180	90	0				135	270	120	
angle en radians				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$				1

2. Placer sur le cercle trigonométrique, les points correspondants à : 0, π, 2π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.
3. En utilisant des considérations géométriques et les valeurs remarquables déjà connues, compléter le tableau suivant :

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos\theta$	$-$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$		$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$-$		$-$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$
$\sin\theta$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$-$		$-$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$		$\frac{\overline{\quad}}{\quad}$	$-$

EXERCICE 784 **15 minutes**

Soit $\Omega\left(x_\Omega\ ;\ y_\Omega\right)$ et $M(x\ ;\ y)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O};\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ \right)$, $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R.

1. Etablir une relation liant Ω, M et R.
2. En déduire qu'une équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=R^2$.
3. Démontrer réciproquement que si $M(x;y)$ vérifie l'équation $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=R^2$ alors $M\in\mathcal{C}$.

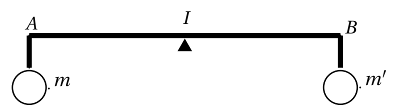
EXERCICE 785 **15 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O};\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ \right)$, on définit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre $A(-1;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre $B(1;4)$ et de rayon 3.
Déterminer une équation de la droite passant par les points d'intersection des cercles.

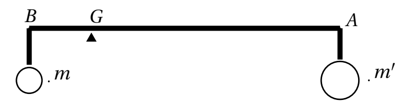
EXERCICE 786 **25 minutes**

Partie A

On rappelle qu'une balance peut être schématisée par une tige $[AB]$, posée sur un pivot G situé au milieu I de $[AB]$. La balance est en équilibre si les masses m et m' suspendues en A et B sont égales.



Si on place le pivot G ailleurs qu'en I, on obtient un levier. L'équilibre du levier diffère bien sûr de celui d'une balance : si par exemple G est plus proche de A que de B, il faut mettre une masse plus importante en A qu'en B pour obtenir l'équilibre.



Cette propriété explique l'utilisation très ancienne des leviers pour déplacer des masses importantes. La loi d'Achimède (environ 287 − 212 av JC) pose le principe régissant le rapport entre les masses m et m' suspendues en A et B et la position du pivot G.
Pour qu'il y ait équilibre, l'égalité $mGA=m'GB$ doit être vérifiée.

1. Comparer les vecteurs $m\overrightarrow{GA}$ et $m'\overrightarrow{GB}$. En déduire la valeur de $m\overrightarrow{GA}+m'\overrightarrow{GB}$.
   Définition : on appelle G le barycentre des points A et B affectés des poids m et m' ou encore le barycentre de A et B affectés des coefficients m et m'. C'est le point d'équilibre compte tenu des coefficients ou poids.
2. L'équilibre est réalisé avec $m=18$ kg, $GB=3$ mètres et $GA=2$ mètres. Calculer m'.
3. Les masses sont $m=8$ kg et $m'=2$ kg. Exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$ puis démontrer que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Dessiner alors la tige $[AB]$ de 10 cm et placer le pivot G.

4. Les masses sont $m = -3$ et $m' = 2$. Exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$ puis démontrer que $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$. Dessiner alors la tige $[AB]$ de 3 cm et placer le pivot G.

Partie B

On appelle barycentre des n points A_i de masse m_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$), le point G vérifiant la relation vectorielle : $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ ou encore $\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$

1. Soit trois points A, B et C de masses respectives 1, 2 et 3.

a. Ecrire la relation vectorielle vérifiée par le barycentre de ces trois points.

b. Soit D le barycentre des points A et B de masses respectives 1 et 2. Ecrire la relation vectorielle vérifiée par les points A, B et D.

c. Calculer $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

d. Placer le point G dans le cas où ABC est un triangle équilatéral.

2. En s'inspirant des questions précédentes déterminer le point G vérifiant :

a. $3\overrightarrow{GA} + 7\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

b. $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 6\overrightarrow{GC} + 5\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

c. $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

EXERCICE 787 **15 minutes**

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer que le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC est égal à $\dfrac{b+c-a}{2}$.

2. Démontrer que les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ACH et ABH ont pour somme AH.

EXERCICE 788 **15 minutes**

Dans un triangle ABC, les médianes issues de A et C sont perpendiculaires. On sait que $AC = 7$ et $BC = 11$.

Quelle est la longueur AB ?

EXERCICE 789 **10 minutes**

Démontrer que dans un triangle rectangle, la somme des longueurs des côtés de l'angle droit est égale à la demi-somme des diamètres des cercles circonscrit et inscrit de ce triangle.

EXERCICE 790 **10 minutes**

Démontrer le théorème : « Soit ABC un triangle quelconque, K le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ avec $[BC]$. Alors $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{AC}$ ».

☞ On pourra introduire le point D intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (AK) passant par B, et s'intéresser à la nature du triangle BCD.

EXERCICE 791 **15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, I le centre de son cercle inscrit. On note respectivement H et D les projetés orthogonaux de A et I sur (BC).
Soit M le milieu du segment $[BC]$ et E le symétrique de D dans la symétrie de centre M.
Démontrer que les droites (IM) et (AE) sont parallèles.
☞ On pourra comparer deux angles.

EXERCICE 792 **20 minutes**

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 120°$. On note M et N les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C dans le triangle ABC.
Soit P le milieu de $[BC]$.
Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

EXERCICE 793 **15 minutes**

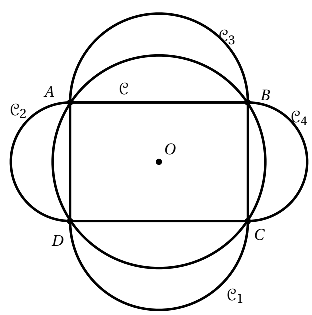
Soit $ABCDEFGH$ un octogone régulier. Ses angles sont tous de même mesure, ses côtés sont tous de même longueur, que l'on prendra comme unité.
Quelles sont les longueurs de ses diagonales $[AC]$, $[AD]$ et $[AE]$?

EXERCICE 794 **10 minutes**

Soit $ABCD$ un quadrilatère possédant deux angles droits, en B et D.
Le triangle ADC est isocèle. Les segments $[AB]$ et $[BC]$ vérifient $AB + BC = 1$.
Quelle est l'aire de quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 795 **15 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ les quatre demi-disques extérieurs au rectangle ayant pour diamètres ses côtés.
Montrer que l'aire totale des lunules est égale à l'aire du rectangle.



EXERCICE 796 **15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque d'aire S. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.
Quels sont les cas d'égalité ?
☞ On admettra que $\cos\widehat{A} + \sqrt{3}\sin\widehat{A} = 2\cos\left(\widehat{A} - 60°\right)$.

EXERCICE 797 **15 minutes**

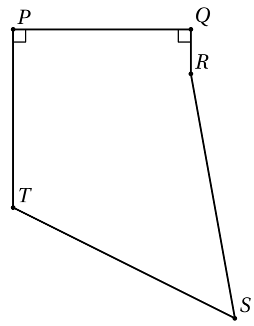
Calculer l'aire du pentagone $PQRST$ sachant que :

$PQ = PT = 8$ cm

$QR = 2$ cm

$TS = RS = 13$ cm

$\widehat{TPQ} = \widehat{RQP} = 90°$.

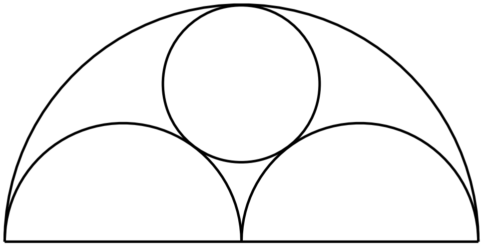


EXERCICE 798 **10 minutes**

Un tunnel, dont la coupe transversale est représentée ci-contre, comporte deux voies de circulation représentées par des demi-disques de même rayon et un conduit d'évacuation des gaz représenté par un disque plus petit.

Les deux demi-disques et le petit disque sont tangents deux à deux et tangents intérieurement à un grand disque de diamètre égal à 12 m.

Déterminer le diamètre du conduit d'évacuation des gaz.



Chapitre 4

Statistiques et probabilités

4.1 Proportions et pourcentages

4.1.1 Point de cours

Définition 1 : On considère une population E qui possède N individus et une sous-population A composée de n individus.
La **proportion** ou **part** d'individus de la sous-population, notée p, est égale à :

$$p = \frac{\text{nombre d'individus de la sous-population A}}{\text{nombre d'individus de la population E}} = \frac{n}{N}$$

Remarque : Une proportion est un nombre compris entre 0 et 1 que l'on peut exprimer dans différentes écritures : fractionnaires, décimales ou en pourcentage.

Propriété 1 : Le pourcentage t d'une population ayant un caractère A donné est égal à la proportion de la population ayant ce caractère multiplié par 100 :

$$t = proportion \times 100 = \frac{\text{Nombre de personnes ayant le caractère A}}{\text{taille de la population considérée}} \times 100$$

Propriété 2 : Comparaison de proportion

- Si deux sous-populations font partie d'**une même population de référence**, alors leurs proportions sont rangées **dans le même ordre** que les effectifs.
- Si deux sous-populations font partie **de populations de référence différentes**, alors leurs proportions **ne sont pas forcément rangées dans le même ordre** que les effectifs.

Propriété 3 : Prendre p % d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par $\frac{p}{100}$.

4.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 799 **5 minutes**

Le département de Paris regroupe 2 175 600 habitants en 2021 alors qu'en France la population est de 67 400 000 habitants. Calculer le pourcentage de Parisiens en France à 10^{-2} près.

EXERCICE 800 **5 minutes**

1. Dans une classe de 32 étudiants, 8 pratiquent le golf. Quelle est la proportion de golfeurs dans la classe ?
2. Dans un lycée, tous les élèves de seconde passent un examen de langue, 259 élèves ont choisi l'anglais, 126 l'allemand, 136 l'espagnol et 5 le chinois. Donner ces résultats en pourcentages (on donnera les résultats arrondis au centième).

EXERCICE 801 **5 minutes**

La production annuelle mondiale de blé est de 653 milliards de tonnes. Sachant que la production européenne représente 32% de la production mondiale, quelle est la production de blé de l'Europe en milliards de tonnes arrondis à 10^{-2} ?

EXERCICE 802 **5 minutes**

Au mois de juin 2021, une société a fait 15 000 euros de chiffre d'affaire. Sachant que le mois de juin représente $2,5\%$ de leur chiffre d'affaire de l'année, quel sera le chiffre d'affaire de la société en 2021 ?

EXERCICE 803 **10 minutes**

Une enquête a été réalisée auprès d'un échantillon représentatif de la population d'une municipalité afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

L'enquête révèle que 60 % des habitants pratiquent le tri sélectif, 55 % des habitants sont sensibles au développement durable, et la moitié de la population est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.

1. Compléter à l'aide de l'énoncé le tableau suivant :

Pourcentage d'habitants	font du tri sélectif	ne font pas du tri sélectif	Total
sont sensibles au DD			
ne sont pas sensibles au DD			
Total			100

2. Quelle est la proportion de personnes ne pratiquant pas le tri sélectif ?
3. Calculer la proportion de personnes sensibles au développement durable ou pratiquant le tri sélectif.
4. Calculer la proportion de personnes insensibles au développement durable et ne pratiquant pas le tri sélectif.

EXERCICE 804 **5 minutes**

1. Une classe de 30 élèves contient 21 filles. Quelle est la proportion de filles dans cette classe? Exprimer ensuite ce résultat sous forme de pourcentage.
2. Cette année, un musée français a reçu 75 250 visiteurs dont 24 525 étrangers. Calculer la proportion de visiteurs français cette année. Exprimer ensuite ce résultat sous forme de pourcentage arrondi au dixième.

EXERCICE 805 **5 minutes**

Sur les 380 élèves du lycée, 75% ont réussi leur baccalauréat. Quel est le nombre d'élèves admis? Combien d'élèves ont échoué?

EXERCICE 806 **5 minutes**

De 2005 à 2006, le montant de la consommation de soins hospitaliers en France a augmenté de 4,3%. En 2005, le montant de la consommation de soins hospitaliers était de 69,9 milliards d'euros.
Quel était au milliard d'euros près, le montant de la consommation de soins hospitaliers en 2006?

EXERCICE 807 **5 minutes**

1. Dans une classe de 35 élèves, il y a 60% de garçons. Combien y a-t-il de filles?
2. Dans un lycée de 1600 élèves, quel pourcentage représentent les 560 élèves de seconde?

EXERCICE 808 **10 minutes**

1. M. Durand et M. Dupond se présentent à une élection. Un sondage réalisé auprès de 1 500 personnes donne pour résultat 705 personnes favorables à M. Durand. Quel taux de popularité peut-on en déduire pour M. Durand?
2. Dans un petit port, les $\frac{5}{6}$ des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche?

EXERCICE 809 **10 minutes**

35% correspond à $\frac{35}{100} = 0,35$.

1. Traduire de même chacun des pourcentages suivants :
   a. 25% **b.** 95% **c.** 2% **d.** $9,95\%$ **e.** $0,3\%$ **f.** $0,04\%$ **g.** 250% **h.** $20,6\%$
2. Ecrire sous forme de pourcentage les nombres décimaux suivants :
   a. $0,18$ **b.** $0,5675$ **c.** $0,723$ **d.** $0,0125$ **e.** $1,23$ **f.** $3,5$ **g.** $0,0025$ **h.** $0,0205$

EXERCICE 810 **10 minutes**

Dans le club de tennis Alpha on compte 30% de joueurs de moins de 18 ans. Dans le club de tennis Beta, il y a 25% de joueurs de moins de 18 ans.

Math affirme qu'il y a plus de joueurs de moins de 18 ans dans le club Alpha que dans le club Beta. Que penser de cette affirmation ?

4.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 811 **5 minutes**

1. Dans une classe de 30 élèves 70% sont demi-pensionnaires. Quel est le nombre d'élèves demi-pensionnaires ?
2. En 2010, la population active en France, est estimée à 28,4 millions de personnes. Le pourcentage du nombre de chômeurs représente environ $9,5\%$ de la population active. Quel est le nombre de personnes au chômage en 2010 ?

EXERCICE 812 **5 minutes**

Lors d'une élection, il y avait 22 345 inscrits, 17 329 votants et M. Jean a obtenu 11 245 voix.

1. Quel est le pourcentage d'abstention ?
2. Donner le résultat de M. Jean en pourcentage des votants, puis en pourcentage des inscrits.

EXERCICE 813 **10 minutes**

1. Dans un lycée 35 élèves sont inscrits au club photos, 28 au club escalade et 17 au club échecs. Une somme de 3600 € est répartie entre ces trois clubs proportionnellement au nombre d'inscrits à chaque club. Quelle somme revient à chaque club ?
2. Un libraire a vendu en une semaine 1250 livres dont 20% de polars, 42% de BD et le reste en littérature. Quel est le nombre de livres vendus dans chaque catégorie ?
3. J'ai payé 350 g de raisins 1,05 €. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 600 g ?

EXERCICE 814 **10 minutes**

1. Une maison est divisée en trois appartements de 45 m^2, 70 m^2 et 110 m^2. Les charges sont réparties proportionnellement à la surface de l'appartement.
   Combien paie l'occupant de chaque appartement quand les charges totales sont de 1500 € ?
2. Trois amies qui appellent la France depuis l'étranger se demandent si le prix de la communication est proportionnel à la durée de l'appel.
   La première a appelé 12 minutes et a payé 13,47 €, la seconde 36 minutes et a payé 36,41€ et la dernière a payé 8,98 € pour un appel de 8 minutes.
   Est-ce proportionnel ?

EXERCICE 815 **10 minutes**

Dans une classe de 26 élèves, chaque élève étudie au moins une langue parmi l'anglais et l'espagnol, 19 élèves étudient l'anglais et 12 l'espagnol.

1. Combien d'élèves étudient les deux langues ? En donner le pourcentage.
2. Quel est le pourcentage d'élèves qui n'étudient qu'une langue des deux langues ?
3. Parmi les élèves n'étudiant qu'une langue, quel est le pourcentage d'anglophones ?

EXERCICE 816 **10 minutes**

Une agence de publicité veut tester l'efficacité d'une campagne d'affichage d'un nouveau produit A et pour cela réalise une étude auprès de 1000 personnes. Les résultats sont les suivants :

- 650 personnes ont vu une affiche ;
- 300 personnes ont acheté le produit A ;
- 100 ont acheté le produit sans avoir vu d'affiche.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de personnes qui	ont acheté A	n'ont pas acheté A	Total
ont vu une affiche			
n'ont pas vu d'affiche			
Total			1000

2. Quel est le pourcentage de personnes ayant acheté le produit A ?
3. Quel est le pourcentage de personnes ayant vu une affiche ?
4. Quel est le pourcentage de personnes ayant vu une affiche et acheté le produit A ?
5. Quel est le pourcentage de personnes ayant vu une affiche ou acheté le produit A ?
6. Quel est le pourcentage de personnes n'ayant pas vu une affiche et ayant acheté le produit A ?

EXERCICE 817 **10 minutes**

Les élèves d'un établissement scolaire de 2 000 élèves se répartissent ainsi :

- 40 % sont des filles ;
- 15 % des filles sont internes ;
- 60 % des élèves, parmi lesquels 760 garçons, sont externes ;
- la moitié des demi-pensionnaires sont des filles.

1. Compléter le tableau suivant en utilisant les données précédentes :

	Internes	Demi-p.	Externes	Total
Filles				
Garçons				
Total				20 000

2. Parmi les internes, quel est le pourcentage de filles ?
3. Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires dans l'établissement ?

EXERCICE 818 **15 minutes**

Les 1 200 étudiants d'un campus universitaire ont été questionnés sur deux de leurs activités de loisirs.

Certains de ces étudiants participent à un atelier de création artistique : atelier de chant choral ou atelier de danse contemporaine.
L'enquête a révélé que :

- 5 % des étudiants pratiquent le chant choral ;
- parmi les étudiants pratiquant le chant choral, 15 % pratiquent la danse contemporaine ;
- parmi les étudiants qui ne pratiquent pas le chant choral, 60 % ne pratiquent pas la danse contemporaine.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre d'étudiants du campus :	pratiquant le chant choral	ne pratiquant pas le chant choral	Total
pratiquant la danse contemporaine			
ne pratiquant pas la danse contemporaine			
Total			1 200

2. Quel est le pourcentage d'étudiants pratiquant la danse contemporaine ?
3. Quel est le pourcentage d'étudiants ne participant aucun atelier de création artistique ?
4. Quel est le pourcentage d'étudiants pratiquant la danse contemporaine ou le chant choral ?
5. Quel est le pourcentage d'étudiants pratiquant le chant choral parmi ceux qui pratiquent la danse contemporaine ?

EXERCICE 819 **10 minutes**

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB, O.
Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur rhésus.
Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de rhésus positif noté Rh+.
Dans le cas contraire, l'individu est dit de rhésus négatif noté Rh−.
Une étude statistique, portant sur un effectif de 10 000 personnes a donné les résultats suivants :

40 % des personnes sont du groupe A.

10 % des personnes sont du groupe B.

5 % des personnes sont du groupe AB.

Les autres sont du groupe O.

1. Compléter le tableau suivant qui donne la répartition des 10 000 personnes.

Groupe	A	B	AB	O	Total
Rh+		810			8 105
Rh-	720		85		
Total					10 000

2. Quelle est le pourcentage de personnes du groupe O ?
3. Quelle est le pourcentage de personnes de rhésus positif ?
4. Quelle est le pourcentage de personnes du groupe O et de rhésus positif ?
5. Quelle est le pourcentage de personnes du groupe O ou de rhésus positif ?

EXERCICE 820 **10 minutes**

Une étude a montré que, sur les 385 administrateurs des sociétés du CAC 40, 19 % sont étrangers.
Les auteurs de cette étude ont choisi de s'intéresser aux « pluri-administrateurs », les dirigeants qui remplissent au moins deux mandats.
Sur les 76 ayant plus d'un mandat, 4 sont étrangers.

1. En utilisant les données ci-dessus, compléter le tableau suivant (on arrondira à l'entier le plus proche) :

	Administrateurs français	Administrateurs étrangers	Total
1 mandat			
2 mandats ou plus			
Total			385

2. A l'aide du tableau, donner le pourcentage de Français n'ayant qu'un seul mandat.
3. Sachant que 45 % des administrateurs français qui cumulent au moins deux mandats sont issus des grands corps d'état (Polytechnique, les Mines, etc.), donner leur nombre.
4. Quelle est le pourcentage d'administrateurs d'une société composant le CAC 40, étrangers et avec un seul mandat ?

EXERCICE 821 **15 minutes**

Dans un grand magasin, il y a 120 pantalons à vendre dans les quatre tailles : S, M, L, ou XL et dans les trois coloris : vert, bleu ou rouge.
• 50 % des pantalons sont bleus et 20 % des pantalons sont dans la taille S.
• En taille S, il y a le même nombre de pantalons dans les trois coloris.
• Il y a trois fois plus de pantalons dans la taille S que dans la taille XL.
• En taille XL, il n'y a que des pantalons bleus.
D'autres informations figurent dans le tableau ci-dessous.

1. Compléter le tableau :

Coloris \ Taille	S	M	L	XL	Total
vert		10			
bleu			20		
rouge		12	15		
Total					120

2. Quelle est la proportion de pantalon est vert ?
3. Quelle est la proportion de pantalon est en taille L ?
4. Quelle est la proportion de pantalon est vert, en taille L ?
5. Quelle est la proportion de pantalon est vert ou en taille L ?
6. Quelle est la proportion de pantalons en taille L parmi ceux de coloris vert ?

EXERCICE 822 **15 minutes**

Le tableau suivant (établi par l'INSEE, enquête emploi, en mars 1995) nous donne la répartition par sexe et par catégorie socioprofessionnelle de la population active occupant un emploi, en milliers.

	Hommes	Femmes	Total
Agriculteurs exploitants	506	296	802
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	1 109	558	1 667
Cadres, professions intellectuelles supérieures	1 928	947	2 875
Professions intermédiaires	2 578	2 075	4 653
Employés	1 508	4 772	6 280
Ouvriers	4 700	1 145	5 845
Total	12 329	9 793	22 122

1. Compléter, en précisant les calculs nécessaires, le texte suivant :
   Les résultats seront arrondis à l'unité.
   - **a.** Il y a ... % de femmes dans l'ensemble de la population active occupant un emploi.
   - **b.** ... % des employés sont des femmes.
   - **c.** ... % des employés sont des hommes.
   - **d.** ... % de l'ensemble de la population active occupant un emploi sont des employés.
   - **e.** ... % de l'ensemble des femmes actives occupant un emploi sont des employées
   - **f.** En 1995, un ouvrier sur ... était une femme.
2. Quelle est la proportion de femmes agricultrices ?
3. Quelle est la proportion de femmes chez les agriculteurs ?

EXERCICE 823 **15 minutes**

Une usine fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication, il apparaît deux types de défauts, le défaut mécanique A et le défaut esthétique B.
Sur un lot de 300 montres, 2 % des montres fabriquées présentent le défaut A, 7 % le défaut B et 278 montres ne présentent aucun des deux défauts.

1. **a.** Combien de montres fabriquées présentent le défaut A ?
   b. Combien de montres fabriquées présentent le défaut B ?
   c. Compléter sur le tableau suivant :

Nombre de montres	défaut A	pas le défaut A	Total
défaut B			
pas le défaut B			
Total			300

2. **a.** Quelle est la fréquence f des montres présentant les deux défauts ?
   b. Parmi les montres présentant le défaut B, quel est le pourcentage de celles présentant le défaut A ?
   c. Le directeur de l'usine affirme : « Il y a plus de 93 % des montres qui ne présentent aucun des deux défauts ». A-t-il raison ?

EXERCICE 824 **15 minutes**

Un match de football entre deux équipes A et B se déroule dans un stade accueillant 85 000 spectateurs.
Parmi les spectateurs :

- 59 500 sont des supporters de l'équipe A ;
- 35 500 sont licenciés à la Fédération française de football (FFF) ;
- 10 125 supporters de l'équipe A sont licenciés à la FFF.

1. Compléter le tableau suivant avec les données de l'énoncé.

	Licenciés à la FFF	Non licenciés à la FFF	Total
Supporters de l'équipe A			
Supporters de l'équipe B			
Total			85 000

2. Quelle est la proportion de supporters de l'équipe A ?
3. Quelle est la proportion de licenciés à la FFF ?
4. Quelle est la proportion de licenciés à la FFF et supporters de l'équipe A ?
5. Quelle est la proportion de supporters de l'équipe A parmi les licenciés à la FFF ?

6. Quelle est la proportion de licenciés à la FFF parmi les supporters de l'équipe A ?

EXERCICE 825 **15 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.

Le tableau suivant donne la répartition selon l'âge et le sexe des 1 000 personnes accueillies aux urgences après un accident de VTT.

Sexe \ Age	[5 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 35[	[35 ; 75[	Total
Masculin	67	389	73	31	560
Féminin	77	277	54	32	440
Total	144	666	127	63	1 000

1. La proportion de personnes de sexe féminin est :
a. $0,56$ **b.** $0,44$ **c.** $0,766$

2. La proportion de personnes âgées de 10 à 20 ans est :
a. $0,389$ **b.** $0,277$ **c.** $0,666$

3. La proportion de personnes de plus de 20 ans est :
a. $0,190$ **b.** $0,810$ **c.** $0,235$

4. La proportion de personnes de sexe féminin et âgées de 10 à 20 ans est :
a. $0,630$ **b.** $0,416$ **c.** $0,227$

5. La proportion de personnes de sexe féminin et âgées de plus de 20 ans est :
a. $0,453$ **b.** $0,086$ **c.** $0,195$

6. La proportion de personnes âgées de plus de 20 ans parmi les femmes est :
a. $0,195$ **b.** $0,122$ **c.** $0,453$

7. La proportion de personnes âgées de plus de 20 ans parmi les hommes est :
a. $0,130$ **b.** $0,186$ **c.** $0,547$

EXERCICE 826 **15 minutes**

Un restaurant propose dans son menu trois formules :

- Formule A : entrée – plat
- Formule B : plat – dessert
- formule C : entrée – plat – dessert

On note le choix des clients venus déjeuner (ensemble noté M) ou dîner (ensemble noté S). Les effectifs sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Formule A	Formule B	Formule C	Total
M	27	31		75
S	12	20	53	85
Total	39	51	70	160

1. Combien de clients ont choisi la formule C à midi ?

2. a. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant choisi la formule A parmi ceux qui sont venus déjeuner.

b. Montrer que la fréquence en pourcentage de clients venus dîner parmi ceux qui ont choisi la formule B est, au dixième près, égal à 39,2 %.

3. Calculer la fréquence en pourcentage de clients ayant déjeuné dans ce restaurant.

4. Le patron du restaurant déclare : « J'ai une carte des desserts très attractive car plus des trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert. »
A-t-il raison ? Justifier la réponse.

4.2 Taux d'évolution

4.2.1 Point de cours

Définition 1 : Une grandeur évolue d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f.

- La **variation absolue** est $V_f - V_i$
- La **variation relative** est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$

Définition 2 : On considère deux nombres strictement positifs : une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f.
Le **taux d'évolution** entre V_i et V_f est : $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$.

Remarque : Le taux d'évolution est souvent exprimé en pourcentage :

- Si $t \geqslant 0$, on pose $p = t \times 100$, alors $t = p\%$ et on a **une augmentation** de $p\%$ de V_i à V_f.
- Si $t \leqslant 0$, on pose $p = -t \times 100$, alors $t = -p\%$ et on a **une diminution** de $p\%$ de V_i à V_f.

Définition 3 : On considère une quantité passant d'une valeur V_i à une valeur V_f.
Le **coefficient multiplicateur** c est le nombre par lequel il faut multiplier V_i pour obtenir V_f :

$$V_f = c \times V_i \iff c = \frac{V_f}{V_i}$$

Remarques : Le coefficient multiplicateur est souvent calculé à partir du taux d'évolution. En effet, on a : $c = 1 + t$

- Si $c > 1$, alors on a **une augmentation** de V_i à V_f.
- Si $c < 1$, alors on a **une diminution** de V_i à V_f.

4.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 827 **5 minutes**

Une augmentation de 15% correspond à un coefficient multiplicateur de c :
$c = 1 + \frac{15}{100} = 1 + 0,15 = 1,15$.
Donner les coefficients multiplicateurs associés à des augmentations de :

a. 20%	**c.** $10,25\%$	**e.** $0,7\%$	**g.** $0,02\%$
b. $5,6\%$	**d.** 100%	**f.** 350%	**h.** 1%

EXERCICE 828 **5 minutes**

Une diminution de 15% correspond à un coefficient multiplicateur de c :
$c = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$.
Donner les coefficients multiplicateurs associés à des augmentations de :

a. 20%	**c.** $10,25\%$	**e.** 7%	**g.** $0,02\%$
b. $5,6\%$	**d.** 100%	**f.** $0,35\%$	**h.** 1%

EXERCICE 829 **5 minutes**

Pour chacun des coefficients multiplicateurs suivants, indiquer s'il correspond à une augmentation ou à une diminution et donner le pourcentage de variation correspondant :

a. $1,25$	**c.** $0,2$	**e.** 5	**g.** $1,543$
b. $1,005$	**d.** $0,999$	**f.** $0,35$	**h.** $0,9975$

EXERCICE 830 **5 minutes**

La population d'un village est passée de 120 habitants au 1$^{\text{er}}$ janvier 2019 à 105 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020.
Calculer la variation absolue et le taux d'évolution (en pourcentage) du nombre d'habitants entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2019 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2020.
Conclure par une phrase.

EXERCICE 831 **5 minutes**

Un théâtre a programmé 260 représentations pour l'année en cours contre 240 l'année passée.
Calculer le taux d'évolution du nombre de représentations de l'année dernière à cette année.
Conclure par une phrase.

EXERCICE 832 **5 minutes**

Tom gagnait 1200 € par mois et a été augmenté de 30 €. Sans calculer le nouveau salaire, calculer le taux d'évolution de l'ancien au nouveau salaire.

EXERCICE 833 **5 minutes**

La facture d'épicerie de monsieur Bidule s'élève à $12,30$ €. L'épicier lui fait cadeau des 30 centimes.
Calculer le pourcentage de la réduction ainsi consentie à monsieur Bidule.

EXERCICE 834 **5 minutes**

La construction d'une nouvelle route fait que la distance entre les villes A et B est maintenant

de 48 km, ce qui constitue une baisse de $4,5$ km.
Calculer la variation relative de l'ancienne à la nouvelle distance entre les deux villes.

EXERCICE 835 **10 minutes**

1. Dans chacun des cas suivants, donner le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse ou à une baisse de taux d'évolution donnée.

a. Une hausse de 10%.
b. Une baisse de 10%.
c. Une hausse de $0,3$%.
d. Une baisse de 97%.
e. Une hausse de 250%.

2. Dans chacun des cas suivants, le coefficient multiplicateur c est donné. Indiquer s'il s'agit d'une hausse ou d'une baisse et en donner le taux d'évolution sous forme de pourcentage.

a. $c = 1,3$
b. $c = 1,002$
c. $c = 0,99$
d. $c = 3,97$
e. $c = 0,007$
f. $c = 12$

EXERCICE 836 **5 minutes**

Dans une classe, il y a 40 % de filles, dont 33% fument. Parmi les garçons, on compte 11 % de fumeurs. Quel est le pourcentage de fumeurs dans la classe ?

EXERCICE 837 **10 minutes**

Voici les résultats d'un grand groupe pour les années 2002 et 2003, en milliards de dollars.

	2002	2003
Chiffre d'affaires	54,0	50,4
Bénéfice net	0,49	0,70
Nombre d'avions livrés	381	281

1. Déterminer la variation absolue de chaque donnée.
2. Déterminer l'évolution relative de chaque donnée (les résultats seront arrondis au centième).
3. Si l'évolution se poursuit avec les mêmes taux d'évolution, estimer les résultats pour l'année 2004.

EXERCICE 838 **10 minutes**

1. Une robe au prix affiché de 56 euros est soldée à 30%. Quel est son nouveau prix ?
2. Une veste coûtait 35 €, elle est soldée à 25 €. Quel est le pourcentage de réduction ?
3. Un manteau coûtait 225 €, un mois plus tard il est affiché à 230 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

EXERCICE 839 **5 minutes**

Une fillette mesurait 94 cm il y a six mois. On la mesure aujourd'hui et on constate que sa taille a augmenté de 5%. Combien mesure-t-elle aujourd'hui ?

4.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 840 **5 minutes**

Un lanceur vient d'expédier son javelot à $76,93$ m, ce qui est inférieur de 2% à son premier lancer. A quelle distance avait-il lancé le javelot la première fois ?

EXERCICE 841 **5 minutes**

A la suite d'une surproduction, le prix de vente des pommes a été divisé par 3. Calculer le taux de diminution du prix des pommes (donner le résultat sous forme de pourcentage arrondi à 10^{-2} près).

EXERCICE 842 **10 minutes**

1. Christophe déclare que cette année les vacances lui ont coûté deux fois plus cher que l'an dernier.
   Calculer le taux d'évolution, puis le coefficient multiplicateur, du coût des vacances de Christophe de l'année dernière à cette année.
2. Djamila lui répond que les siennes lui ont coûté deux fois moins cher que l'an dernier.
   Calculer le taux d'évolution, puis le coefficient multiplicateur, du coût des vacances de Djamila de l'année dernière à cette année.

EXERCICE 843 **10 minutes**

Sachant que la taxe sur la valeur ajoutée (TVA) est de 20%, calculer :

1. le prix toutes taxes comprises (TTC) sachant que le prix hors taxes (HT) est de 1360 € ;
2. le prix hors taxe, sachant que le prix TTC est de 12 380 € ;
3. le prix hors taxe, sachant que le prix TTC est de 78 000 € ;
4. le prix toutes taxes comprises (TTC) sachant que le prix hors taxes (HT) est de 25 000 €.

EXERCICE 844 **10 minutes**

1. Un pull coûte 25 € hors taxe. Le taux de la TVA est 20 %. Quel est le prix de ce pull taxe comprise ? (Le prix sera arrondi à l'euro.)
2. Le prix marqué sur une chemise est 40 €. La chemise a une tache, le magasin propose alors une remise de 15%. Quel sera alors le prix de la chemise ?
3. La population d'une ville a augmenté de 6% en un an. Elle est maintenant de 23 456 habitants. Quelle était la population de cette ville l'année précédente ?

EXERCICE 845 **10 minutes**

Un constructeur automobile décide d'augmenter le prix de tous ses modèles de 2% le 1er juillet 2021.

1. **1.** Le prix du modèle A était de 19 500 € le 30 juin 2021. Quel est son nouveau prix le 1er juillet 2021 ?
2. **2.** Le prix du modèle B était de 25 000 € le 30 juin 2021. Quel est son nouveau prix le 1er juillet 2021 ?
3. **3.** Le prix du modèle C est de 22 440 € le 1er juillet 2021. Combien l'aurais-je payé en l'achetant le 30 juin 2021 ?

EXERCICE 846 **10 minutes**

1. **1.** Un salaire mensuel de 1350 € est augmenté de 3%. Quel est le nouveau salaire ?
2. **2.** Un commerçant propose 20% de remise sur tous les articles de son magasin.
   Combien payera-t-on une chemise affichée 53 € avant remise ?
3. **3.** En 2019, 516,8 millions de livres ont été édités dont 22,8% en livres de poche.
   Combien d'exemplaires de livres de poche ont été édités en 2019 ?

EXERCICE 847 **10 minutes**

1. **1.** Tom a payé son costume 173,10 € après une remise de 15%.
   Quel était le prix du costume avant remise ?
2. **2.** Après une augmentation de 8%, une armoire est vendue 1350 €.
   Quel était son prix avant l'augmentation ?
3. **3.** Un ordinateur coûte 1650 €, il est soldé avec 30% de remise.
   Quel est son prix après remise ?
4. **4.** Un pantalon de 99,70 € a été vendu après remise 85,74 €.
   Quel est le pourcentage de remise consentie par le commerçant ?

EXERCICE 848 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

1. **1.** Un article coûtant 250 € augmente de 10%. Son nouveau prix est :

   a. 25 € **b.** 251,1 € **c.** 275 € **d.** 300 €
2. **2.** Un article coûtant 120 € subit une réduction de 30%. Son nouveau prix est :

   a. 30 € **b.** 36 € **c.** 70 € **d.** 84 €
3. **3.** Tom a payé son nouveau manteau 85,50 € après une remise de 5%. Son prix avant remise était :

   a. 90 € **b.** 89,78 € **c.** 81,23 € **d.** 80,50 €
4. **4.** Après une augmentation de 6%, le salaire d'un technicien est de 2570,50 € net par mois. Son salaire avant l'augmentation était de :

   a. 2416,27 € **b.** 2425 € **c.** 2569,44 € **d.** 2569,90 €

EXERCICE 849 **5 minutes**

On mélange 6 litres de jus d'orange contenant 30% de sucre avec 4 litres de jus d'orange conte-

nant 20% de sucre.
Quel est le pourcentage en sucre du mélange obtenu ?

EXERCICE 850 **5 minutes**

Les laitons sont des alliages de cuivre et de zinc. Un échantillon de laiton contient 336 g de cuivre. Sachant que ce laiton contient 70% de cuivre, quelle est la masse de cet échantillon ?

EXERCICE 851 **10 minutes**

Dans un article publié par « Alternatives Economiques », il est indiqué qu'en 1999, les ménages représentent 97,9% de la population française. Les personnes seules représentent 12,6% des ménages et les familles 83,4%. La population française était alors de 58 507 000.

1. Quel était l'effectif des personnes vivant seules ?
2. Quel était l'effectif des personnes vivant en famille ?

EXERCICE 852 **15 minutes**

Un **indice** est un nombre qui permet de traduire les pourcentages d'évolution d'une grandeur entre deux dates, l'une étant prise comme date de référence. On attribue l'indice 100 à la grandeur considérée à la date de référence.
Par exemple : le prix d'un article était de 1,35 € en 2000, il est de 1,50 € en 2010, en prenant le prix en 2000 comme référence, nous aurons en 2010 :
$I = \dfrac{1,50}{1,35} \times 100 = 111,1$ valeur arrondi au dixième.

1. Compléter le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015	2020
Prix	1,35	1,40	1,50		2,15
Indice	100		111,1	125	

2. Quel est le pourcentage d'augmentation du prix de 2000 à 2020 ?

EXERCICE 853 **10 minutes**

Le tableau suivant indique le prix en euros d'une action entre 2010 et 2020.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Prix	105,71	122,15	117,79	133,51	144,73	153,27	167,98	169,35	179,58	189,68	200,84

Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. Déterminer le taux d'évolution entre 2010 et 2020.
2. Compléter le tableau suivant :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Evolution annuelle en %											
Indice	100										

3. En quelle année a-t-on enregistré la plus forte hausse ?

4. Tom possédait, en 2010, 125 actions. Combien avait-il en 2020 dans son portefeuille d'actions ? Quel serait son gain, en euros, s'il avait tout vendu fin 2020 ?

EXERCICE 854 **15 minutes**

Le tableau suivant présente l'évolution en indices de la population de la Chine entre 1950 et 2020.
La population de la Chine a atteint 1 241 millions d'habitants en 1995.

Années	1950	1960	1970	1990	1995	2000	2010	2020
Indice	100	120	151	206	220			
Population en millions d'hab.					1 241	1 291	1 369	1 439

1. Déterminer les indices manquants (les indices seront arrondis au dixième).

2. Quel est le pourcentage d'augmentation de la population entre 1950 et 1995 ? entre 1950 et 2020 ?

3. Quelle était la population de la Chine en 1950 ? en 1970 ?

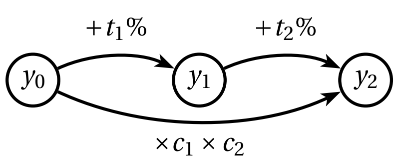
4. Comparer le rythme d'évolution de 1950 à 1995 et de 1995 à 2020.

4.3 Evolutions successives et réciproques

4.3.1 Point de cours

Définition 1 : Evolutions successives

Le coefficient multiplicateur associé à une succession d'évolutions est le produit des coefficients multiplicateurs associés aux évolutions successives.
Si on considère deux évolutions de coefficients c_1 et c_2, alors le coefficient multiplicateur global est $c = c_1 \times c_2$.

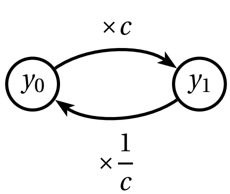


Définition 2 : Evolution réciproque

Le taux d'évolution réciproque $t'\%$ d'un taux d'évolution donné $t\%$ vérifie :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$$

Autrement dit : $c \times c' = 1$ d'où $c' = \dfrac{1}{c}$.



4.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 855 **5 minutes**

Entre le 1er janvier 2011 et le 1er janvier 2013, le prix du baril de pétrole brut a augmenté de 16,28%. Entre le 1er janvier 2013 et le 1er janvier 2015, le prix du baril de pétrole brut a diminué de 56,82%.
Quelle a été l'évolution (globale) du prix du baril de pétrole entre le 1$^{\textbf{er}}$ janvier 2011 et le 1$^{\textbf{er}}$ janvier 2015 ?

EXERCICE 856 **10 minutes**

1. Un pull coûte 17 €. Le commerçant l'offre à la première personne entrant à 17 heures précises. Quelle est la réduction consentie sur le pull ?
2. Peut-on avoir une réduction de 200% sur un article ?
3. Un article subit successivement quatre réductions de 50%. Quelle est la réduction finalement appliquée ?

EXERCICE 857 **10 minutes**

1. Après une hausse de 8% le prix d'un article est de 243€. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
2. Après une baisse de 5% le prix d'un article est de 152€. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
3. Quel est le pourcentage d'évolution d'un article qui baisse successivement de 8% puis de 5% ?
4. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?

EXERCICE 858 **5 minutes**

A l'Hôtel de la Plage, les chambres sont affichées hors saison à 40 euros. Pendant la basse saison, elles subissent une première augmentation de 20%. Depuis le 15 juin, alors que nous sommes passés en haute saison, elles ont encore augmenté de 30%.
Paul dit : « Les chambres ont augmenté de 50% en tout ! ». A-t-il raison ?

EXERCICE 859 **5 minutes**

Un produit vient de subir une augmentation de 15%, quelle devra être la diminution pour que le produit retrouve son prix de départ ?

EXERCICE 860 **10 minutes**

Dans chacun des cas suivants, calculer le coefficient multiplicateur global.
Indiquer le taux d'une baisse ou d'une hausse et en donner le taux d'évolution sous forme de pourcentage.

1. Une hausse de 10%, puis une baisse de 20%.
2. Une hausse de 20%, puis une baisse de 10%.
3. Une baisse de 50%, puis une baisse de 25%.

4. Une hausse de 50%, puis une hausse de 25%.
5. Une hausse de 50%, puis une baisse de 50%.

EXERCICE 861 **10 minutes**

Le coût d'un objet augmente de 10% le 1$^{\text{er}}$ janvier. Il augmente encore, le 1$^{\text{er}}$ septembre, de 20% par rapport à son prix précédent; il est alors égal à 792 euros.

1. Combien coûtait-il avant les deux augmentations?
2. Quel est le pourcentage de l'augmentation unique ayant le même effet sur le prix de l'objet que les deux augmentations précédentes?
3. L'affirmation suivante est-elle **vraie** ou **fausse**?
   « Deux augmentations successives de 10% et 20% peuvent être remplacées par une augmentation unique de 30% ».

EXERCICE 862 **5 minutes**

Un article qui valait 92 euros a subi deux augmentations successives, la première de 5%, la seconde de 15%.
Quelle est l'augmentation totale, en pourcentage et en valeur, subie par cet article?

EXERCICE 863 **5 minutes**

1. Un article subit une augmentation de 30 %, puis le mois suivant une baisse de 30 %. Coûtera-t-il après la baisse le même prix qu'au départ?
2. Un article subit une baisse de 20 %, puis une augmentation de 25 %. Coûtera-t-il, après l'augmentation, plus cher qu'au départ?

EXERCICE 864 **5 minutes**

Le prix des caramels mous doit augmenter de 20 %. Devant le mécontentement général, le confiseur propose d'augmenter le prix de 5 % chaque mois pendant quatre mois. Les défenseurs du caramel mou acceptent. Ont-ils raison?

EXERCICE 865 **5 minutes**

Deux objets coûtaient le même prix. Le premier subit une augmentation de 30 % suivie d'une baisse de 20 %. Le second subit une baisse de 20 % puis une augmentation de 30 %. Lequel coûtera le plus cher?

EXERCICE 866 **5 minutes**

1. Après remise de 20%, un pantalon coûte 14 €. Quel était son prix avant remise?
2. Après une hausse de 75%, une veste coûte 35 €. Quel était son prix avant l'augmentation?

EXERCICE 867 **5 minutes**

Mathilde va faire les soldes. Dans un magasin, elle trouve un pull à 40€, avec une réduction de 30% et une robe à 50€, avec une réduction de 50%.
Grâce à sa carte de fidélité, Mathilde bénéficie d'une réduction supplémentaire de 10% sur le

montant total de ses achats.
Combien lui coûteront son pull et sa robe ?

EXERCICE 868 **5 minutes**
Après deux augmentations successives, la première de 8% et la seconde de 12%, le prix d'une armoire est de $725,76$ €. Quel était le prix initial de l'armoire ?

EXERCICE 869 **5 minutes**
Dans chaque cas, déterminer, sous forme de pourcentage arrondi à 10^{-2}, le taux d'évolution réciproque.

1. Une hausse de 200%
2. Une baisse de $0,5$%
3. Une hausse de $1,6$%

EXERCICE 870 **5 minutes**
Un produit est soumis à une TVA de 20%, laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse pour l'acheteur ?
• Proposition A : faire une remise de 10% sur le prix hors taxe, puis appliquer la TVA.
• Proposition B : appliquer la TVA, puis faire une remise de 10% sur le prix TTC.

4.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 871 **5 minutes**
Le coût de fabrication d'une chemise se décompose de la façon suivante : 60% pour la main-d'œuvre et 40% pour le tissu, les boutons et le fil.
La main-d'œuvre augmente de 12%, le tissu, les boutons et le fil augmentent de 30%.
De combien augmente le prix de revient de la chemise ?

EXERCICE 872 **10 minutes**
Un capital de $12\,000$ € placé au 1^{er} janvier 2020 subit chaque mois de l'année 2020 une hausse de 1%.

1. Par quel nombre est-il multiplié chaque mois ?
2. Quel est le montant du capital au 1^{er} janvier 2021.
3. Quel est le taux d'évolution du capital sur l'année 2020 ?

EXERCICE 873 **10 minutes**
Dans chaque cas, calculer :

- le coefficient multiplicateur c correspondant à la hausse ou à la baisse, donnée en pourcentage ;
- le coefficient multiplicateur c', éventuellement arrondi à 10^{-4}, de l'évolution réciproque ;
- le pourcentage de l'évolution réciproque.

1. Une hausse de 25%
2. Une baisse de 40%
3. Une hausse de 100%
4. Une baisse de 99%.

EXERCICE 874 **10 minutes**

Compléter la facture suivante :

Article	Prix HT	Taux de TVA	Montant TVA	Prix TTC	Nombres d'articles	Montant
A	$420,00$	$\cdots$	$\cdots$	$443,10$	3	$\cdots$
B	$\cdots$	$\cdots$	$22,50$	$247,50$	2	$\cdots$
C	$\cdots$	10%	33	$\cdots$	2	$\cdots$
D	$\cdots$	20%	$\cdots$	$\cdots$	5	1 080
					Total	$\cdots$

EXERCICE 875 **10 minutes**

Compléter la facture suivante :

Article	Prix HT	Taux de TVA	Montant TVA	Prix TTC	Nombres d'articles	Montant
A	$250,00$	20%	$\cdots$	$\cdots$	2	$\cdots$
B	$\cdots$	$5,5\%$	$6,05$	$\cdots$	1	$\cdots$
C	415	$\cdots$	$41,5$	$\cdots$	2	$\cdots$
D	$\cdots$	$2,1\%$	$\cdots$	$\cdots$	2	$510,50$
					Total	$\cdots$

EXERCICE 876 **10 minutes**

Compléter la facture suivante :

Article	Prix HT	Taux de TVA	Montant TVA	Prix TTC	Nombres d'articles	Montant
A	$520,00$	20%	$\cdots$	$\cdots$	1	$\cdots$
B	$\cdots$	$5,5\%$	$21,78$	$\cdots$	2	$\cdots$
C	270	$\cdots$	$14,85$	$\cdots$	3	$\cdots$
D	$\cdots$	$2,1\%$	$\cdots$	$\cdots$	2	3 063
					Total	$\cdots$

EXERCICE 877 **10 minutes**

Le PIB, calculé chaque année, est un indicateur qui permet d'évaluer les richesses en France par les différents acteurs économiques, publics et privés.
Le tableau suivant donne le **taux de croissance annuel du PIB**.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Evolution en pourcentage	$2,5\%$	$2,3\%$	$-0,1\%$	$-2,7\%$	$1,5\%$	$3,1\%$	2%	$2,6\%$

1. Calculer le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution du PIB entre le début 2006 et la fin 2013.
En déduire le taux d'évolution de croissance du PIB pendant ces huit années.

2. Pour l'année 2005, en euros de 2000, le PIB de la France était de 1 566 milliars d'euros. Calculer le PIB de la France à la fin de 2013, en euros de 2000.

EXERCICE 878 **10 minutes**

Une matière première coûtait 156 euros la tonne la semaine dernière.

1. Calculer le prix P_1 à la tonne de cette matière première après une hausse de 7%.

2. Calculer de deux manières différentes le taux d'évolution réciproque.

EXERCICE 879 **10 minutes**

Lors d'un krach boursier les actions ont baissé dans la journée de 35%.

1. Si le lendemain les actions augmentent de 30%, quelle sera l'évolution sur les deux jours ?

2. Si le lendemain les actions augmentent de 35%, quelle sera l'évolution sur les deux jours ?

3. Si le lendemain les actions augmentent de 40%, quelle sera l'évolution sur les deux jours ?

4. Si le lendemain les actions augmentent de 45%, quelle sera l'évolution sur les deux jours ?

5. De combien doivent augmenter les actions pour retrouver leur cours d'avant le krach ?

EXERCICE 880 **5 minutes**

Confirmer ou infirmer l'affirmation suivante : « avec une augmentation de 5% par an, un prix fait plus que doubler en 15 ans ».

EXERCICE 881 **10 minutes**

Le prix d'un produit subit successivement : une hausse de 12%, une baisse de 5%, une baisse de 8%, une hausse de 2%.

1. Donner le coefficient multiplicateur associé à chaque variation.

2. En déduire que, suite à ces quatre variations, le prix du produit a été multiplié par $0,9985$ à 10^{-4} près.

3. En déduire le pourcentage de variation global ?

4. Quel est le taux de variation qui permettrait de retrouver le prix de départ ?

EXERCICE 882 **15 minutes**

Une commune a, en 2019, un budget de 150 000 € pour les espaces verts.
Elle a augmenté ce budget de 15% pour l'année 2020, puis a réduit de 20% pour l'année 2021.

1. Quel sera le budget des espaces verts en 2020 et en 2021 ?

2. Quel est le taux d'évolution du budget des espaces verts entre 2019 et 2020 ?

3. Le résultat aurait-il été le même en faisant deux baisses identiques de 4% ?

4. Quelle devra être l'évolution du budget des espaces verts pour retrouver le budget de 2019 ?

EXERCICE 883 **15 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule est correcte.

1. Une entreprise de transport a réalisé en 2007 un chiffre d'affaires de 2,98 millions d'euros. L'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2008 par rapport au chiffre d'affaires en 2007 (pris comme base 100) est 114. Le chiffre d'affaire en 2008 est, à $0,01$ près) de :

a. 4,12 millions d'euros **b.** 2,61 millions d'euros **c.** 3,40 millions d'euros

2. Lors des soldes, une paire de chaussures porte l'étiquette suivante :
« Première démarque : $-20\,\%$ puis démarque supplémentaire : $-10\,\%$ »
Le taux d'évolution global associé au prix de la paire est :

a. une baisse de 28 % **b.** une baisse de 11,8 % **c.** une baisse de 30 %

3. Après avoir subi sept évolutions successives de son prix, un article valant initialement 110 euros coûte désormais $133,75$ euros. Le taux d'évolution moyen (en % arrondi à $0,01$ près) de ces sept évolutions successives :

a. 3,08 % **b.** 2,83 % **c.** 3,39 %

Pour les questions 4 et 5 qui suivent on considère le problème suivant :
Une voiture neuve est affichée au prix de 18 600 €. On estime qu'elle se déprécie de 8 % chaque année.
Le tableau suivant est obtenu grâce à un tableur qui donne le prix (à l'euro près) selon les années (l'année d'achat étant l'année de rang 0) :

	A	B	C
1	Rang de l'année	Taux de la baisse en %	Prix de la voiture
2	0	8	18 600
3	1		17 112
4	2		15 743
5	3		14 484
6	4		13 325

4. Dans la cellule C3, on a entré une formule que l'on a recopiée vers le bas. Cette formule est :

a. =C2*(1-$B$2/100) **b.** =C2*(1-B2/100) **c.** =$C$2*(1-$B$2/100)

5. L'année à partir de laquelle l'estimation de la voilure sera inférieure à 10 000 € est celle :

a. de rang 7 **b.** de rang 8 **c.** de rang 9

EXERCICE 884 **15 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

La feuille de calcul ci-dessous, obtenue à l'aide d'un tableur, donne l'évolution du prix du timbre d'une lettre prioritaire en France métropolitaine entre 2005 et 2015.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
2	Prix du timbre en euro	0,53	0,54	0,54	0,55	0,56	0,58	0,6	0,61	0,63	0,66	0,76
3	Taux d'évolution annuelle du prix											

1. Le taux d'évolution global du prix du timbre entre 2005 et 2015, arrondi à 0,1 % près, est de :

a. 30,3 % **b.** 43,4 % **c.** 3,0 % **d.** 4,3 %

2. Le taux d'évolution annuel moyen du prix du timbre entre 2005 et 2015, arrondi à 0,01 % près, est de :

a. 0,37 % **b.** 3,67 % **c.** 2,75 % **d.** 0,43 %

3. La formule qui, entrée dans la cellule C3 et recopiée vers la droite, permet de compléter le tableau est :

a. =C2−B2/C2 **b.** =(C2−$B$2)/$B$2 **c.** =(C2−B2)/B2 **d.** =(C2−B2)/C2

4. En supposant que le prix du timbre va augmenter chaque année de 4 % à partir de 2015, le prix du timbre en 2020, arrondi au centime d'euro près, sera de :

a. 0,79 € **b.** 1,06 € **c.** 0,92 € **d.** 0,96 €

4.4 Statistiques descriptives

4.4.1 Point de cours

Vocabulaire :

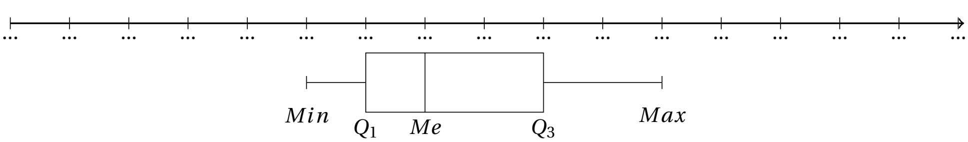
• On appelle **population** l'ensemble des personnes ou des objets étudiés. Un **individu** est un élément de la population.

• Réaliser une étude statistique consiste à classer les **individus** d'une **population** en fonction

d'un **caractère** (ou **variable**).
• Un caractère peut être **qualitatif** ou **quantitatif**.
• On suppose que le caractère étudié prend les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ avec les effectifs respectifs $n_1, n_2, \cdots, x_p$.
L'**effectif total** N de la série est : $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$
☞ Ce qui se note aussi : $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ se lit « somme des n_i pour i allant de 1 à n ».
• La **fréquence** d'un caractère x_i est égale à $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.

Paramètres de position : les paramètres de position permettent de dégager la tendance centrale de la série statistique étudiée.
• La **moyenne** $\overline{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N} = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i$.
• Le **mode** est la valeur (ou les valeurs) du caractère de plus grand effectif.
• La **médiane** est une valeur M du caractère qui partage la population ordonnée en deux sous-ensembles de même effectif.
• Les **quartiles** sont les trois valeurs du caractère qui partagent les valeurs ordonnées du caractère en quatre sous-ensembles de même effectif. Le premier quartile, noté Q_1, est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des données sont inférieures ou égales à Q_1. Le troisième quartile, noté Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des données sont inférieures ou égales à Q_3. Le deuxième quartile, noté Q_2, n'est autre que la médiane.
Propriété : Soient a et b deux réels, si une série de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ a pour moyenne $\overline{x}$ alors la série de valeurs $ax_1 + b, ax_2 + b, \cdots, ax_p + b$ a pour moyenne $a\overline{x} + b$

Paramètres de dispersion : les paramètres de dispersion permettent de mesurer l'étalement de la série statistique autour de sa tendance centrale.
• L' **étendue** est la différence entre les deux valeurs extrêmes prises par le caractère étudié.
• L' **écart interquartile** est la différence $Q_3 - Q_1$.
• $[Q1\,;\,Q_3]$ est l' **intervalle interquartile**.
• La **variance** est la moyenne des carrés des écarts entre chaque valeur x_i et la moyenne :
$$V = \frac{n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p\left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2.$$
• L' **écart type** est la racine de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$. L'écart type mesure la dispersion de la série autour de la moyenne.
• Le **diagramme en boîte** (ou boîte à moustaches) permet de résumer les caractères de position d'une série statistique :



4.4.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 885 **10 minutes**

Voici les notes obtenues dans la classe de Math lors du dernier devoir :

Notes	2	5	6	9	11	12	15	19
Effectif	1	3	2	7	5	4	3	1

1. Construire le diagramme en bâtons, puis le polygone des effectifs.
☞ Le polygone des effectifs est la ligne brisée joignant les points de coordonnées (note ; effectif).

2. Déterminer le mode et la moyenne.

3. Calculer les effectifs cumulés croissants. En déduire la médiane et les quartiles.

4. Construire le diagramme en boîte de la série.

EXERCICE 886 **5 minutes**

On a relevé le montant des loyers d'appartements de trois pièces dans une ville moyenne. Le paramètres de cette étude statistique sont donnés ci-dessous.

Min	Q_1	Me	Q_3	Max
350€	530€	650€	780€	1050€

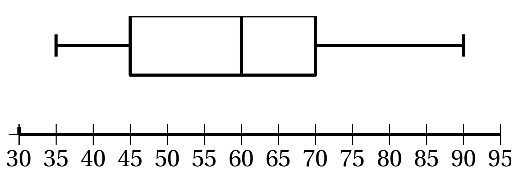
1. Exprimer concrètement la signification de chacune de ces valeurs.

2. Calculer l'étendue et l'écart interquartile.

3. Choisir une graduation adaptée sur un axe horizontal et construire le diagramme en boîte de cette série statistique.

EXERCICE 887 **5 minutes**

Le diagramme en boîte ci-dessous donne le budget moyen mensuel, en dizaines d'euros, consacré à l'alimentation par 750 familles de quatre personnes.



1. Lire les paramètres de cette série statistique indiqués par le diagramme.

2. Quelle est la part de ces familles dont le budget mensuel est compris entre 600 et 700 € ?

EXERCICE 888 **10 minutes**

On étudie la fréquentation d'un parc d'attraction en 2003 et 2018.
Le nombre annuel de visiteurs, en millions, constitue une liste de 15 valeurs :

11,7	12,6	12,1	12,5	12,2
12,2	13,1	12,4	12,4	12,2
12,8	14,5	15,3	15,4	15,0

On entre ces valeurs dans la calculatrice et on calcule les paramètres de cette liste à une variable (le nombre de visiteurs). On obtient sur la calculatrice :

Stats 1-var
$\bar{x} = 13.09333$
$\Sigma x = 196.4$
$\Sigma x^2 = 2594.3$
$\sigma x = 1.23205338$
$\downarrow n = 15$

Stats 1-var
$\uparrow n = 15$
$minX = 11.7$
$Q_1 = 12.2$
$Med = 12.5$
$Q_3 = 14.5$
$maxX = 15.4$

1. **a.** Quel est le nombre moyen de visiteurs par an ?
   b. Que vaut l'écart type arrondi à $0,01$ près ?
2. **a.** La médiane $12,5$ est-elle une valeur de la série ? Si oui, expliquer pourquoi ?
   b. Peut-on lire directement la médiane dans la liste donnée ? Si non, que faut-il faire ?
3. **a.** Calculer l'écart interquartile IQ de cette série.
   b. Comparer cet écart au double de l'écart type.
4. En 2019, le parc annonce $15,6$ millions de visiteurs.
   a. La moyenne augmente-t-elle ?
   b. La médiane change-t-elle ?
   c. Le nouveau premier quartile Q_1 est-il encore égal à $12,2$?

EXERCICE 889 **10 minutes**

On étudie la fréquentation du musée. La série suivante est le nombre annuel d'entrées, en millions, de 1996 à 2010.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Visteurs	2,14	2,28	2,72	2,24	2,35	1,68	2,13	1,83	2,59	2,93	3,01	3,17	3,03	3,02	2,99	3,14

1. En utilisant les outils statistiques de la calculatrice, déterminer la fréquentation moyenne du musée et l'écart type sur ces 16 années. Arrondir les résultats à 10^{-2}.
2. Déterminer, sans la calculatrice, la médiane et les quartiles.
3. Tracer le diagramme en boîte de la série.

EXERCICE 890 **10 minutes**

1. Construire une série d'effectif 11, de moyenne 10, de médiane 12 et d'étendue 19.
2. Construire une série d'effectif 16, de moyenne 15, de médiane 13 et d'étendue 30.

EXERCICE 891 **10 minutes**

Grâce à la collecte des températures en France entre 1901 et 2006, on a pu tracer le polygone des effectifs cumulés croissant des températures annuelles moyennes.

1. A l'aide du graphique précédent, déterminer la valeur de la médiane.
2. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Température moyenne	[10 ; 10,5[	[10,5 ; 11[	[11 ; 11,5[	[11,5 ; 12[	[12 ; 12,5[	[12,5 ; 13[	[13 ; 13,5[
Nombre d'années							

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la moyenne et l'écart type de cette série statistique arrondis au centième près.

EXERCICE 892 **10 minutes**

1. Voici la taille (en m) de 25 personnes : 1,75 – 1,57 – 1,68 – 1,77 – 1,89 – 1,84 – 1,92 – 1,78 – 1,79 – 1,74 – 1,77 – 1,73 – 1,70 – 1,80 – 1,75 – 1,85 – 1,86 – 1,72 – 1,90 – 1,81 – 1,78 – 1,75 – 1,62 – 1,77 – 1,60
   Déterminer la moyenne, l'étendue, la médiane et les quartiles de cette série.
2. Voici le poids (en kg) de 16 personnes : 75 – 57 – 92 – 64 – 75 – 76 – 87 – 87 – 59 – 64 – 79 – 80 – 99 – 86 – 78 – 75
   Déterminer la moyenne, l'étendue, la médiane et les quartiles de cette série.

EXERCICE 893 **10 minutes**

Les deux séries A et B suivantes sont les notes obtenues par Anatole et Bérénice en mathématiques :

A : 10 ; 13 ; 12 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 et B : 7 ; 5 ; 13 ; 15 ; 9 ; 17 ;11.

1. Calculer la moyenne de chaque série.
2. Calculer la médiane et l'écart interquartile de chaque série.
3. En utilisant les outils statistiques de la calculatrice, déterminer l'écart type de chaque série.
4. Comparer ces deux séries en considérant le couple (moyenne - écart type), puis en considérant le couple (médiane - écart interquartile).
   Quel est le profil scolaire de chacun de ces deux élèves dans cette matière ?

EXERCICE 894 **5 minutes**

La répartition des salaires dans une entreprise est donnée dans le tableau suivant :

Salaires en €	Effectifs	ECC	Fréquences	FCC
[750 ; 1000[	150			
[1000 ; 1250[	350			
[1250 ; 1500[	200			
[1500 ; 1750[	150			
[1750 ; 2000[	50			
[2000 ; 2250[	30			
[2250 ; 2500[	10			
Total				

Déterminer les effectifs cumulés croissants (ECC), puis les fréquences (sous forme décimale arrondie au centième) puis les fréquences cumulées croissantes (FCC).

EXERCICE 895 **10 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.

1. Une série statistique a 120 valeurs rangées en ordre croissant. La médiane est :

   a. la 60^{e} valeur **b.** 60 **c.** le milieu entre la 60^{e} et la 61^{e} valeur.

2. Pour une série de 106 valeurs, le troisième quartile est :

   a. $79,5$ **b.** la 27^{e} valeur **c.** la 80^{e} valeur.

3. Pour une série de 45 valeurs, la moyenne est :

   a. la 23^{e} valeur **b.** la moitié de l'étendue **c.** influencée par les valeurs extrêmes.

4. Dans un diagramme en boîte, la médiane est :

a. $\dfrac{Q_1+Q_3}{2}$ **b.** Q_3-Q_1 **c.** représentée par le trait vertical dans la boîte.

5. On considère la série statistique :
$20-18-7-12-3-1-14-42-36-51-9-21-36-10$

a. $\bar{x}=14$ **b.** $\sigma>14$ **c.** $\sigma<5$

6. La série statistique donne la répartition de 240 candidats à un concours.

Age	21	22	23	24	25
Nombre de candidats	57	64	67	35	19

a. $Me=22$ **b.** $\bar{x}=22$ **c.** l'étendue est $57-19=38$.

4.4.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 896 **10 minutes**

On dispose d'une série statistique prenant les valeurs x_1, x_2, $\cdots$, x_p et d'effectifs respectifs n_1, n_2, $\cdots$, n_p avec $n_1+n_2+\cdots+n_p=N$.

1. Démontrer que la somme des fréquences est égale à 1.

2. Démontrer que la variance est aussi égale à $V=\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right)-\overline{x}^2$.

EXERCICE 897 **15 minutes**

Dans tout l'exercice, les tailles sont exprimées en centimètres.

1. L'équipe de soins de la maternité « Beaux jours » a relevé la taille des nouveaux-nés au mois de janvier 2013. Les 57 tailles sont données dans le tableau suivant :

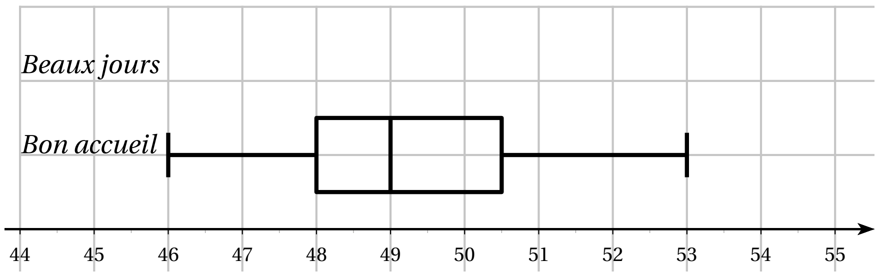
Taille	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectif	1	2	3	5	5	7	9	8	6	5	3	2	1
E.C.C.													

a. Compléter le tableau précédent.

b. Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.

c. Déterminer la moyenne de cette série statistique, arrondie à 10^{-3} près.

d. Tracer le diagramme en boîte de cette série statistique.



2. L'équipe de soin de la maternité « Bon accueil » a tracé le diagramme en boîte ci-dessus correspondant aux tailles des 64 nouveaux-nés de son service. On sait de plus que la taille moyenne des nouveaux-nés en janvier dans ce service est de $49{,}3$ cm.
   Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.
3. Parmi les deux maternités (les seules de la ville), une seule possède un service pour les naissances prématurées. Quelle est cette maternité ? Justifier la réponse.

EXERCICE 898 **10 minutes**

Comment sont modifiés la moyenne, la médiane et les quartiles d'une série de 100 notes à un examen dans les cas suivants :

1. On augmente chaque note d'un point.
2. On diminue chaque note de 10%.
3. On augmente les 25 notes les plus basses d'un point.

EXERCICE 899 **10 minutes**

Les 30 élèves d'une classe ont mesuré un même angle avec leur rapporteur. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Angle (en °)	23	23,5	24	25	82
Effectif	8	6	9	6	1

1. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série. La moyenne obtenue semble-t-elle une estimation acceptable de la mesure de l'angle ?
2. Une mesure semble aberrante. Laquelle est-ce ?
3. Calculer la moyenne et l'écart type de la série sans la valeur aberrante.
4. Au vu des résultats précédents, les valeurs extrêmes d'une série ont-elles de l'influence sur la moyenne et l'écart type ?

EXERCICE 900 : PROGRAMMATION **15 minutes**

On dispose de deux listes de même longueur, une liste $L1$ contenant des notes et une liste $L2$ contenant les coefficients des notes contenues dans $L1$ (dans le même ordre).

1. Ecrire une fonction qui prend en arguments $L1$ et $L2$ et qui retourne la moyenne correspondant.
2. Ecrire une fonction qui prend en arguments $L1$ et $L2$ et qui affiche la moyenne et l'écart type correspondant.
   ☞ Pour la fonction racine (SQRT) il faut importer la bibliothèque math.

EXERCICE 901 : PROGRAMMATION **10 minutes**

Ecrire un programme, en python, qui prend en arguments 4 notes, qui demande la moyenne désirée et affiche la note minimum nécessaire qu'il faut obtenir au cinquième devoir.

EXERCICE 902 : PROGRAMMATION **15 minutes**

On dispose de trois listes. La liste ELEVES contient le prénom des élèves de la classe, la liste C les coefficients des devoirs, la liste NOTES est une liste contenant les listes de notes des élèves de la classe (dans le même ordre que la liste ELEVE). On suppose que tous les élèves ont fait tous les devoirs, ils ont donc tous le même nombre de notes.

1. Ecrire, en python, une fonction qui prend en arguments les listes ELEVES, C et NOTES, qui calcule la moyenne de chaque élève et renvoie le résultat sous forme de liste (en restant dans l'ordre de départ).
2. Ecrire, en python, une fonction qui prend en arguments les listes ELEVES, C et NOTES et affiche le prénom de l'élève ayant la meilleure moyenne ainsi que sa moyenne.

EXERCICE 903 **20 minutes**

1. Démontrer la propriété : Soient a et b deux réels, si une série de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ a pour moyenne $\overline{x}$ alors la série de valeurs $ax_1+b, ax_2+b, \cdots, ax_p+b$ a pour moyenne $a\overline{x}+b$.
2. Soient deux séries statistiques $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et $y_1, y_2, \cdots, y_p$ de moyennes respectives $\overline{x}$ et $\overline{y}$.
   Justifier que la moyenne de la série $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_p$ est égale à $\dfrac{n\overline{x}+p\overline{y}}{n+p}$.
3. Dans un marathon, 53 concurrents sont inscrits en tant que professionnels et 2 354 en tant qu'amateurs. Le temps moyen pour les professionnels est de 2h 15 contre 3h 59 pour les amateurs.
   Calculer le temps moyen mis par les participants.
4. Lors du dernier devoir, la moyenne de la classe n'était que de 8,5 sur 20.
   - **a.** De combien doit-on augmenter chaque note pour obtenir une moyenne de 10 pour la classe ?
   - **b.** Trouvant cette méthode injuste, l'enseignant préfère multiplier les notes des élèves par un même coefficient t. Quelle doit être la valeur de t pour obtenir une moyenne de 10 pour la classe ?

EXERCICE 904 **15 minutes**

Sur une chaîne de production, un échantillon de 100 pièces métalliques est prélevé. On mesure le diamètre de ces pièces en millimètres :

Diamètre	[5,2 ; 5,3[	[5,3 ; 5,4[	[5,4 ; 5,5[	[5,5 ; 5,6[	[5,6 ; 5,7[	[5,7 ; 5,8[
Effectif	5	2	45	44	3	1

1. Compléter le tableau suivant :

x_i	5,25	5,35					
n_i	5	2	45	44	3	1	
nx_i							
nx_i^2							
							Total

2. Calculer la moyenne de la série statistique. Tous les résultats seront arrondis au millième.
3. En déduire la variance, puis l'écart type de la série.

EXERCICE 905 **10 minutes**

Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

	Sprinter A	Sprinter B	Sprinter C	Sprinter D	Sprinter E	Sprinter F	Sprinter G	Sprinter H
Sprint 1	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"24	10"12	10"17

Soit $x_A, x_B, \cdots, x_H$ les temps respectifs des sprinters $A, B, \cdots, H$ au sprint 1 et $y_A, y_B, \cdots, y_H$ les temps respectifs des sprinters $A, B, \cdots, H$ au sprint 2.

1. Calculer les temps moyens $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des sprints 1 et 2.
2. Calculer les écarts types σ_x et σ_y.
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

EXERCICE 906 **10 minutes**

Une chaîne de fabrication confectionne des paquets de pâtes de 500 g. Les machines prévues pour le remplissage sont testées régulièrement. Voici les résultats portant sur un échantillon de 999 paquets :

Masse (en g)	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492
Effectif	1	5	6	1	5	7	8	9	16	15	22	25	23	33
Masse (en g)	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506
Effectif	35	32	52	45	59	54	50	62	50	45	50	51	39	31
Masse (en g)	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520
Effectif 28	31	24	24	15	27	21	8	5	5	3	4	2	1	1

1. Déterminer le minimum, le maximum, la médiane (notée Me), Q_1, Q_3 et l'intervalle interquartile (noté EQ).

2. Les critères de qualités imposent pour ses machines : $499 \leqslant Me \leqslant 501$, $Q_1 \geqslant 495$, $Q_3 \leqslant 505$, $0 \leqslant EQ \leqslant 9$ et moins de 1,5% de valeurs en dehors de $[Q_1 - 1,5EQ\,;\,Q_3 + 1,5EQ]$.
La machine testée réussit-elle le test ?

EXERCICE 907 **10 minutes**

Tom est en première année de licence en portail sciences formelles. Le premier semestre est constitué de 4 disciplines : mathématiques, informatique, une discipline au choix (sciences des données, mécanique ou physique) et OIP (orientation et insertion professionnelle). Chaque discipline rapporte respectivement 9, 9, 9 et 3 crédits (ECTS) qui sont également les coefficients des différentes notes sur 80 de la moyenne générale.
Tom a obtenu 56 en mathématiques, 74 en informatique, 59 en mécanique et 60 en IOP.

1. Quelle est la moyenne de Tom ?
2. Combien aurait dû avoir Tom en mathématiques pour avoir la mention très bien, c'est-à-dire 64 sur 80 de moyenne, pour ce semestre ?

EXERCICE 908 **10 minutes**

Le contrôle qualité des analyses de biologie médicale est un ensemble de moyens utilisé par le biologiste pour détecter et corriger les erreurs pouvant entacher les résultats des examens de laboratoire.
Voici un des éléments de ce dispositif.
Un même échantillon d'urée (une substance présente dans les urines) a été dosé sur les 31 jours d'un mois. On a obtenu les résultats suivants, en grammes par litre : $0,3 - 0,28 - 0,31 - 0,3 - 0,3 - 0,29 - 0,25 - 0,32 - 0,29 - 0,3 - 0,31 - 0,29 - 0,33 - 0,32 - 0,3 - 0,28 - 0,29 - 0,31 - 0,3 - 0,28 - 0,31 - 0,32 - 0,28 - 0,3 - 0,29 - 0,3 - 0,27 - 0,38 - 0,29 - 0,3 - 0,31$.

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de cette série de résultats.
2. Le laboratoire indique que « les limites de confiance » sont à $\overline{x} - 2\sigma$ et $\overline{x} + 2\sigma$, et que les « limites d'alerte » sont à $\overline{x} - 3\sigma$ et $\overline{x} + 3\sigma$.
A-t-on atteint pendant le mois les limites de confiance ou celles d'alerte ?

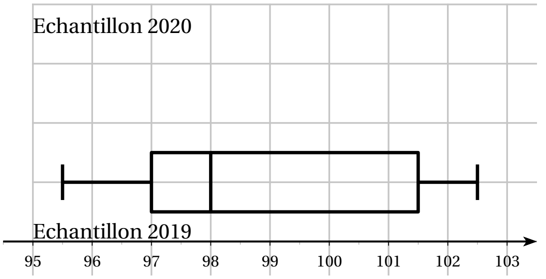
EXERCICE 909 **20 minutes**

Une entreprise qui produit du chocolat, fabrique des tablettes de 100 grammes.
Au début de l'année 2020, elle décide de prélever un échantillon dans sa production afin de vérifier la masse.
Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Masse (en grammes)	96	97	98	99	100	101	102	103
Effectif	5	6	9	13	32	16	5	4

1. Calculer la masse moyenne μ, exprimée en grammes, des tablettes de cet échantillon (arrondir au dixième).
2. On admet que l'écart type σ de cette série est égal à 1,6. Calculer $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.

3. Déterminer le pourcentage des tablettes dont la masse est dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.
4. Déterminer la médiane et les quartiles de l'échantillon 2020.
5. Tracer le diagramme en boîte de cette série sur le graphique ci-dessous.
6. Un échantillon a été prélevé fin 2019, voici son diagramme en boîte :



Donner les valeurs du minimum, du maximum, des quartiles et de la médiane de cet échantillon 2019.

7. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Fin 2019, environ trois quart des tablettes de chocolat avaient une masse supérieure à 98 grammes.
b. L'écart interquartile a été réduit de plus de la moitié entre fin 2019 et début 2020.
c. Le consommateur qui achète des tablettes produites par cette entreprise fin 2019 peut se sentir lésé.

4.5 Probabilités

4.5.1 Point de cours

Vocabulaire :
• Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
• L'**univers**, noté Ω, associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les résultats possibles.
• Une **issue** est un des résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Définition 1 : Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \left\{x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n\right\}$ consiste à attribuer à chacune des issues x_i un nombre p_i compris entre 0 et 1, appelé **probabilité**, tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Propriété 1 : En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de prendre cette valeur comme probabilité de l'issue.

Propriétés 2 :
• $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
• Lorsque toutes les issues sont équiprobables, on a $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}}$.
• Pour tout événement $A : 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Définitions 2 : soient A et B deux événements d'un univers Ω.
• L'**intersection** de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B, se note $A \cap B$.
• La **réunion** de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (au moins un des deux événements), se note $A \cup B$.
• Les événements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.
• L'**événement complémentaire** de A est l'événement, noté $\overline{A}$, formé de toutes les issues qui ne réalisent pas A.
Autrement dit, $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Propriétés 3 : soient A et B deux événements d'un univers Ω.
• $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
• si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
• $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

4.5.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 910 **10 minutes**

On lance un dé à 20 faces, numérotées de 1 à 20. On lance le dé et on note le numéro de la face en contact avec le sol.
On note :

- A l'événement « obtenir un nombre pair »;
- B l'événement « obtenir un nombre multiple de 3 »;
- C l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 8 »;
- D l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 12 ».

1. Déterminer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et $p(D)$.
2. Définir par une phrase, puis calculer la probabilité des événements :
a. $A \cap B$ **b.** $A \cap C$ **c.** $B \cup C$
3. Déterminer $p(C \cap D)$. Que peut-on dire des événements C et D ?

EXERCICE 911 **15 minutes**

Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire un jeton au hasard.
On considère les événements suivants :
• A : « le numéro du jeton tiré est impair »;
• B : « le numéro du jeton est un multiple de 5 ».

1. Quels sont les événements élémentaires composant A et B ?
Compléter : $A = \left\{\cdots\cdots\right\}$ et $B = \left\{\cdots\cdots\right\}$

2. Décrire sous forme d'un ensemble de valeurs, les événements suivants en listant les issues qui les réalisent.

a. $A \cap B$	**d.** $\overline{A \cap B}$	**g.** $\overline{A} \cup B$
b. $A \cup B$	**e.** $\overline{A \cup B}$	**h.** $\overline{A} \cap \overline{B}$
c. $\overline{A}$	**f.** $\overline{A} \cap B$	**i.** $\overline{A} \cup \overline{B}$

3. Certains événements sont-ils identiques ?

4. Déterminer $p\left(\overline{A \cap B}\right)$ et $p\left(\overline{A} \cap B\right)$

EXERCICE 912 **10 minutes**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit deux événements A et B tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,3$ alors $P(A \cup B) = 0,7$

2. Si $P(A) = \dfrac{5}{7}$ alors la probabilité de l'événement contraire de A est $\dfrac{2}{7}$.

3. Soit deux événements A et B tels que : $P(A) = 0,15$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,1$ alors $P(A \cup B) = 0,85$.

4. Soit deux événements E et F tels que $P(E) = 0,45$, $P(F) = 0,3$ et $P(E \cap F) = 0,72$ alors $P(E \cup F) = 0,63$.

EXERCICE 913 **5 minutes**

1. Soit deux événements E et F tels que $P(E) = 0,65$, $P(F) = \dfrac{1}{3}$ et $P(E \cap F) = \dfrac{17}{60}$.
Calculer $P(E \cup F)$ et $P\left(\overline{E}\right)$.

2. Soit deux événements G et H tels que $P(G) = \dfrac{3}{4}$, $P(H) = \dfrac{5}{7}$ et $P(G \cap H) = \dfrac{4}{7}$.
Calculer $P(G \cup H)$ et $P\left(\overline{G}\right)$.

EXERCICE 914 **10 minutes**

Le tableau ci-dessous donne la répartition, selon le montant des salaires nets (arrondis) de 100 employés d'une entreprise.

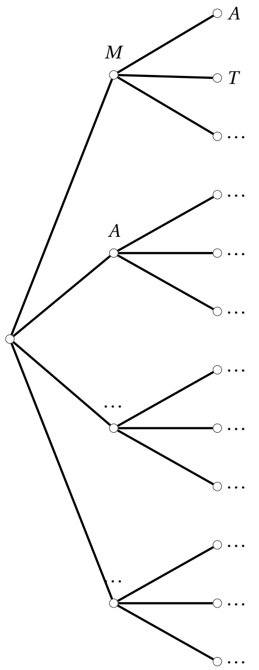
Salaire en €	1200	1300	1400	1500	1600	1700
effectif	9	16	14	39	15	7

On choisit la feuille de paie d'un employé, au hasard.
Donner la probabilité des événements :

1. A : « l'employé gagne 1400 € » ;
2. B : « l'employé gagne moins de 1500 € » ;
3. C : « l'employé gagne au moins 1600 € » ;
4. D : « l'employé gagne plus de 1300 € » ;
5. E : « l'employé gagne au plus 1500 € ».

EXERCICE 915 **15 minutes**

Math et Boby jouent au jeu suivant : chaque joueur dispose de quatre jetons sur lesquels figurent les lettres de son prénom. Le joueur choisit au hasard, successivement et sans remise, un jeton parmi les siens et constitue ainsi un mot de deux lettres.



1. Math joue, il a commencé par construire l'arbre des possibles (ou arbre de dénombrement) ci-contre pour sa partie.
   - **a.** Compléter cet arbre.
   - **b.** Etablir l'univers Ω_M pour la partie de Math.
   - **c.** Etablir la loi de probabilité associée à cette expérience.
2. - **a.** Construire un arbre de dénombrement sur le modèle du précédent.
   - **b.** Etablir l'univers Ω_B pour la partie de Boby.
   - **c.** Etablir la loi de probabilité associée à cette expérience.
   - **d.** Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

EXERCICE 916 **15 minutes**

En 2010, une étude est réalisée sur un échantillon représentatif de la population française composée de 1500 individus à qui on a demandé : « Connaissez-vous le commerce équitable ? ».
Le tableau ci-dessous donne la répartition des réponses par âge.

	Moins de 25 ans	25-39 ans	40-59 ans	60 ans et plus	Total
OUI	156	171	150	48	525
NON	258	297	273	147	975
Total	414	468	423	195	1500

On consulte au hasard la fiche d'un des 1500 individus interrogés, donc toutes les fiches ont la même probabilité d'apparaître.

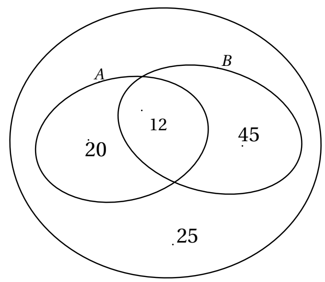
1. Calculer la probabilité des événements :
   A : « l'individu a moins de 25 ans » ;
   B : « l'individu a répondu OUI » ;
   C : « l'individu a répondu OUI et a moins de 25 ans ».
2. On considère les événements :
   D : « l'individu a répondu OUI ou a moins de 25 ans » ;
   E : « l'individu a moins de 25 ans ou de 40 à 59 ans » ;

F : « l'individu a au moins 25 ans ».
Calculer $P(D)$, $P(E)$ puis $P(F)$.

3. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a. G : « l'individu a au moins 40 ans ».
   b. H : « l'individu a répondu NON ».
   c. $G \cap H$ et $G \cup H$.

EXERCICE 917 **10 minutes**

Le diagramme de Venn ci-dessous indique la répartition d'un groupe de cent étudiants, inscrits dans une université qui prépare à plusieurs concours.
On définit les événements : A « l'étudiant est inscrit au concours A » et B « l'étudiant est inscrit au concours B ».
On choisit au hasard un étudiant de ce groupe.



1. Définir les événements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P\left(\overline{A}\right)$.
3. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

EXERCICE 918 **105minutes**

On lance un dé à 6 faces, truqué tel que : $P(1) = 0,05$ et $P(2) = P(3) = p(4) = P(5) = 0,15$.
On définit les événements :
• A : « ne pas obtenir de 1 » ;
• B : « obtenir un nombre pair » ;
• C : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ».

1. Calculer $P(6)$.
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
3. Définir par une phrase et calculer les probabilités des événements suivants :
   a. $\overline{A}$
   b. $\overline{C}$
   c. $A \cap B$
   d. $\overline{A} \cap B$
   e. $A \cup C$
   f. $\overline{B} \cup \overline{C}$

EXERCICE 919 **10 minutes**

Les issues d'une épreuve aléatoire sont les nombres 1, 2, 3, 4 et 5, de probabilités respectives p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
Calculer ces probabilités sachant que le tableau décrivant la loi de probabilité suivant est un tableau de proportionnalité.

1	2	3	4	5
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

EXERCICE 920 **10 minutes**

On donne ci-dessous la série des salaires des employés d'une entreprise.

Salaires en euros	1080	1350	1834	2109
Fréquence	$0,41$	$0,28$	?	$0,12$

1. Quel est le nombre manquant dans le tableau ?
2. Calculer le salaire moyen de ces employés.

EXERCICE 921 **15 minutes**

Dans une population, deux maladies M_1 et M_2 sont présentent respectivement chez 10% et 20% des individus (le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable).
On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2. Pour cela, on applique un test qui réagit à la maladie sur 90% des malades de M_1, sur 70% des malades de M_2 et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Compléter le tableau suivant :

	Atteint par M_1	Atteint par M_2	Pas malade	Total
Test positif				
Test négatif				
Total				100

2. Quand on choisit au hasard un individu ω dans cette population, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
3. Sachant que pour l'individu ω le test a réagi, donner la probabilité pour que ce soit :
   a. à cause de la maladie M_1 ;
   b. à cause de la maladie M_2 ;
   c. sans que ω ait l'une des deux maladies.

EXERCICE 922 **15 minutes**

Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : a et b.
• 8% des pièces présentent au moins le défaut a.
• 15% des pièces présentent au moins le défaut b.
• 5% des pièces présentent les deux défauts et sont mises directement au rebut.
• 90% des pièces qui présentent un seul défaut peuvent être réparées. Les autres sont mises au rebut.

1. Compléter le tableau suivant :

	Défaut a	Sans défaut a	Total
Défaut b			
Sans défaut b			
Total			10 000

2. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a. Calculer la probabilité p_1 qu'elle présente un seul défaut.

b. Calculer la probabilité p_2 qu'elle n'ait aucun défaut.

3. Montrer que la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit acceptée (directement ou après réparation) est de $0,937$.

4.5.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 923 **10 minutes**

Soit A un événement d'un univers Ω. Démonter les propriétés :
• $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
• Pour tout événement A : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
• Pour tout événement A, d'événement contraire $\overline{A}$, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

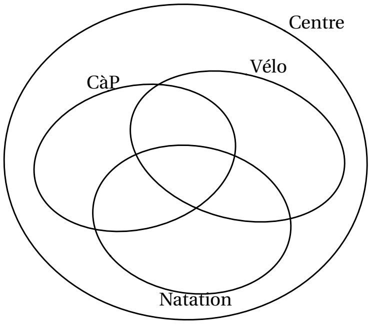
EXERCICE 924 **5 minutes**

A l'aide d'un schéma, démontrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

EXERCICE 925 **15 minutes**

Dans un centre de vacances, trois activités sont proposées : natation, vélo et course à pied.
60 personnes sont en vacances dans le centre.
• 28 sont inscrites à la natation,
• 21 sont inscrites au vélo,
• 17 sont inscrites à la course à pied,
• 5 sont inscrites aux trois activités,
• 6 à la natation et au vélo,
• 7 à la natation et à la course à pied,
• 5 au vélo et à la course à pied.

1. Compléter le diagramme suivant :



2. Combien de personnes ne pratiquent aucune de ces trois activités ?

Dans les questions suivantes les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

3. Je rencontre une personne du centre de vacances. Quelle est la probabilité :

- **a.** qu'elle fasse du vélo ?
- **b.** qu'elle pratique les trois sports ?
- **c.** qu'elle ne pratique aucun de ces trois sports ?

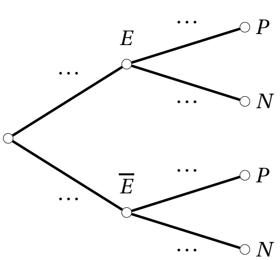
4. Je rencontre un nageur. Quelle est la probabilité :

- **a.** qu'il pratique aussi le vélo ?
- **b.** qu'il ne pratique que la natation ?

EXERCICE 926 **15 minutes**

Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :
– lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif ;
– lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest se révèle négatif.
Soit E l'événement « la personne est en état d'ébriété » et $\overline{E}$ son événement contraire
P l'événement « le test est positif » et N l'événement « le test est négatif ».

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



☞ Indiquer sur chaque branche les probabilités associées.

2. Compléter le tableau suivant :

	E	$\overline{E}$	Total
P			
N			
Total			10 000

3. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif ?

4. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat faux ?

EXERCICE 927 **15 minutes**

Une personne possède une cave de 2 400 bouteilles de vin, rouge et blanc, de trois régions : Bordeaux, Bourgogne et Loire.
La moitié de ses vins sont des Bordeaux, et il y a deux fois plus de bouteilles venant de Bourgogne que de bouteilles venant de Loire.
75% des vins sont rouges et, parmi eux, 54% viennent du Bordelais.
Dans les vins de Loire, il y a autant de blancs que de rouges.

1. Compléter le tableau suivant :

	Bordeaux	Bourgogne	Loire	Total
Blanc				
Rouge				
Total				

2. On prend au hasard une bouteille dans cette cave. Soit A l'événement « le vin est blanc » et B l'événement « le vin vient de Bordeaux ».
Calculer les probabilités suivantes :
a. $p(A)$
b. $p(B)$
c. $p(A \cap B)$
d. $p(A \cup B)$.

3. On choisit une bouteille de vin blanc. Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de Bourgogne.

4. On choisit une bouteille de Bourgogne. Calculer la probabilité que ce soit un vin blanc.

EXERCICE 928 **10 minutes**

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie supposée équilibrée et on note à chaque lancer si on obtient PILE ou FACE.

1. Représenter par un arbre pondéré les différents résultats possibles.
☞ Indiquer sur chaque branche les probabilités associées.

2. Déterminer la probabilité des événements suivants :

a. A : « Obtenir 2 fois PILE ».

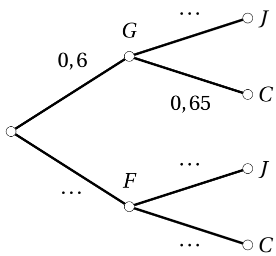
b. B : « Obtenir 1 PILE et 1 FACE ».

c. C : « Obtenir au moins 1 PILE ».

EXERCICE 929 **10 minutes**

Une classe comprend 60% de garçons. Tous les élèves étudient l'anglais en LVA. 45% des filles et 65% des garçons étudient le chinois en LVB. Tous les élèves qui ne font pas chinois étudient le japonais.

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard dans la classe soit un garçon qui étudie le japonais ?
3. Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard étudie le japonais ?

EXERCICE 930 : PROGRAMMATION **15 minutes**

On entre la formule « $int(6 \times rand + 1)$ » sur une calculatrice.

1. Que produit cette formule ?
2. Quel jeu peut-on simuler avec cette formule ?
3. Transformer la formule pour simuler un « Pile ou Face ».
4. Ecrire, en python, une fonction permettant de simuler une partie de 10 « Pile ou Face » successifs.

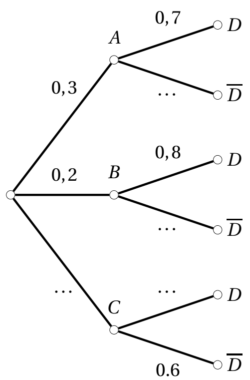
EXERCICE 931 **10 minutes**

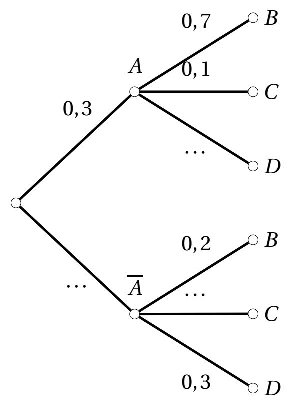
En 1904, 2 085 élèves s'étaient présentés au concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique. Parmi eux, il y avait exactement le même nombre d'élèves de chacune des trois classes préparatoires de Louis-le-Grand, Saint-Louis et Sainte Geneviève, où l'on a pu observer les taux de réussite respectifs suivants : 65%, 30% et 40%. Pour toutes les autres classes préparatoires réunis, le taux moyen de réussite était de 8%.

Sachant que 300 élèves furent reçus cette année-là à l'Ecole Polytechnique, quelle est la probabilité, lorsqu'on rencontre un élève reçu, qu'il provienne de Louis-le-Grand ?

EXERCICE 932 **10 minutes**

Compléter les arbres pondérés suivants :





EXERCICE 933 **10 minutes**

Une pièce de monnaie étant parfaitement équilibrée, quel est l'événement le plus probable :
A : « obtenir exactement un pile au cours de deux lancers » ;
B : « obtenir exactement deux piles au cours de quatre lancers ».

EXERCICE 934 **10 minutes**

Une épreuve consiste à lancer deux dés à 6 faces et effectuer le produit des numéros obtenus.
Quelle est la probabilité que ce produit soit impair ?

EXERCICE 935 **10 minutes**

On lance un dé à 6 faces 5 fois de suite.
Quelle est la probabilité que le 6 sorte 4 fois (et 4 seulement) ?

EXERCICE 936 **10 minutes**

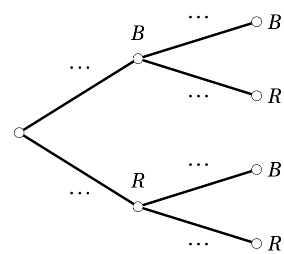
On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite. On se propose de calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir au moins deux fois un même numéro ».

1. Décrire l'événement contraire $\overline{A}$.
2. Calculer le nombre de cas favorables à la réalisation de $\overline{A}$.
3. En déduire que $P(A)$ est environ égale à $0,72$.

EXERCICE 937 **10 minutes**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 7 bleues et 3 rouges. Le joueur tire de l'urne successivement et sans remise deux boules ; il gagne 10 € si les deux boules sont rouges, 5 € si les deux boules sont de couleurs différentes, il ne gagne rien si les deux boules sont bleues.
On appelle X est la variable aléatoire correspondant au gain du joueur lors d'une partie.

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Quelles sont les valeurs prises par X ?

3. En utilisant l'arbre pondéré, établir la loi de probabilité de X.

EXERCICE 938 **15 minutes**

On s'intéresse aux familles de trois enfants. On prend au hasard une de ces familles et on note le sexe de chaque enfant dans l'ordre décroissant des âges. Ainsi FFG désignera : « les deux premiers enfants sont des filles et le dernier, un garçon ».

1. **a.** Ecrire toutes les issues possibles.

b. On suppose que toutes les issues sont équiprobables. Quelle est la probabilité d'obtenir l'issue FFG ?

2. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de filles dans la famille.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Recopier et compléter : $(X = 1) = \{FGG, \cdots\}$.

c. Déterminer $P(X = 1)$.

d. Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE 939 **15 minutes**

Un joueur tire au hasard une boule dans une urne contenant 1 boule verte, 2 boules bleues et 3 boules rouges.

1. Déterminer la probabilité des événements :
V : « Tirer une boule verte » ;
B : « Tirer une boule bleue » ;
R : « Tirer une boule rouge ».

2. La boule verte rapporte 5 €, une boule bleue rapporte 2 €, une boule rouge fait perdre 3 €. On nomme G le gain algébrique du joueur.

a. Quelles valeurs G peut-il prendre ?

b. Quel est l'événement $(G = 5)$? Déterminer sa probabilité.

c. Donner la loi de probabilité de G.

4.6 Echantillonnage

4.6.1 Point de cours

Définitions : Un **échantillon** de taille n est la liste des résultats obtenus lorsqu'on répète n fois une même expérience aléatoire de façon indépendante.
Sur plusieurs échantillons de même taille, la fréquence d'un caractère observé varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce qu'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

Propriété : Lorsque n est grand, la fréquence observée f d'individus présentant le caractère étudié dans un échantillon de taille n est telle que $\left|f-p\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ dans une grande majorité des cas.

4.6.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 940 **5 minutes**
Pour chacune des situations suivantes, donner deux exemples d'échantillons de taille 10 :

1. Une urne contient des boules bleues, roses et blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule et on note sa couleur.
2. On lance deux pièces de 1 € et on note les côtés obtenus.
3. On lance un dé à 6 faces, on gagne lorsque le 6 apparaît sur la face supérieure.

EXERCICE 941 : PROGRAMMATION **15 minutes**
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces. Le programme en python suivant permet de simuler cette expérience.

```
from random import*
def de() :
    resultat=randint(1,6)
    return resultat
```

1. Entrer ce programme dans un éditeur python et l'exécuter 10 fois.
2. Expliquer les lignes 1 et 3.
3. Modifier ce programme pour qu'il prenne en argument un entier n et qu'il affiche les n résultats.

EXERCICE 942 : PROGRAMMATION **5 minutes**
Modifier le programme précédent pour simuler un « pile ou face ».

EXERCICE 943 **5 minutes**
Une urne contient des billes bleues et des billes rouges en proportions inconnues.
Le tableau ci-dessous récapitule la fréquence de billes rouges obtenues en fonction de la taille de l'échantillon prélevé dans cette urne.

n	10	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
f	$0,1$	$0,25$	$0,32$	$0,29$	$0,26$	$0,28$	$0,31$	$0,32$	$0,31$	$0,29$	$0,3$	$0,31$

1. Quel commentaire peut-on faire sur la fréquence de billes rouges dans un échantillon de taille n lorsque n devient de plus en plus grand ?

2. Estimer la proportion de billes rouges dans cette urne.

4.6.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 944 : PROGRAMMATION **15 minutes**

On considère une piste de course contenant six cases alignées. Un lièvre et une tortue font une course selon la règle suivante : on lance un dé à six faces, parfaitement équilibré. Si on obtient un « 6 », le lièvre gagne directement, sinon la tortue avance d'une case.
Pour que le lièvre gagne, il suffit donc que le « 6 » sorte avant que la tortue ait parcouru les six cases de la piste.
Pour que la tortue gagne, le « 6 » ne doit jamais sortir au cours des six premiers lancers de dé.
Le but de l'exercice est de déterminer qui, de la tortue ou du lièvre a le plus de chances de gagner.

1. Compléter la fonction suivante :

```
from random import*
def partie() :
    n = 0
    while n < ··· and randint(1,6) ! = ··· :
        n = ···
    if n ······ :
        return 1
    else :
        return 0
```

2. Que permet de compter la variable n ? Qui gagne lorsque la fonction retourne 0 ?

3. Créer une fonction qui simule 1 000 parties et retourne le nombre de fois où la tortue gagne.

4. On cherche la probabilité qu'a la tortue de gagner. Combien de parties faut-il simuler pour obtenir une estimation de cette probabilité à $0,01$ près ?

EXERCICE 945 : PROGRAMMATION **15 minutes**

On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne le 6 sur sa face supérieure.

1. Ecrire, en python, une fonction qui simule cette expérience et donne en sortie le nombre de lancers de dé nécessaires pour obtenir 6.

2. Ecrire, en python, une fonction qui appelle la précédente pour simuler 1 000 fois l'expérience et renvoie la fréquence moyenne du nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6.
3. Exécuter plusieurs fois la fonction précédente. Que remarque-t-on ?

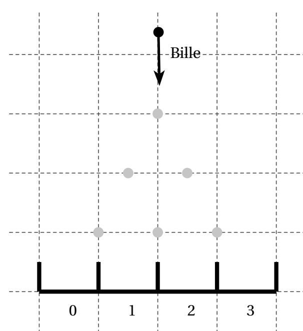
EXERCICE 946 : PROGRAMMATION **15 minutes**

On lance 50 fois une pièce de 1 € bien équilibrée. On note le nombre de « pile » obtenu.

1. Ecrire, en python, une fonction qui simule cette expérience et donne en sortie le nombre de « pile » obtenus..
2. Ecrire, en python, une fonction qui appelle la précédente pour simuler n fois l'expérience et renvoie la fréquence moyenne des nombres de « pile » obtenus, n sera entré en argument lors de l'appel de la fonction.
3. Ecrire, en python, une fonction qui simule 100 répétitions de la fonction précédente et renvoie le nombre d'échantillons dont l'écart entre p et f est strictement supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 947 : PROGRAMMATION **30 minutes**

Sur la planche ci-contre, on a planté de manière régulière trois rangées de clous en quinconce. On lâche une bille au sommet et celle-ci rebondit de clou en clou jusqu'à l'une des cases numérotées du bas. A chaque clou, la bille a la même probabilité de rebondir à gauche ou à droite.



Partie A : Taille de l'échantillon et fluctuation

1. On appelle p_0, p_1, p_2 et p_3 les probabilités qu'une bille tombe respectivement dans les cases 0, 1, 2 et 3.
   Calculer ces 4 probabilités à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. La fonction ci-contre simule la chute d'une bille en renvoyant le numéro de la case dans laquelle elle tombe.
   Compléter cette fonction, puis vérifier son fonctionnement en exécutant plusieurs fois l'instruction « RésultatChute() ».

```
from random import *
def ResultatChute() :
    somme = 0
    for i in range(··· ) :
        rebond = randint(0,1)
        somme = somme + ···
    return somme
```

3. La fonction ci-contre simule la chute de « n » billes et renvoie la proportion des billes tombées dans la case « numéro ».
Compléter cette fonction, puis vérifier son fonctionnement en exécutant par exemple les instructions : « Echantillon(100,0) », puis « Echantillon(100,1) », « Echantillon(100,2) », ⋯

```
def Echantillon(n, numero) :
    somme = 0
    for i in range(n) :
        if ResultatChute() == ⋯
            somme = somme + ⋯
    proportion = somme / ⋯
    return proportion
```

4. **a.** En s'aidant de la fonction « Echantillon » précédente, simuler la chute de 1000 billes en déterminant la proportion des billes tombées dans la case 0.
b. Même chose pour les cases 1, 2 et 3.
c. Les résultats obtenus sont-ils cohérents avec les probabilités trouvées à la question **1.**?

5. Le script ci-contre affiche un graphique grâce à la bibliothèque « pylab » :
L'instruction « plot(x, y, '+', color='blue') » affiche le point de coordonnées (x, y) en traçant un '+' de couleur bleue.
L'instruction « axis([xmin, xmax, ymin, ymax]) » configure les axes.
L'instruction « show() » affiche le graphique.

```
from pylab import plot,axis,show
for i in range(100) :
    f = Echantillon(1000, 1)
    plot(i, f, '+', color='blue')
axis([0, 100 ,0 ,1])
show()
```

a. Combien d'échantillons la fonction va-t-elle simuler?
b. Quel est la taille de ces échantillons?
c. Décrire par une phrase précise ce que contient la variable f.
d. Quelle probabilité la variable f permet-elle d'estimer?

6. Modifier ce script pour qu'il affiche sur un même graphique en bleu 100 échantillons de taille 100 et en rouge 100 échantillons de taille 1000. Est-ce que la taille des échantillons a une influence indiscutable sur l'amplitude de la fluctuation?

Partie B : Taille de l'échantillon et estimation de l'erreur

1. On s'intéresse maintenant à la fréquence des billes tombées dans la case 1. En s'appuyant sur le travail ci-dessus, écrire une fonction « ProportionBonsEchantillons(n) » qui simule 100 échantillons de n billes, et pour chaque échantillon, calcule l'écart entre cette fréquence et p_1 puis renvoie la proportion d'échantillons pour lesquels cet écart est inférieur à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On s'aidera des fonctions « sqrt « (racine carrée) et « abs » (valeur absolue) du module « math ».

2. Tester cette fonction avec plusieurs valeurs de n.
Quel est environ le pourcentage des échantillons pour lesquels cet écart est inférieur à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$?

4.7 Exercices de synthèse

EXERCICE 948 **20 minutes**

Le gérant d'un restaurant développe une nouvelle formule de restauration rapide le midi. Il propose un menu comprenant un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux plats (viande ou poisson) et trois desserts (pâtisserie, laitage ou fruit).

Il teste sa formule pendant un mois et étudie toutes les commandes pour mieux connaître les souhaits de sa clientèle.

- Parmi les 600 commandes faites au cours de ce mois, 72 % comprenaient un plat de viande.
- 45 % des clients ont pris une pâtisserie et, parmi eux, 44 avaient choisi le plat de poisson.
- Parmi les 138 commandes comprenant un fruit comme dessert, 73 comprenaient le plat de poisson.

1. Compléter le tableau suivant qui récapitule les résultats de l'enquête.

	Pâtisserie	Laitage	Fruit	Total
Viande				
Poisson	44		73	
Total				600

On choisit une commande au hasard parmi celles faites pendant le mois de l'enquête.
On note :

- A : l'événement « La commande comprend du poisson »
- B : l'événement « La commande comprend une pâtisserie »

2. Calculer la probabilité de l'événement A.
3. Calculer la probabilité de l'événement B.
4. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la commande comprenne à la fois du poisson et une pâtisserie.
5. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la commande comprenne de la viande sachant qu'il comprend une pâtisserie.

EXERCICE 949 **30 minutes**

Un directeur de supermarché décide d'étudier le temps d'attente aux caisses de son établissement pour ajuster le nombre de caisses ouvertes à la demande. Pour cela, il interroge le lundi et le vendredi cent clients et note les temps d'attente approximatifs en minutes entières.

Partie A : Etude de l'échantillon du lundi

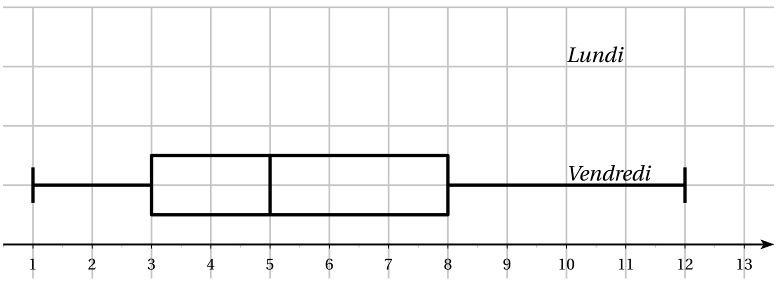
Le lundi, il obtient la répartition suivante :

Temps d'attente aux caisses (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de clients	14	13	23	9	14	8	12	4	1	2

1. Calculer le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché pour l'échantillon étudié.

2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série statistique des temps d'attente.

3. Construire le diagramme en boîte de cette série sur le graphique suivant :

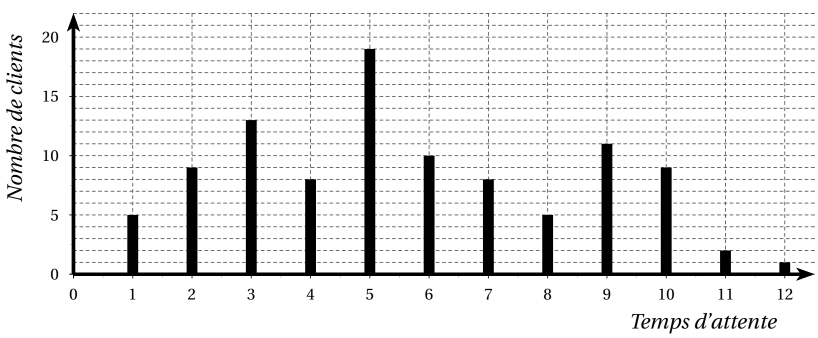


4. a. Son adjoint souhaite ouvrir une caisse supplémentaire si plus de 15% des clients attendent 7 minutes ou plus en caisse.
Doit-il ouvrir une nouvelle caisse le lundi ?

b. Le directeur décide d'ouvrir une caisse supplémentaire si le temps moyen d'attente aux caisses dépasse 5 minutes.
Doit-il ouvrir une nouvelle caisse ?

Partie B : Etude de l'échantillon du vendredi

Le directeur décide de comparer les temps d'attente en début et en fin de semaine. Il a donc relevé le vendredi les temps d'attente aux caisses d'un échantillon de cent clients et obtient les résultats résumés dans le diagramme ci-dessous.



1. Par lecture du diagramme, compléter le tableau suivant :

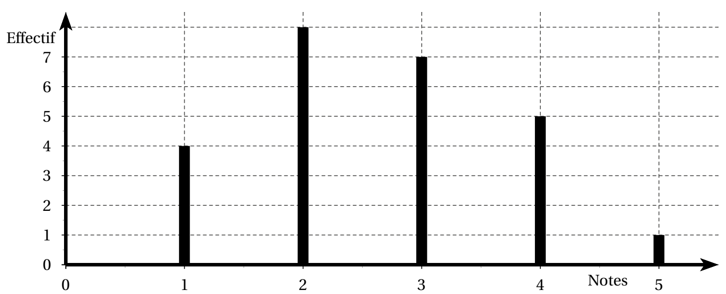
Temps d'attente aux caisses (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de clients	5	9		8		10				9	2	1

2. Calculer le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché le vendredi pour l'échantillon étudié (arrondir le résultat au dixième).

Partie C : Comparaison des deux échantillons
On a construit sur le graphique de la partie A le diagramme en boîte de la série des temps d'attente aux caisses le vendredi. Dans un questionnaire, les clients qualifient d'acceptable un temps d'attente est inférieur ou égal à 6 minutes.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Affirmation 1 : Le vendredi, la moitié des clients attendent cinq minutes ou plus aux caisses.
Affirmation 2 : Le vendredi, un quart des clients attend au plus trois minutes aux caisses.
Affirmation 3 : Il y a autant de clients qui trouvent le temps d'attente acceptable aussi bien le lundi que le vendredi.

EXERCICE 950 **15 minutes**

1. Le prix d'un objet est passé de 30 € à 36 €. Calculer le taux d'évolution en pourcentage.
2. Par combien faut-il multiplier une quantité positive pour que celle-ci diminue de 15% ?
3. Après une augmentation du prix de 10%, un article est vendu 44 €. Quel était le prix de départ ?
4. Une table coûte 289 €. Quel est son prix après une remise de 20% ?
5. Un canapé coûte 405,30 € après une remise de 30%. Quel était son prix avant la remise ?
6. Pour un coefficient multiplicateur de 1,33, quel est le taux d'évolution en pourcentage ?
7. Après une hausse de 120%, un produit coûte 1 200 €. Quel était son prix initial ?
8. Un prix est multiplié par 0,84. Quel est le taux d'évolution de ce prix ?
9. Un prix augmente de 20% puis baisse de 30%. Quelle est l'évolution globale de ce prix ?
10. Voici la répartition des notes sur 5 d'une classe :



   a. Quel est l'effectif total ?
   b. Quel est le pourcentage de la classe qui a eu 4 sur 5 ?
   c. Quel est le pourcentage d'élèves de la classe qui ont eu la moyenne ?

EXERCICE 951 **10 minutes**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

1. Une diminution de 50% est compensée par une augmentation de :

a. 50% **b.** 100% **c.** 150% **d.** 200%

2. On considère une augmentation de 5%, deux années consécutives. Le coefficient multiplicateur est :

a. $1,05$ **b.** $1,10$ **c.** $1,1025$ **d.** $2,10$

3. Le prix d'un pantalon est passé de 40 € à 30 € entre juin 2019 et juillet 2019. Sachant que l'indice du prix de ce pantalon était 80 en juin 2019, son indice en juillet 2019 est :

a. 70 **b.** 75 **c.** 90 **d.** 60

4. Selon une enquête de l'INSEE sur la production de déchets non dangereux dans le commerce en 2016, 75% des déchets non dangereux du commerce ont été triés en 2016 et 3% des déchets triés du commerce en 2016 ont été mis en décharge.
En 2016, le pourcentage de déchets du commerce qui ont été triés et mis en décharge est :

a. $2,25$% **b.** 78% **c.** 39% **d.** 25%

5. Lors de deux évolutions $c = (1+t)^2$, alors t égal :

a. $\sqrt{c-1}$ **b.** $\sqrt{c}-1$ **c.** $\sqrt{1-c}$ **d.** $1-\sqrt{c}$

EXERCICE 952 **15 minutes**

On s'intéresse aux immatriculations de voitures particulières neuves durant l'année 2018 en fonction de leur provenance géographique et de leur type de motorisation. Les résultats sont partiellement reportés dans le tableau donné ci-dessous (source : *Service de la Donnée et des Etudes Statistiques*) où l'unité est la centaine de voitures arrondie à l'unité.

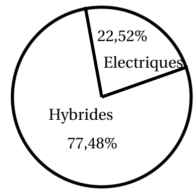
	Diesel	Essence	Hybride ou électrique	Total
Ile-de-France	1 588	1 855	335	3 778
Autres régions de France métropolitaine			1 037	17 606
Total			1 372	21 384

Ainsi le total global de 21 384 correspond à environ 2 138 400 nouvelles immatriculations en France métropolitaine.

1. L'INSEE précise qu'en 2018 on comptait 38,56% de voitures diesel parmi les immatriculations de voitures neuves.
A l'aide de cette information, compléter le tableau précédent. On conservera comme unité la centaine de voitures et les résultats seront arrondis à l'unité.

2. Un journaliste spécialisé affirme qu'en 2018 un peu moins d'un quart des voitures particulières neuves hybrides ou électriques ont été immatriculées en Ile-de-France. Cette déclaration vous semble-t-elle correcte ? Justifier votre réponse.

3. Parmi les 137 200 voitures hybrides ou électriques immatriculées en 2018, on comptait environ 30 900 purement électriques. On illustre cette situation par le diagramme circulaire ci-contre. Quelle est, au degré près, la valeur de l'angle au centre associé à la zone concernant les voitures électriques ?



4. Ces chiffres de 2018 permettent aux spécialistes de constater une augmentation de 2,83% du nombre d'immatriculations de voitures neuves en France métropolitaine par rapport à 2017. Quel était, à la centaine près, le nombre de ces immatriculations en 2017 ?

5. Les chiffres de mars 2019 montrent un pourcentage de 6,5% d'immatriculations de voitures neuves hybrides ou électriques. On peut observer que 34% d'entre elles concernent des voitures purement électriques. Quel pourcentage du nombre total des immatriculations de voitures neuves représentent les voitures purement électriques ?

EXERCICE 953 **10 minutes**

Un même devoir a été donné dans les trois classes de première du lycée notées P_1, P_2 et P_3. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20
P_1	0	1	0	2	1	2	3	2	5	5	7	4	3	2	0	0	1	0	1	1
P_2	1	1	3	4	3	2	1	1	1	0	0	0	2	3	4	5	3	1	1	0
P_3	2	0	0	2	1	3	0	2	1	4	2	3	1	0	3	0	0	5	0	2

1. Calculer la moyenne et l'écart type pour chacune de ces trois variables aléatoires.
2. Quelle est la classe la plus homogène ?
3. Quelle est la classe la plus hétérogène ?
4. Quelle est la classe ayant la meilleure moyenne ?

EXERCICE 954 **15 minutes**

1. Un menu proposé par un restaurant comporte une entrée, un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux entrées, trois plats et deux desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Les clients peuvent, s'ils le désirent, prendre seulement un plat et un dessert notés P_1, P_2, P_3, D_1 et D_2.
3. On a constaté que :

- 30 % des clients ont choisi P_2,
- 40 % des clients ont choisi D_2 et parmi eux, 25 % ont choisi P_2.

Compléter le tableau suivant :

	D_1	D_2	Total
P_1	14		20
P_2			
P_3			
Total			100

4. On considère au hasard un client. Déterminer les probabilités des événements suivants :
A : le client a choisi P_2 ;
B : le client a choisi D_1 ;
C : le client a choisi P_3 et D_1 ;
D : le client a choisi P_1 ou P_2 ;
E : le client a choisi P_3 ou D_2.

5. Définir par une phrase les événements : $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ et $\overline{A \cup B}$ puis déterminer la probabilité de chacun de ces événements.

6. On considère au hasard un client qui a choisi P_2. Quelle est la probabilité de l'événement F : le client a choisi D_2 ?

EXERCICE 955 **15 minutes**

On dispose de deux dés cubiques non truqués et homogènes :

- l'un est bleu et a ses faces numérotées de 1 à 6,
- l'autre est rouge et a trois faces numérotées chacune 1, deux faces numérotées chacune 2 et une face numérotée 3.

1. On lance le dé rouge seulement :

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une face numérotée 2 ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

2. On lance les deux dés et on forme un nombre de deux chiffres de la manière suivante :
le chiffre inscrit sur la face supérieure du dé bleu donne le chiffre des dizaines et le chiffre inscrit sur la face supérieure du dé rouge donne le chiffre des unités.

a. Faire un tableau à double entrée donnant tous les tirages possibles.
b. Calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir le nombre 11 ».
c. Calculer la probabilité de l'événement B : « Obtenir un nombre dont le chiffre des dizaines est 3 ».
d. Calculer la probabilité de l'événement C : « Obtenir un nombre pair ».
e. Calculer la probabilité de l'événement D : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 42 ».

EXERCICE 956 **15 minutes**

Un sac contient 5 jetons :

- Un jeton bleu valant 3 points,

- deux jetons rouges valant chacun 2 points,
- deux jetons verts valant chacun 1 point.

1. On tire un jeton au hasard, quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge ?

2. On tire un jeton au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux points ?

3. On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier jeton dans le sac.

- **a.** Faire un tableau indiquant tous les tirages possibles et faisant apparaître les couleurs obtenues et la somme des points obtenue.
- **b.** Calculer la probabilité de l'événement A : « Tirer deux jetons de couleurs différentes ».
- **c.** Calculer la probabilité de l'événement B : « Obtenir 4 points ».
- **d.** Calculer la probabilité de l'événement C : « Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes ».
- **e.** Calculer la probabilité de l'événement D : « Obtenir au moins 4 points ».

EXERCICE 957 **15 minutes**

Un hôtel dispose de 40 chambres soit avec bains soit avec douche. Toutes les chambres ne disposent pas de la télévision. La moitié des chambres avec bains ont la télévision. Les deux tiers des chambres sans télévision disposent d'une douche. Il y a un quart des chambres de cet hôtel qui disposent d'une douche mais pas d'une télévision.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

	Avec télévision T	Sans télévision $\overline{T}$	Totaux
Avec bain B			
Avec douche D			
Totaux			40

2. Une chambre est choisie au hasard parmi les 40 chambres de l'hôtel. *Toutes les chambres ont la même probabilité d'être choisies.*

- **a.** On note D l'événement : « la chambre possède une douche ».
  Montrer que $P(D) = 0,75$.
- **b.** Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
  - T : « la chambre possède la télévision » ;
  - $D \cap T$: « la chambre possède une douche et la télévision ».

3. Exprimer par une phrase claire chacun des événements suivants et en déterminer la probabilité : $\overline{D}$; $\overline{D} \cup T$; $D \cup \overline{T}$; $\overline{D} \cap \overline{T}$.

EXERCICE 958 **15 minutes**

Les 225 élèves d'un lycée hôtelier sont répartis sur trois types de formation : le CAP, le Bac professionnel et le Bac technologique :

- 48 % des élèves sont des filles ;

- 54 élèves sont en CAP et 108 en Bac technologique ;
- la moitié des élèves de CAP sont des garçons ;
- il y a autant de garçons en Bac professionnel qu'en CAP.

1. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de filles	Nombre de garçons	Totaux
CAP			
Bac professionnel			
Bac technologique			
Totaux			225

2. **a.** Dans le lycée, quel est le pourcentage d'élèves inscrits en CAP ?
b. Parmi les filles, quel est le pourcentage d'élèves inscrits en CAP ?

3. *Dans la suite, les calculs seront arrondis à* 10^{-2} *près si nécessaire*
On choisit au hasard un élève dans ce lycée. Tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis.

a. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : "l'élève choisi est une fille"
- B : "l'élève choisi est en Bac technologique"

b. Traduire par une phrase l'événement $\overline{B}$, puis calculer sa probabilité.
c. Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.
d. Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$, puis calculer sa probabilité.

4. On choisit au hasard un élève parmi ceux qui sont en Bac technologique.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? On la notera : $P_B(A)$.

EXERCICE 959 **15 minutes**

Un restaurateur a fait une étude statistique sur 8 000 clients ayant séjourné dans son restaurant et ayant choisi l'une des trois formules proposées :

- Formule F_1 : buffet et dessert
- Formule F_2 : buffet et plat
- Formule F_3 : plat et dessert

Il constate que :

- 4 500 clients sont des femmes,
- 43 % des femmes ont choisi F_1,
- 1 575 femmes ont choisi F_2,
- 3 clients sur 10 ont choisi F_3,
- 32 % des clients ont choisi F_1.

1. Compléter le tableau :

	F_1	F_2	F_3	Total
Femmes				
Hommes				
Total				8 000

2. On sélectionne un client au hasard. Déterminer les probabilités des événements suivants (arrondies à 10^{-2} près).
A : le client a choisi F_2,
B : le client est une femme,
C : le client est un homme qui a choisi F_1.

3. Définir par une phrase, puis déterminer les probabilités des événements : $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A}$.

4. On sélectionne une femme au hasard.
Déterminer la probabilité de l'événement D : la cliente a choisi une formule comprenant un plat.

EXERCICE 960 **10 minutes**

Pour une fête, les élèves remplissent avec des bergamotes et des craquelines, 295 boîtes de bergamotes, 157 boîtes de craquelines et 221 boîtes de mélanges bergamotes-craquelines.
Ils décident de prendre une boîte au hasard pour la déguster avant de commencer la vente. Ces boîtes sont indiscernables.
Les résultats seront arrondis au centième

1. Quelle est la probabilité pour qu'une boîte prise au hasard contienne le mélange bergamotes-craquelines ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'une boîte prise au hasard contienne : des craquelines uniquement ou des bergamotes uniquement ?

EXERCICE 961 **25 minutes**

1. En 2002, une enquête sur les habitudes alimentaires a été effectuée auprès de 2 000 personnes, réparties selon quatre classes d'âge (les 12-17 ans, les 18-24 ans, les 25-44 ans, les 45-64 ans).
Compléter le tableau, sans justifier, sachant que :

- Les 12-17 ans représentent $\dfrac{1}{5}$ des personnes interrogées.
- Les 25-44 ans représentent 25 % des personnes interrogées.
- 30 % d'entre elles mangent du poisson au moins deux fois par semaine.
- Parmi les 700 personnes qui ont entre 45 et 64 ans, 392 mangent du poisson au plus une fois par semaine.
- Parmi les 622 personnes qui mangent du poisson au moins deux fois par semaine, 80 ont entre 12 et 17 ans.

(Source : Inpes, baromètre santé nutrition 2002*)*

	Mange du poisson au moins deux fois par semaine	Mange du poisson au plus une fois par semaine	Total
12-17 ans	80		400
18-24 ans			
25-44 ans			
45-64 ans			
TOTAL	622		

2. On interroge au hasard une personne parmi les 2 000 ayant participé à l'enquête. Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée. On considère les événements suivants :

– A : « la personne interrogée mange du poisson au moins deux fois par semaine »

– B : « la personne interrogée a entre 12 et 17 ans »

a. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$. Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte.

b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$; calculer sa probabilité.

c. Définir par une phrase l'événement $A \cup B$; calculer sa probabilité.

3. On interroge au hasard une personne parmi les 12-17 ans. Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée. Déterminer la probabilité p_1 que la personne interrogée mange du poisson au moins deux fois par semaine.

4. On interroge au hasard une personne parmi celles qui mangent du poisson au moins deux fois par semaine. Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée. Déterminer la probabilité p_2 que la personne interrogée ait entre 45 et 64 ans (arrondir à 10^{-2} près).

EXERCICE 962 **25 minutes**

L'indice de masse corporelle (IMC) permet de définir trois catégories distinctes de personnes :

- les personnes n'ayant pas de surpoids,
- les personnes présentant un surpoids,
- les personnes souffrant d'obésité.

Un grand groupe hôtelier a organisé une enquête sur l'obésité auprès de ses 12 000 employés et stagiaires de plus de 15 ans. Une partie de cette enquête portant sur l'obésité et l'hypertension laissait apparaître les résultats suivants :

- 12,4 % des 12 000 personnes interrogées souffrent d'obésité dont 486 ont aussi de l'hypertension artérielle.
- Il y a 3 504 personnes qui présentent un problème de surpoids dont 2 644 n'ont pas d'hypertension.

- 84 % des personnes interrogées ne souffrent pas d'hypertension artérielle.

1. Compléter le tableau suivant :

	Personnes n'ayant pas de surpoids	Personnes présentant un surpoids	Personnes souffrant d'obésité	Total
Personnes souffrant d'hypertension artérielle				1 920
Personnes n'ayant pas d'hypertension artérielle				
Total			1 488	12 000

2. On interroge de manière aléatoire une personne parmi les 12 000 employés et stagiaires. Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée. On considère les événements suivants :

A : « la personne interrogée souffre d'hypertension artérielle »

B : « la personne interrogée souffre d'obésité »

Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte.

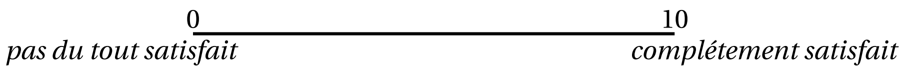
a. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.
b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.
c. Définir par une phrase l'événement $\overline{B}$ puis calculer sa probabilité.

3. Dans la suite de l'exercice les résultats seront arrondis au centième.

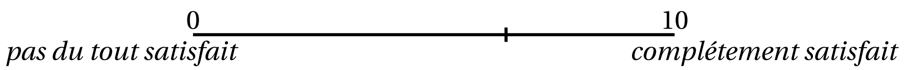
a. On interroge au hasard une personne dans la catégorie des personnes n'ayant pas de surpoids. Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée.
Déterminer la probabilité p_1 qu'elle souffre d'hypertension.
b. On interroge au hasard une personne parmi celles qui souffrent d'obésité. Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée.
Déterminer la probabilité p_2 qu'elle souffre d'hypertension.
c. Calculer $\dfrac{p_2}{p_1}$ et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 963 **25 minutes**

Dans un hôtel, pendant les mois de juillet et août derniers, on a demandé à tous les clients de remplir un document visant à mesurer leur satisfaction à l'issue de leur séjour. En particulier, on leur a demandé d'évaluer l'hôtel par une note donnée à l'aide d'une marque sur un segment de 10 cm :



En mesurant, en cm, le segment entre le 0 et la marque faite par le client, on obtient une valeur de satisfaction.
Exemple :



Le segment entre le 0 et la marque mesure 6,5 cm, la valeur de satisfaction est 6,5.
Pour les 400 fiches dépouillées, les mesures sont regroupées dans le tableau suivant :

Valeur de satisfaction	Nombre de fiches
moins de 2	10
de 2 à moins de 4	34
de 4 à moins de 6	67
de 6 à moins de 7,5	81
de 7,5 à moins de 9	185
plus de 9	23

Le directeur de l'hôtel considère qu'un client est satisfait s'il a attribué une valeur de satisfaction supérieure ou égale à 7,5.
On donnera la valeur exacte des résultats sous forme décimale.

1. On tire une fiche au hasard parmi les 400 fiches dépouillées. On considère que tous les tirages sont équiprobables. A l'aide du tableau ci-dessus, calculer la probabilité que la fiche tirée ait été remplie par un client satisfait.

2. Les clients sont répartis en 3 catégories selon leur nationalité. Sachant que, parmi les 400 fiches dépouillées :

- 75 % ont été remplies par des clients français, et 55 % des clients français sont satisfaits ;
- $\frac{1}{5}$ ont été remplies par des clients européens non français ;
- les autres ont été remplies par des clients d'autres nationalités non européennes, et 30 % d'entre eux ne sont pas satisfaits.

Compléter le tableau suivant :

Clients	Français	Européens non français	Autres nationalités non européennes	Total
satisfaits				208
insatisfaits				
Total				400

3. On considère une fiche prise au hasard parmi les 400 fiches dépouillées. A l'aide de ce tableau, calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « Le client qui a rempli la fiche n'est pas européen. »
- B : « Le client qui a rempli la fiche est insatisfait. »

4. Définir par une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leur probabilité.

5. La fiche prélevée au hasard est celle d'un Européen non français. Quelle est la probabilité qu'il soit insatisfait ?

EXERCICE 964 **20 minutes**

Un groupement d'intérêt économique pour le tourisme a invité 120 personnes, toutes directrices d'agences de voyages, pour tester deux nouveaux gîtes touristiques A et B.
A l'issue de ce test, les résultats sont les suivants :

- 35 % des personnes sont satisfaites des deux gîtes.
- Les $\dfrac{3}{5}$ des personnes sont satisfaites du gîte B.
- 36 personnes n'ont apprécié que le gîte A.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de personnes	Satisfaites du gîte A	Non satisfaites du gîte A	Total
Satisfaites du gîte B			
Non satisfaites du gîte B			
Total			120

2. *Dans cette question les résultats seront donnés sous forme décimale*
On interroge une personne au hasard. On suppose que chaque personne a la même probabilité d'être interrogée.

a. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « La personne est satisfaite du gîte A »

B : « La personne est satisfaite du gîte B »

C : « La personne est satisfaite des deux gîtes »

D : « La personne est satisfaite d'un seul gîte ».

b. Définir par une phrase l'événement $A \cup B$. Calculer sa probabilité.

3. On interroge une personne satisfaite du gîte B. Quelle est la probabilité qu'elle soit satisfaite du gîte A ? *Arrondir le résultat à* 10^{-2}.

EXERCICE 965 **15 minutes**

Cette année, 800 élèves d'un lycée hôtelier partent en stage : soit en cuisine soit en service.
Les élèves peuvent choisir entre 3 destinations possibles : rester dans la ville du lycée, partir dans une autre ville de la région ou quitter la région.

- 60 % des élèves font leur stage en cuisine.
- 20 % des élèves quittent la région et parmi eux, 40 % sont en service.
- 30 % des élèves choisissent une autre ville de la région et 60 % d'entre eux sont en cuisine.

1. Compléter le tableau suivant :

	Dans la ville	Dans une autre ville de la région	Dans une autre région	Total
En cuisine		144		
En service				
Total				800

Dans les questions suivantes, on donnera les résultats sous forme décimale.

2. On choisit un élève au hasard parmi les 800 élèves du lycée.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « L'élève choisi est en stage en service ».
B : « L'élève choisi est dans une autre région ».

3. a. Définir par une phrase les événements $A \cap B$; $A \cup B$ et $\overline{A}$.

b. Calculer la probabilité des événements définis ci-dessus.

4. On choisit un élève en stage en service au hasard. Calculer la probabilité qu'il soit parti dans une autre région.

EXERCICE 966 **15 minutes**

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{10}$.

On appelle G l'événement « la chaudière est sous garantie » et D l'événement « la chaudière est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité des événement suivants :
a. « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
b. « la chaudière est défectueuse ».

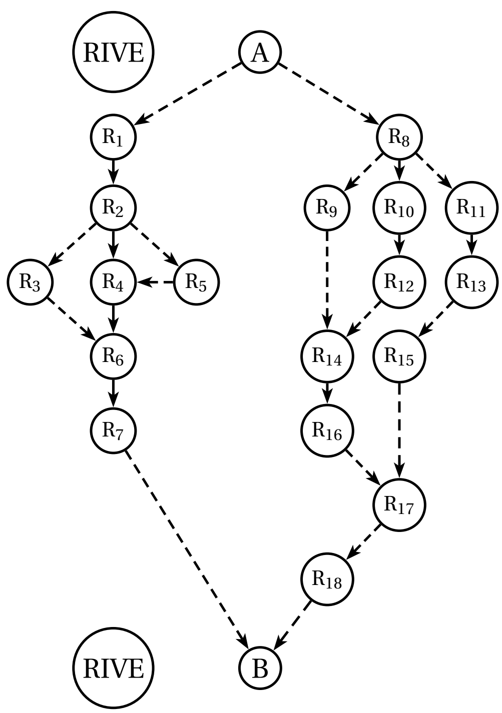
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\dfrac{1}{41}$.

3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.
On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

EXERCICE 967 **15 minutes**

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.
Le torrent se présente de la manière suivante (les disques R_1, R_2, ..., R_{17}, R_{18}, représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches. On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.
Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.
Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

1. Déterminer les six parcours possibles.
2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.
   a. Quelle est la probabilité p_1 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 » ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} » ?
3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer le temps moyen de la variable aléatoire X.

EXERCICE 968 **10 minutes**

Une urne contient quatre boules blanches et cinq boules noires. Ces boules étant indiscernables au toucher, on conviendra que tous les tirages possibles d'une boule sont équiprobables.

1. On tire simultanément deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire une boule et on la remet dans l'urne, puis on effectue un second tirage d'une boule.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir d'abord une noire, puis une blanche ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement une boule de chaque couleur ?
3. On tire une boule et on note sa couleur. Si elle est noire on la remet dans l'urne, sinon on ne la remet pas. Dans les deux cas, on effectue un second tirage d'une boule.
   Quelle est la probabilité de tirer une boule de chaque couleur ?

EXERCICE 969 **15 minutes**

Les questions 1. *et* 2. *peuvent être traitées de façon indépendante. On prendra* $\pi \approx 3,14$.
Des parachutistes débutants sautant d'un avion atterrissent tous sur un terrain de un hectare (c'est-à-dire 10 000 m^2), constitué de la façon suivante :

- une cible circulaire de 60 m de diamètre ;
- un champ de luzerne, rectangulaire, de 80 m de long et 50 m de large ;
- une mare d'une superficie de 800 m^2 ;
- le reste étant en friche.

On assimilera un parachutiste à un point matériel et on supposera que la probabilité qu'un parachutiste débutant tombe sur une partie du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « Le parachutiste tombe sur la cible ».

B : « Le parachutiste tombe dans la mare ».

C : « Le parachutiste tombe dans la luzerne ».

D : « Le parachutiste tombe dans la friche ».

2. On admet que la probabilité pour qu'un parachutiste tombe sur la cible est $0,28$.
Trois parachutistes sautent l'un après l'autre de l'avion. Déterminer les probabilités des événements suivants :

E : « L'un d'entre eux exactement arrive sur la cible ».

F : « L'un d'entre eux au moins arrive sur la cible ».

EXERCICE 970 **15 minutes**

On dispose de deux dés parfaits (à 6 faces). L'épreuve consiste à lancer simultanément ces deux dés.
On appelle score la somme des points qui figurent sur les deux faces supérieures.
Exemple : si 1 et 6 apparaissent, le score est 7.

1. Vérifier que la probabilité d'obtenir un score égal à 8 est $p = \dfrac{5}{36}$.

2. L'expérience consiste à présent à répéter 3 fois l'épreuve et à noter le nombre de fois où le score 8 a été obtenu.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois où le score 8 est obtenu.

a. Etablir un arbre de probabilité illustrant cette situation.

b. En déduire la loi de probabilité de X.
On exprimera les résultats suivants à 10^{-3} *près.*

c. Déterminer par le calcul la probabilité d'obtenir 3 fois le score 8.

d. Déterminer par le calcul la probabilité d'obtenir au moins 2 fois le score 8.

EXERCICE 971 **15 minutes**

Une entreprise agro-alimentaire utilise une machine pour conditionner des framboises en barquettes. La masse théorique d'une barquette est 200 g.
Afin de vérifier l'étalonnage de la machine, on prélève un échantillon de 500 barquettes que l'on pèse. On obtient les résultats suivants :

Masse (g)	[190 ; 195]	[195 ; 200]	[200 ; 205]	[205 ; 210]
Nombre de barquettes	75	125	200	100

1. Calculer la masse moyenne et l'écart type de cet échantillon de barquettes. L'écart type sera donné à $0,1$ près.

2. Quel est, dans cet échantillon, la proportion de barquettes ayant une masse supérieure ou égale à 200 g?
3. L'épreuve consiste à prélever au hasard une barquette dans la production. On admet que la probabilité pour que cette barquette ait une masse supérieure ou égale à 200 g est $p = 0,6$. On répète 3 fois cette épreuve, avec remise et de manière indépendante (l'issue du premier tirage n'influe pas l'issue du second ni du troisième). On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de barquettes parmi ces 3 dont la masse est supérieure ou égale à 200 g.
   a. Etablir un arbre illustrant la situation.

   b. Calculer la probabilité pour que les 3 barquettes aient une masse supérieure ou égale à 200 g.
   c. Calculer la probabilité pour qu'au moins une barquette ait une masse supérieure ou égale à 200 g.

EXERCICE 972 **15 minutes**

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Le coffre de jouets d'un enfant contient :
– 7 balles : 2 rouges, 3 bleues et 2 vertes;
– 18 cubes : 7 rouges, 10 bleus et 1 jaune;
– 5 voitures : 1 rouge, 1 bleue, 2 vertes et 1 jaune.

1. Dans cette question, l'enfant tire au hasard un objet du coffre.
   a. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   A : « l'enfant a tiré une balle ».
   B : « l'enfant a tiré un objet rouge ».
   b. Déterminer la probabilité pour que l'enfant ait tiré un objet bleu, sachant qu'il a tiré un cube.
2. Dans cette question, l'enfant choisit au hasard, simultanément, deux objets dans le coffre.
   a. Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
   C : « Il y a au moins un cube parmi les deux objets choisis. »
   b. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de cubes tirés du coffre. Déterminer la loi de probabilité de X, et son espérance mathématique (la valeur moyenne de X).

EXERCICE 973 **15 minutes**

On s'intéresse aux visiteurs de la « Tour Mathématiques ».
Cette tour a trois étages. Elle est desservie par un ascenseur et par un escalier.
Neuf visiteurs sur dix utilisent l'ascenseur et, parmi ceux-ci :

— la moitié va au troisième étage;

— un tiers va au deuxième étage ;

— les autres vont au premier étage.

Les autres visiteurs utilisent l'escalier, et, parmi ceux-ci :

— la moitié va au deuxième étage ;

— les autres vont au premier étage.

1. On interroge un visiteur, au hasard, à la sortie de la tour. Quelle est la probabilité pour que :

a. il soit allé au deuxième étage, en ascenseur ?
b. il soit allé au deuxième étage ?
c. il soit monté à pied, sachant qu'il est allé au deuxième étage ?
On donnera les valeurs exactes des résultats.

2. Les tarifs affichés pour la visite de la tour sont les suivants :

Ascenseur :

Premier étage .... 17 F

Deuxième étage .... 34 F

Troisième étage .... 51 F

Escalier, quel que soit l'étage .... 7 F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque visiteur, associe le prix qu'il a payé pour la visite.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 974 **5 minutes**

Une population est constituée de 100 personnes (40 hommes et 60 femmes), telles que :
50 ont les yeux bleus,
60 % des hommes ont les yeux bleus.
On tire au sort une personne. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
Calculer, sous forme de fractions, les probabilités des événements suivants :
A : « avoir choisi un homme »
B : « avoir choisi un homme aux yeux bleus »
C : « avoir choisi une femme aux yeux bleus »
D : « avoir choisi une personne aux yeux bleus, sachant que c'est une femme »
E : « avoir choisi une femme, sachant que c'est une personne ayant les yeux bleus ».

4.8 Vers la première

EXERCICE 975 **5 minutes**

Expliciter les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{5} k$
2. $S_2 = \sum_{k=8}^{15} k^2$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{12} (3k+4)$
4. $S_4 = \sum_{k=1}^{9} k^k$

EXERCICE 976 **5 minutes**

Ecrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1+3+5+7+\cdots+97+99$
2. $S_2 = 4+8+16+32+\cdots+4096$
3. $S_3 = 1-3+9-27+81-243+\cdots+59\,049$

EXERCICE 977 **15 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de cinq questions : chacune comporte trois réponses, une réponse et une seule étant exacte.

Une grande boulangerie propose 500 pains dont la répartition est donnée dans le tableau suivant :

	Nature	Sans sel	Complet	Total
Pain maison	100	40	70	210
Pain de campagne	80	30	50	160
Pain au levain	60	40	30	130
Total	240	110	150	500

1. Le pourcentage de pains maison parmi l'ensemble des pains à vendre est :

   a. 20 % **b.** 42 % **c.** 35 %

2. Le pourcentage des pains au levain parmi les pains nature est :

   a. 36 % **b.** 12 % **c.** 25 %

3. Le premier client achète au hasard l'un des pains de la boulangerie, la probabilité pour que ce soit un pain de campagne ou un pain complet est :

   a. 0,10 **b.** 0,52 **c.** 0,3

4. Un client achète au hasard un pain sans sel, la probabilité que ce soit un pain au levain est :

a. $\dfrac{13}{50}$ **b.** $\dfrac{4}{11}$ **c.** $\dfrac{11}{50}$

5. Le prix d'un pain de campagne en 2000 était p_0 euros. Le prix du même pain de campagne en 2006 est $p_6 = 1,5$ €. Sachant que le prix de ce pain de campagne a augmenté de 4 % par an de 2000 à 2006, p_0 était :

a. 1,17 € **b.** 1,09 € **c.** 1,19 €

EXERCICE 978 **20 minutes**

Un « petit épargnant » place 1 500 € le 1er août 2012. A cette époque, le taux de placement à intérêts composés est de 3 % l'an.

☞ Les intérêts générés une année entrent dans le capital et donc généreront des intérêts l'année suivante.

Les résultats seront arrondis au centième par défaut.

1. **a.** Par quel nombre doit-on multiplier 1 500 afin d'obtenir la somme que cet épargnant aurait pu récupérer un an après ?

b. Cet épargnant espérait récupérer au 1er août 2022 la somme ainsi placée avec ses intérêts.
Quelle somme A pouvait-il espérer récupérer à cette date ? Quel aurait été alors le montant des intérêts en euro ?

2. Mais le 1er août 2013, le gouvernement a décidé de baisser ce taux d'intérêts à 2,25 %.

a. Calculer la somme que cet épargnant pourra récupérer le 1er août 2014.

b. Supposons que ce taux d'intérêts composés de 2,25 % reste inchangé jusqu'au 1er août 2022, quelle somme B pourra-t-il récupérer ainsi à cette date ?

3. **a.** Quelle sera au 1er août 2022 la différence A − B en euro ?

b. Que représente en pourcentage cette différence par rapport au montant de l'intérêt espéré calculé à la question **1. c** ?

EXERCICE 979 **10 minutes**

24 concurrents participent à une épreuve et obtiennent une note entière comprise entre 0 et 20. Trois d'entre eux ont obtenu exactement la moyenne du groupe. Si tous les concurrents dans la note est inférieure à cette moyenne avaient obtenu 4 points de plus, la moyenne aurait augmenté de 3 points. Combien de concurrents ont obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne du groupe ?

EXERCICE 980 **25 minutes**

Le gérant d'un restaurant développe une nouvelle formule de restauration rapide, en ouvrant son établissement uniquement le midi. Il propose un menu comprenant un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux plats (viande ou poisson) et trois desserts (pâtisserie, laitage ou fruit).

Au cours d'un mois où il teste sa nouvelle activité, il recense toutes les commandes pour mieux connaître sa clientèle.

- Parmi les 600 repas servis au cours de ce mois, 72 % comprenaient un plat de viande.
- 45 % des clients ont pris une pâtisserie ; parmi eux, 44 avaient choisi le plat de poisson.
- Parmi les 138 repas comprenant un fruit comme dessert, 73 comprenaient du poisson.

1. Compléter le tableau suivant, qui récapitule les résultats de l'enquête.

	Pâtisserie	Laitage	Fruit	Total
Viande				
Poisson	44		73	
Total			138	600

2. On définit les événements suivants :
V : « Le client a pris de la viande. »
P : « Le client a pris une pâtisserie. »
L : « Le client a pris un laitage. »
F : « Le client a pris un fruit. »
Les probabilités seront arrondies si nécessaire à 10^{-2}.
Calculer la probabilité de chacun des événements V, $\overline{V}$, P, L et F.

3. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé de la viande. Calculer la probabilité qu'il ait pris un fruit en dessert.
☞ Cette probabilité sera notée : $p_V(F)$ (on note en indice l'événement déjà arrivé), ce qui se lit « probabilité de F sachant V réalisé ».

Dans la suite, on utilisera la notation précédente.

4. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé de la viande. Calculer la probabilité qu'il ait pris un laitage en dessert.

5. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé du poisson. Calculer la probabilité qu'il ait pris une pâtisserie en dessert.

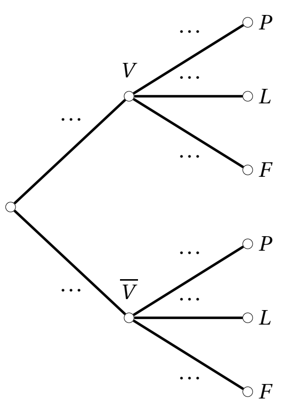
6. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé du poisson. Calculer la probabilité qu'il ait pris un laitage en dessert.

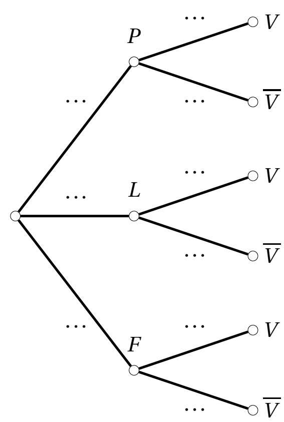
7. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé une pâtisserie. Calculer la probabilité qu'il ait pris de la viande.

8. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé un laitage. Calculer la probabilité qu'il ait pris de la viande.

9. On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont mangé un fruit. Calculer la probabilité qu'il ait pris du poisson.

10. A l'aide des résultats précédents, compléter les deux arbres :





EXERCICE 981 **20 minutes**

Le centre de thalassothérapie Neptune propose des formules de cure à la semaine. Trois choix de cures sont possibles :

– Cure 1 : détente et remise en forme,
– Cure 2 : minceur,
– Cure 3 : tonus et vitalité.

6 000 clients ont fréquenté l'établissement durant l'année 2007.
On constate que :

- 2 500 clients sont des hommes,
- 20 % des hommes ont choisi la cure 2,
- 1 200 hommes ont choisi la cure 1,
- 3 clients sur 10 ont choisi la cure 3,
- 36 % des clients ont choisi la cure 2.

1. Compléter le tableau suivant qui couvre l'année 2007.

	Cure 1	Cure 2	Cure 3	Total
Femmes	840			
Hommes				
Total				6 000

Dans toute la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} si nécessaire.

2. On prélève une fiche au hasard parmi les 6 000 fiches des clients ayant fréquenté l'établissement durant l'année 2007.
On considère que chaque fiche à la même probabilité d'être choisie.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : Le client a choisi la cure 1.

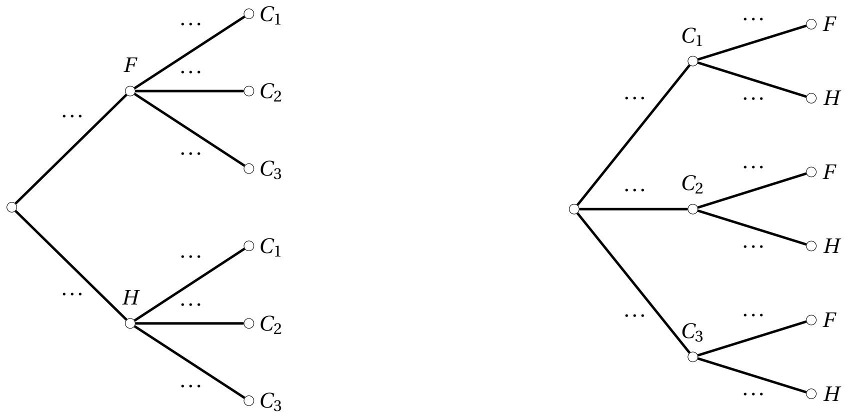
B : Le client est un homme.

C : Le client est une femme qui a choisi la cure 2

3. **a.** Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer la probabilité $P(A \cap B)$.
 b. Définir par une phrase l'événement $A \cup B$ puis calculer la probabilité $P(A \cup B)$.
 c. Définir par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer la probabilité $P\left(\overline{A}\right)$.

4. On a prélevé la fiche d'une femme. Calculer la probabilité que la cliente ait choisi la cure 3.

5. Compléter les deux arbres pondérés suivants :



EXERCICE 982 **15 minutes**

On veut ranger trois boules distinctes numérotées de 1 à 3 dans deux cases A et B. On suppose que chacune des cases peut contenir de zéro à trois boules. La place des boules dans les cases est considérée comme sans importance.

1. Montrer qu'il y a 2^3 rangements possibles.

2. On suppose que tous les rangements ont la même probabilité de se réaliser. Calculer les probabilités des événements suivants :

E : « toutes les boules sont dans la case A »

F : « il n'y a pas de boule dans la case A »

G : « A contient la boule portant le numéro 2 ».

3. Soit X la variable aléatoire qui, à tout rangement, associe le nombre de boules contenues dans la case A.

 a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
 b. Calculer l'espérance mathématique de X.

N. B. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE 983 **15 minutes**

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On désigne par P_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i lors d'un lancer du dé.

Ces probabilités vérifient les trois conditions suivantes :

- P_1, P_3, P_5 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.

☞ On passe d'un terme au suivant en lui ajoutant $\frac{1}{8}$.

- P_2, P_4, P_6 sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

☞ On passe d'un terme au suivant en le multipliant par $\frac{1}{2}$.

- $3P_1 = 2P_2$.

1. Exprimer tous les P_i en fonction de P_1.
En déduire la valeur de P_1. Vérifier que $P_6 = \frac{1}{24}$.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair lors d'un lancer du dé ?

3. On lance le dé 3 fois de suite.
Les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-4} *près.*

a. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le nombre 6 ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ?

EXERCICE 984 **10 minutes**

On considère 26 personnes assises autour d'une table et dont les âges sont chacun un nombre entre 35 et 60, tous ces nombres étant représentés. Montrer qu'il existe quatre personnes assises côté à côte dont la somme des âges est inférieure à 190.

EXERCICE 985 **10 minutes**

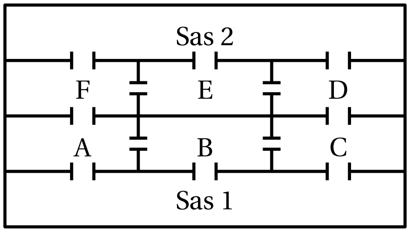
Boucles d'Or dispose, dans son jardin, d'un carrousel réservé à son usage personnel. C'est un peu injuste, pensent les trois ours, qui viennent chaque jour de bon matin profiter de ce qu'elle dort encore. Ils font tourner le manège : Papa ours lui imprime $\frac{1}{7}$ de tour, Maman ours $\frac{1}{9}$ de tour et Bébé ours $\frac{1}{32}$ de tour, chacun autant de fois qu'il veut, dans le sens qu'il veut (sens des aiguilles d'une montre ou sens contraire des aiguilles d'une montre). Au fil des jours, dans combien de positions différentes Boucles d'Or peut-elle retrouver son carrousel, qu'elle laisse pourtant chaque soir dans la même position ? On montrera que ces positions peuvent effectivement être atteintes.

EXERCICE 986 **10 minutes**

Une ville a 2017 maisons. Parmi ces 2017 maisons, 1820 abritent un chien, 1651 abritent un chat et 1182 abritent une tortue. Soit x le plus grand nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue et soit y le plus petit nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue. Quelle est la valeur de $x - y$?

EXERCICE 987 **20 minutes**

Un établissement est composé de deux sas, notés 1 et 2, et de six salles de travail, notées A, B, C, D, E et F. Les communications entre ces différentes salles se font par le moyen de 12 portes représentées par le schéma suivant :



On remarquera que les salles B et E ne communiquent pas directement.

– Un robot, rangé dans le sas 1, est programmé pour nettoyer exactement trois salles différentes parmi les salles A, B, C, D, E et F.
– Le robot commence toujours son parcours par l'une des salles A, B ou C.
– Dès que le robot entre dans une salle, il la nettoie systématiquement.
– Il lui est impossible de franchir la même porte plus d'une fois ou de nettoyer deux fois la même salle.
– Une fois les trois salles nettoyées, le robot ressort :
  - soit par le sas 1,
  - soit par le sas 2. Dans ce cas, il retourne plus tard dans le sas 1 par un couloir non représenté sur le schéma.

On appelle « trajet » une suite ordonnée de 3 salles constituant un parcours possible pour le robot.
Exemples :

– ABC et BCD sont des trajets.
– CBA et ABC sont deux trajets différents.
– ABE n'est pas un trajet (les salles B et E ne communiquent pas directement).
– DEF n'est pas un trajet (le robot ne peut pas commencer par la salle D).

1. Déterminer les six trajets possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
Dans toute la suite, on admet que les six trajets obtenus sont équiprobables.

2. a. Calculer la probabilité p_1 de l'événement « la salle E est la troisième salle nettoyée par le robot ».

b. Calculer la probabilité p_2 de l'événement « le robot sort par le sas 2 ».

3. Le tableau suivant donne le temps de nettoyage du robot dans chacune des salles en minutes :

Salles	A	B	C	D	E	F
Temps de nettoyage du robot	20 min	24 min	30 min	14 min	22 min	14 min

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps de nettoyage des 3 salles exprimé en minutes.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente ce nombre ?
d. Calculer la probabilité p_3 de l'événement « le robot effectue le nettoyage des 3 salles en moins de 60 minutes » ?

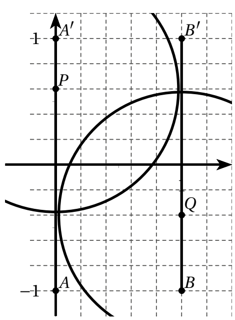
4. a. Déterminer la valeur arrondie au centième de $\sigma(X)$.
b. Le robot effectue un parcours par jour, 7 jours sur 7. Soit n un entier naturel non nul. On admet qu'il est acceptable d'utiliser le robot durant n jours d'affilée sans révision si le nombre : $n \times \mathrm{E(X)} + 1,5 \times \sigma\mathrm{(X)} \times \sqrt{n}$ est inférieur à 500 heures. Est-il acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an ?

EXERCICE 988 **15 minutes**

On a rempli un sac avec 111 balles de couleur (des bleues, des vertes, des rouges, des jaunes). On sait que si on tire 100 balles de ce sac, il est certain que les quatre couleurs seront présentes dans le tirage. Quel est le plus petit nombre de balles à tirer pour être sûr d'en avoir d'au moins trois couleurs ?

EXERCICE 989 **15 minutes**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les segments $[AA']$ et $[BB']$ représentés sur la figure ci-contre. On choisit aléatoirement un point P du segment $[AA']$ et un point Q du segment $[BB']$.
Quelle est la probabilité que le cercle de centre P de rayon 1 et le cercle de centre Q de rayon 1 soient sécants ?



EXERCICE 990 **15 minutes**

Une urne A contient trois boules : 1 rouge, 1 bleue et 1 noire.
Une urne B contient trois boules : 1 rouge et 2 noires.
Une urne C contient trois boules : 2 bleues et 1 noire.
On tire une boule, au hasard, de chaque urne.
On suppose que, dans chaque urne, les tirages sont équiprobables.

1. a. Quelle est la probabilité P_0 de n'obtenir aucune boule noire ?
b. Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir exactement 1 boule noire ?
c. Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir exactement 2 boules noires ?
d. Quelle est la probabilité P_3 d'obtenir 3 boules noires ?

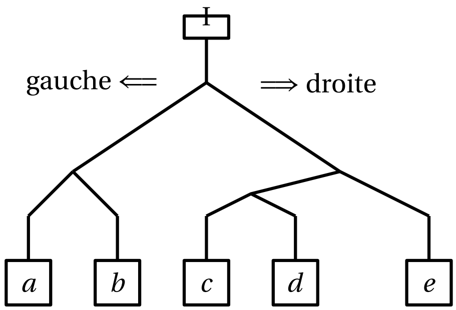
2. Si on tire exactement 1 boule noire, on perd 1 point.
Si on tire 0 ou 2 boules noires, on gagne 0 point.

Si on tire 3 boules noires, on gagne 3 points.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.
La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?

EXERCICE 991 **20 minutes**



On considère le circuit de billes schématisé par la figure ci-dessus. Un joueur lâche une bille en I et on admet qu'à chaque bifurcation la bille prend la direction gauche avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

1. Réaliser un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.

2. a. Utiliser cet arbre pour déterminer les probabilités des événements élémentaires suivants, sous forme de fractions irréductibles :
A : « La bille arrive en a » ; B : « La bille arrive en b » ;
C : « La bille arrive en c » ; D : « La bille arrive en d » ;
E : « La bille arrive en e ».
Vérifier que la probabilité de l'événement D est $\frac{9}{64}$.

b. Parmi les événements précédents, quel est l'événement le moins probable ? Le plus probable ?

3. Le joueur gagne 48 points si la bille arrive en a, 16 points si elle arrive en b et 64 points si elle arrive en c. Il ne gagne rien si la bille arrive en d et il perd 32 points si elle arrive en e.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus : ainsi si la bille arrive en e, on a $X = -32$. En utilisant les résultats de la deuxième question, donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer alors $E(X)$. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

c. L'organisateur du jeu se doit de proposer un jeu équitable (c'est-à-dire tel que $E(X) = 0$). Pour cela il décide de modifier le nombre de points perdus si la bille arrive en e. Quel nombre de points perdus doit-il choisir pour que $E(X) = 0$?

EXERCICE 992 **15 minutes**

Une usine a fabriqué 25 pièces indiscernables, dont 3 présentent un défaut.

1. On choisit au hasard une pièce parmi les 25 pièces fabriquées.
   a. Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse.
   b. Une personne a besoin de 7 pièces non défectueuses. Combien doit-elle acheter de pièces au minimum pour être certaine de les avoir?
2. On choisit simultanément 2 pièces au hasard parmi les 25 pièces fabriquées (on suppose que tous les tirages de 2 pièces sont équiprobables).
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 pièces sans défaut?
   b. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut.
   - Donner la loi de probabilité de X, sous forme de tableau.
   - Calculer l'espérance mathématique de X. On donnera les résultats sous forme décimale.

EXERCICE 993 **20 minutes**

L'entreprise Anatoly fabrique des pièces (1 500 unités par jour).
Certaines pièces ont un ou deux défauts de fabrication.
Sur un lot de 100 pièces choisies au hasard, on constate :

- qu'une pièce sur 20 n'a pas la dimension voulue;
- que 10 pièces manquent de résistance;
- qu'au total, 88 pièces n'ont pas de défaut.

On considère que cet échantillon permet de modéliser l'ensemble de la fabrication des pièces.
On choisit une pièce au hasard.
On suppose que le choix d'une pièce se fait dans une situation d'équiprobabilité.

1. Compléter le tableau suivant :

	Problème de dimension	Dimension correcte	Total
Problème de résistance			
Résistance correcte			
Total	5		100

2. Quelle est la probabilité de choisir une pièce ayant deux défauts?
3. La vente des pièces sans défaut rapporte un bénéfice de 5€ à l'entreprise Anatoly. Les pièces de mauvaise dimension sont rectifiées pour un coût de 2€, puis vendues au prix habituel. Celles qui manquent de résistance sont jetées.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie, associe le bénéfice réalisé.
   a. Quelle est la probabilité qu'une pièce rapporte 5€?

b. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de X.
c. Calculer l'espérance de X. Que représente ce nombre pour l'entreprise ?

4. Un investisseur souhaite acheter soit l'entreprise Anatoly soit l'entreprise Basilia.
Cette entreprise Basilia fabrique 1 800 pièces par jour et réalise un bénéfice moyen de 4€ sur chaque pièce produite.
En expliquant les raisons du choix, indiquer celle des deux entreprises qui rapportera le plus à l'investisseur.

EXERCICE 994 **20 minutes**

Une caisse contient deux types de tablettes de chocolat : des tablettes de chocolat au lait et des tablettes de chocolat noir.
Certaines tablettes contiennent un bon pour recevoir un cadeau :

— parmi les tablettes de chocolat au lait, 12 % contiennent un bon ;

— parmi les tablettes de chocolat noir, 15 % contiennent un bon.

Dans la caisse, deux tablettes sur trois sont des tablettes de chocolat au lait.
On prend au hasard une tablette de chocolat dans cette caisse.
Tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :

— L : « la tablette obtenue est une tablette de chocolat au lait » ;

— N : « la tablette obtenue est une tablette de chocolat noir » ;

— B : « la tablette obtenue contient un bon ».

On ne demande pas de valeur approchée des résultats.

1. a. Traduire l'énoncé en terme de probabilités en donnant les probabilités $P(L)$ et $P(N)$ des événements L et N.
b. Donner la probabilité $P_N(B)$ que la tablette contienne un bon sachant que c'est du chocolat noir, ainsi que la probabilité $P_L(B)$.

2. Déterminer la probabilité $P_N\left(\overline{B}\right)$ où $\overline{B}$ représente l'événement contraire de B.

3. Compléter le tableau suivant (pour un lot de 300 tablettes) :

	L	N	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			300

4. a. Déterminer la probabilité que la tablette obtenue soit une tablette de chocolat au lait contenant un bon.
b. Déterminer la probabilité que ce soit une tablette de chocolat noir contenant un bon.
c. En déduire la probabilité que la tablette obtenue permette de recevoir un cadeau.

5. La tablette obtenue contient un bon. Quelle est alors la probabilité que ce soit une tablette de chocolat au lait ?

EXERCICE 995 **15 minutes**

Une association envoie des ours en peluche à un hôpital pour des enfants malades répartis dans deux pavillons.
Chaque pavillon reçoit deux cartons A et B.
Le carton A contient 5 ours bruns et 5 ours blancs. Le carton B contient 3 ours bruns et 5 ours blancs.

1. Dans l'un des pavillons, une infirmière extrait du carton B, simultanément et au hasard, 3 ours pour les enfants d'une même chambre.
Calculer la probabilité que :

a. Les 3 ours soient de la même couleur.
b. L'un au moins des 3 ours soit brun.

2. Dans l'autre pavillon, un enfant choisit un carton au hasard et prend, toujours au hasard, un ours dans ce carton.

a. Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton A.
b. Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton B.
c. En déduire que la probabilité de choisir un ours blanc est égale à $\dfrac{9}{16}$.

EXERCICE 996 **20 minutes**

Une boîte contient $4n$ trombones de deux couleurs différentes : $2n+1$ sont jaunes et $2n-1$ sont verts ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$).
On prélève simultanément deux trombones au hasard.

1. Dans cette question on suppose que $n = 10$. Calculer la probabilité des événements suivants (on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième).

a. A : les deux trombones sont de couleurs différentes ;
b. B : les deux trombones sont verts ;
c. C : les deux trombones sont de même couleur.

2. Dans cette question, n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 1.
On note p_n la probabilité de l'événement « les deux trombones sont de couleurs différentes ».

a. Montrer que $p_n = \dfrac{4n^2-1}{8n^2-2n}$.
b. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{8x^2-2x} \quad \left(x \text{ réel},\ x \neq 0, x \neq \frac{1}{4}\right),$$

dont le tableau de variations est donné ci-après.

x	$-\infty$		0		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$4+\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

En utilisant ce tableau, déterminer l'entier naturel n pour lequel la probabilité p_n est maximale.

EXERCICE 997 **15 minutes**

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.
On choisit au hasard un candidat.

1. **a.** Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire ?
   b. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire ?
   c. Calculer la probabilité que ce candidat soit engagé.

2. Sachant que le candidat choisi a été engagé, calculer la probabilité que ce soit un garçon.

EXERCICE 998 **20 minutes**

Une urne contient 4 boules en or et 3 boules en acier indiscernables au toucher.
Un joueur tire au hasard simultanément 3 boules dans cette urne.
Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit O l'événement : « le candidat tire 3 boules en or ».
Déterminer la probabilité $p(O)$ de cet événement.

2. Dans cette question, chaque boule en or rapporte 100 €, chaque boule en acier rapporte 10 €.
Soit X la variable aléatoire qui désigne le gain d'un tirage.
   a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$. Donner l'espérance de gain arrondie à l'euro.

3. **Dans cette question :**
• Si le joueur tire 3 boules en or, il gagne 1 000 € puis il doit répondre à une question.
S'il donne la bonne réponse, il double son gain sinon il repart avec 1 000 €.
On estime que le candidat a 7 chances sur 10 de donner la bonne réponse.

- Si le joueur ne tire pas 3 boules en or, il ne gagne rien.

a. Calculer la probabilité pour que le candidat gagne 2 000 €.

b. La probabilité pour que le joueur gagne 1 000 € étant égale à $\frac{6}{175}$ (on ne demande pas de le vérifier), calculer l'espérance de gain dans cette question. On arrondira le résultat à l'euro.

EXERCICE 999 **20 minutes**

Dans cet exercice, les questions 1, 2 et 3 *sont indépendantes.*

Une urne A contient trois pièces de monnaie en cuivre et deux pièces en argent. Une urne B contient quatre pièces de monnaie en cuivre et une pièce en argent. On considère que dans chaque urne, toutes les pièces étant indiscernables au toucher, chaque pièce a la même probabilité d'être tirée.

1. On enlève une pièce de l'urne A et une pièce de B. Quelle est la probabilité pour que, à l'issue de ces deux opérations, les deux urnes aient la même composition ?

2. Les urnes ont la composition donnée au début de l'exercice.
On tire simultanément trois pièces de l'urne A ; ces pièces sont ensuite placées dans B. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pièces en cuivre contenues dans B à l'issue de ces opérations.

a. Montrer que la valeur minimale prise par X est 5.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Les urnes ont à nouveau la composition donnée au début de l'exercice. On tire une pièce de A, que l'on place dans B, puis on enlève une pièce de B. Quelle est la probabilité pour que l'urne B ne contienne que des pièces en cuivre à l'issue de ces opérations ?

EXERCICE 1000 **15 minutes**

Math cherche à joindre par téléphone un service médical. La probabilité que son appel soit pris sans attente est de $0,3$. Si son appel n'est pas pris sans attente, Math raccroche son téléphone et fait une autre tentative. Il fait au maximum trois tentatives.

On note X la variable aléatoire égale au rang de son premier appel aboutissant sans attente. Si au bout de trois appels Math n'a pas réussi à joindre le service médical sans attente, on convient alors que $X = 0$.

On note R l'événement : « Math est mis en relation avec le service médical sans attente ».

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

2. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?

3. Déterminer alors la loi de probabilité de X.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X , et interpréter ce résultat.

5. Reprendre la loi de probabilité (sans faire l'arbre de probabilités) en supposant que Math s'accorde au maximum six tentatives.

EXERCICE 1001 **20 minutes**

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité $0,2$ de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :
Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b. On pose $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

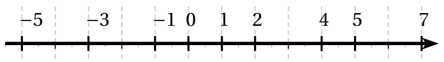
Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

Chapitre 5

Corrigés

5.1 Nombres et calculs

EXERCICE 1



EXERCICE 2

$193 = 15 \times 12 + 13$ et $13 < 15$ donc dans la division euclidienne de 193 par 15, le quotient est 12, le reste est 13.
$13 > 12$, alors $193 = 15 \times 12 + 12 + 1 = 16 \times 12 + 1$.
On en déduit alors que dans la division euclidienne de 193 par 12, le quotient est 16, le reste est 1.

EXERCICE 3

$2021 = 20 \times 99 + 41$ et $41 < 99$ donc dans la division euclidienne de 2021 par 99, le quotient est 20, le reste est 41.
$41 > 20$, alors $2021 = 20 \times 99 + 2 \times 20 + 1 = 20 \times 101 + 1$
On en déduit alors que dans la division euclidienne de 2021 par 20, le quotient est 101, le reste est 1.

EXERCICE 4

1. Les nombres divisibles par 2 sont les nombres dont le chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, soit ici les nombres 12 ; 36 ; 98 ; 4238 et 9136.
2. Les nombres divisibles par 3 sont les nombres dont la somme de ses chiffres est divisible par 3, soit ici les nombres 12 ; 36 ; 45 ; 111 et 4238.
3. Les nombres divisibles par 5 sont les nombres dont le chiffre des unités est 0 ou 5, soit ici les nombres 25 ; 45 et 285.
4. Les nombres divisibles par 6 sont les nombres divisibles par 2 et par 3, soit ici les nombres 12 ; 36 et 4238.
5. Les nombres divisibles par 9 sont les nombres dont la somme de ses chiffres est divisible par 9, soit ici les nombres 36 ; 45 et 4238.

EXERCICE 5

1. Les nombres divisibles par 2 sont les nombres dont le chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, soit ici les nombres 36 ; 396 ; 1818 ; 9876 ; 3456 ; 9192 et 89000.
2. Les nombres divisibles par 3 sont les nombres dont la somme de ses chiffres est divisible par 3, soit ici les nombres 36 ; 396 ; 495 ; 1818 ; 2835 ; 3456 ; 3795 et 9192.
3. Les nombres divisibles par 5 sont les nombres dont le chiffre des unités est 0 ou 5, soit ici les nombres 495 ; 2835 ; 3795 et 89000.
4. Les nombres divisibles par 9 sont les nombres dont la somme de ses chiffres est divisible par 9, soit ici les nombres 36 ; 396 ; 495 ; 1818 ; 2835 et 3456.
5. Les nombres divisibles par 18 sont les nombres divisibles par 2 et par 9, soit ici les nombres 36 ; 396 ; 1818 et 3456.

EXERCICE 6

$10 = 2 \times 5$, 10 est un multiple de 5.

$39 = 3 \times 13$, 39 est un multiple de 13.

$60 = 5 \times 12 = 6 \times 10$, 60 est un multiple de 5 et de 6.

$65 = 5 \times 13$, 65 est un multiple de 5 et de 13.

$69 = 3 \times 23$, 69 n'est multiple ni de 5, ni de 13, ni de 6.

$234 = 6 \times 3 \times 13$, 234 est un multiple de 6 et de 13

$330 = 5 \times 6 \times 11$, 330 est un multiple de 5 et de 6.

$390 = 6 \times 5 \times 13$, 390 est un multiple de 5, de 6 et de 13.

EXERCICE 7

$34 = 2 \times 17$, 34 est un multiple de 17.

$36 = 3 \times 12 = 4 \times 9$, 36 est un multiple de 4 et de 12.

$42 = 2 \times 3 \times 7$, 42 n'est multiple ni de 4, ni de 12, ni de 17.

$65 = 5 \times 13$, 65 n'est multiple ni de 4, ni de 12, ni de 17.

$68 = 4 \times 17$, 68 est un multiple de 4 et de 17.

$340 = 4 \times 5 \times 17$, 340 est un multiple de 4 et de 17.

$510 = 6 \times 5 \times 17$, 510 est un multiple de 17.

$4692 = 3 \times 4 \times 17 \times 23$, 4602 est un multiple de 4, 12 et de 17.

EXERCICE 8

67, 101, 373 et 4597 sont des nombres premiers.

$57 = 3 \times 17$

$77 = 7 \times 11$

$1001 = 7 \times 11 \times 13$

$1323 = 3^3 \times 7^2$

$3223 = 11 \times 293$

EXERCICE 9

97, 103, 773 et 1657 sont des nombres premiers.

$99 = 3 \times 3 \times 11$

$123 = 3 \times 41$

$231 = 3 \times 7 \times 11$

$567 = 3^4 \times 7$.

EXERCICE 10

1. $70 = 2 \times 35$, 70 est un multiple de a
   $135 = 3 \times 45$, 135 est un multiple de b.
2. $45 \times 35 = 1575$,
   1575 est un multiple commun à a et b.
3. $315 = 5 \times 7 \times 9 = 9 \times 35 = 7 \times 45$,
   315 est le plus petit multiple commun à a et b.

EXERCICE 11

1. $84 = 2 \times 42$, 84 est un multiple de a
   $126 = 2 \times 63$, 135 est un multiple de b.
2. $42 \times 63 = 2646$,
   2646 est un multiple commun à a et b.
3. $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 3 \times 42 = 2 \times 63$,
   126 est le plus petit multiple commun à a et b.

EXERCICE 12

1. Un multiple de 5 est de la forme $5p$ avec p entier relatif.
2. Un multiple de 13 est de la forme $13q$ avec q entier relatif.
3. Un multiple d'un entier a est de la forme ak avec k entier relatif.

EXERCICE 13

1. $a = 1 \times 15 = 3 \times 5$, les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5 et 15
   $b = 1 \times 35 = 5 \times 7$, les diviseurs de 35 sont : 1, 5, 7 et 35
   On en déduit que $PGCD(15;35) = 5$.
2. $a = 1 \times 30 = 3 \times 10 = 5 \times 6$, les diviseurs de 30 sont : 1, 3, 5, 6, 10 et 30
   $b = 1 \times 50 = 2 \times 25 = 5 \times 10$, les diviseurs de 50 sont : 1, 2, 5, 10, 25 et 50
   On en déduit que $PGCD(30;50) = 10$.
3. $a = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20$
   $a = 8 \times 15 = 10 \times 12$, les diviseurs de 120 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120
   $b = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 5 \times 8$, les diviseurs de 40 sont : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40
   On en déduit que $PGCD(120;40) = 40$.
4. $a = 1 \times 39 = 3 \times 13$, les diviseurs de 39 sont : 1, 3, 13 et 39
   $b = 1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$, les diviseurs de 16 sont : 1, 2, 4, 8 et 16
   On en déduit que $PGCD(39;13) = 1$.
5. $a = 1 \times 154 = 2 \times 77 = 7 \times 22 = 11 \times 14$, les diviseurs de 154 sont : 1, 2, 7, 11, 14, 22, 77 et 154
   $b = 1 \times 99 = 3 \times 33 = 9 \times 11$, les diviseurs de 99 sont : 1, 3, 9, 11, 33 et 99
   On en déduit que $PGCD(154;99) = 11$.
6. $a = 1 \times 380 = 2 \times 190 = 4 \times 95 = 5 \times 76 = 10 \times 38 = 20 \times 19$,

les diviseurs de 380 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 19, 20, 38, 76, 95 , 190 et 380
$b = 1\times 171 = 3\times 57 = 9\times 19$, les diviseurs de 171 sont : 1, 3, 9, 19, 57 et 171
On en déduit que $PGCD(380;171) = 19$.

EXERCICE 14

$64 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^6$,
$162 = 2\times 3\times 3\times 3\times 3 = 2\times 3^4$
$250 = 2\times 5\times 5\times 5 = 2\times 5^3$
$1000 = 8\times 125 = 2^3\times 5^3$
$3630 = 2\times 3\times 5\times 11^2$.

EXERCICE 15

Tout multiple de a est de la forme $k\times a$ avec k entier relatif.
Soit $p\times a$ et $q\times a$ deux multiples de a avec p et q entiers relatifs.
Alors $p\times a + q\times a = (p+q)\times a$
soit en posant $k = p+q$, $p\times a + q\times a = k\times a$
Ainsi la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

EXERCICE 16

Un nombre impair est de la forme $2n+1$ avec n entier naturel.

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 &= (2n)^2 + 2\times 2n\times 1 + 1^2 = 4n^2 + 4n + 1\\ &= 2\left(2n^2+2n\right)+1\end{aligned}$$

Soit en posant $N = 2n^2 + 2n$, $(2n+1)^2 = 2N+1$
Ainsi le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

EXERCICE 17

1. $a = 14k = 2\times 7k$ ce qui prouve que a est un multiple de 2.
2. $b = 18k = 9\times 2k$ ce qui prouve que b est un multiple de 9.
3. $a+b = 32k = 16\times 2k$, 16 est donc un diviseur de $a+b$.

EXERCICE 18

Un nombre pair est de la forme $2k$ avec k entier
$(2k)^2 = 4k^2 = 4\times k^2$, le carré d'un nombre pair est donc divisible par 4.

EXERCICE 19

1. Si n est pair alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n = 2k$
   on en déduit alors que :
   $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2\times\Big(k(2k+1)\Big)$
   ce qui prouve que $n(n+1)$ est pair.
2. Si n est impair alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$
   on en déduit alors que :
   $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2\times\Big((2k+1)(k+1)\Big)$
   ce qui prouve que $n(n+1)$ est pair.
3. Un entier naturel est pair ou impair, nous venons de démontrer que dans les deux cas $n(n+1)$ est pair.
   Ainsi le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

EXERCICE 20

Soit n un entier naturel impair alors il existe k entier naturel tel que $n = 2k+1$
$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$
d'après l'exercice précédent, nous savons que $k(k+1)$ est un nombre pair, il peut donc s'écrire sous la forme $2P$ avec P entier naturel.
On en déduit alors que $n^2 - 1 = 4\times 2P = 8P$ ce qui prouve que n^2-1 est divisible par 8.

EXERCICE 21

D'après l'exercice 19, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair donc il existe $k\in\mathbb{N}^{\star}$ tel que $n(n+1) = 2k$.
On en déduit alors que $n(n+1)(n+2) = 2k(n+2)$,
$n(n+1)(n+2)$ est donc divisible par 2.
D'autre part, un entier naturel non nul n s'écrit sous la forme $3p$, $3p+1$ ou $3p+2$ avec p entier naturel.

• Si $n = 3p$ alors

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2) &= 3p(3p+1)(3p+2)\\ &= 3\big(p(3p+1)(3p+2)\big)\end{aligned}$$

• Si $n = 3p+1$ alors

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2) &= (3p+1)(3p+2)(3p+3)\\ &= 3\big((3p+1)(3p+2)(p+1)\big)\end{aligned}$$

• Si $n = 3p+2$ alors

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2) &= (3p+2)(3p+3)(3p+4)\\ &= 3\big((3p+2)(p+1)(3p+4)\big)\end{aligned}$$

Dans les trois cas, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
$n(n+1)(n+2)$ est divisible par 2 et par 3, $n(n+1)(n+2)$

est donc divisible par 6.

EXERCICE 22

1. $75 = 1 \times 75 = 3 \times 25 = 5 \times 15$.
   Les dimensions possibles sont : 1x75, 3x25 et 5x15.
2. Le rectangle de plus grand périmètre celui de dimensions 1x75, soit les 75 carrés alignés.

EXERCICE 23

Commençons par décomposer en facteurs premiers les deux entiers :
$45 = 3 \times 3 \times 5$ et $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
On en déduit alors que $PGCD(45;60) = 15$.
L'organisateur peut constituer 15 équipes constituées de 3 filles et 4 garçons.

EXERCICE 24

1. $3003 = 20 \times 150 + 3$ et $3731 = 20 \times 186 + 11$
   Chaque corbeille sera composée de 150 dragées au chocolat et 186 dragées aux amandes, il restera 3 dragées au chocolat et 11 dragées aux amandes.
2. **a.** 3003 et 3731 ne sont pas divisibles par 90, la proposition d'Emma n'est donc pas possible.
   b. On veut constituer le maximum de ballotins de même composition. Il faut donc rechercher le PGCD de 3003 et 3731.
   $3003 = 3 \times 1001 = 3 \times 11 \times 91$
   $3731 = 41 \times 91$
   On en déduit alors que $PGCD(3003;\ 3731) = 91$.
   Arthur et Emma peuvent composer au maximum 91 ballotins.
   $3003 = 91 \times 33$ et $3731 = 91 \times 41$.
   Chaque ballotin sera composé de 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.

EXERCICE 25

1. Soit N le nombre de billes.
   D'après l'énoncé, $N = 6p + 3$ avec p entier naturel.
   On peut encore écrire : $N = 3(2p+1)$, si l'enfant place ses billes par rangées de 3, il n'en restera aucune.
2. D'après l'énoncé, on a de plus $N = 5q$ avec q entier naturel.
   N est multiple de 3 et de 5 donc de 15 mais pas de 6, de plus $N \leqslant 30$. La seule valeur possible est 15.

EXERCICE 26

Affirmation 1 : $52 = 1 \times 39 + 13$ et $39 = 3 \times 13 + 0$
On en déduit alors que $PGCD(52;\ 39) = 13$.
L'affirmation est vraie.
Affirmation 2. $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24$, ainsi 72 au-moins 6 diviseurs. L'affirmation est donc fausse.
Affirmation 3. $(n-1)(n+1)+1 = n^2 - 1 + 1 = n^2$.
L'affirmation est donc vraie.
Affirmation 4. 15 et 3 sont deux nombres impairs et $PGCD(15;\ 3) = 3$. L'affirmation est donc fausse.

EXERCICE 27

1. On peut mettre $\dfrac{84}{12} = 7$ boîtes dans la longueur,
   $\dfrac{60}{12} = 5$ dans la largeur et 1 dans la hauteur,
   soit $7 \times 5 \times 1 = 35$ dans un carton.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $84 = 60 \times 1 + 24$
   $60 = 24 \times 2 + 12$
   $24 = 12 \times 2 + 0$
   On en déduit alors que $PGCD(84;\ 60) = 12$.
3. Le diamètre doit être un diviseur de 84 et de 60 et le plus grand diviseur commun est 12.
   L'entreprise ne peut donc pas ranger dans ce carton des boîtes cylindriques de plus grand diamètre de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres.

EXERCICE 28

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $186 = 155 \times 1 + 31$ et $155 = 31 \times 5 + 0$.
   On a donc $PGCD(186\ ;\ 155) = 31$.
2. **a.** D'après le résultat précédent, le chocolatier pourra faire au maximum 31 colis.
   b. Comme $186 = 31 \times 6$ et $155 = 31 \times 5$, il y aura dans chacun des 31 colis, 6 chocolats et 5 pralines.

EXERCICE 29

1. Le nombre de chocolats blancs et de chocolats noirs doivent diviser les deux nombres 1 575 et 4 410. Il faut donc trouver un diviseur commun à ces deux

nombres et le plus grand nombre de boîtes sera obtenu avec le PGCD à ces deux nombres.
En utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient :
$4\,410 = 2 \times 1\,575 + 1\,260$
$1\,575 = 1 \times 1\,260 + 315$ $1\,260 = 4 \times 315 + 0$.
donc $PGCD(1\,575;\ 4\,410) = 315$.

2. Comme $1\,575 = 315 \times 5$ et $4\,410 = 315 \times 14$, il y aura dans chacune des 315 boîtes 5 bonbons au chocolat blanc et 14 bonbons au chocolat noir.

EXERCICE 30

1. $10^6 \times 10^5 = 10^{11}$
2. $10^3 \times 10^5 \times 10^{-4} = 10^4$
3. $\dfrac{13^2 \times 5}{3 \times 7} = 3^{-1} \times 5^1 \times 7^{-1} \times 13^2$
4. $\left(\dfrac{11^4 \times 3^2}{2^3 \times 5}\right)^3 = 2^{-9} \times 3^6 \times 5^{-3} \times 11^{12}$
5. $3^6 \times (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^{11}$
6. $4^3 \times 7^5 \times 2^7 = 2^{13} \times 7^5$
7. $\dfrac{3^2 \times 15^3}{2^4 \times 7^3} = 2^{-4} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^{-3}$
8. $\left(\dfrac{13^2 \times 5^4}{2^7 \times 5^8}\right)^3 = 2^{-21} \times 5^{-12} \times 13^6$

EXERCICE 31

1. $A = \dfrac{100\,001}{100\,000} = 1{,}000\,01$.
2. Antoine a raison, la calculatrice a arrondi le résultat.

EXERCICE 32

1. $7\,476 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 89$
$6\,300 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$.
2. $A = \dfrac{2^2 \times 3 \times 7 \times 89}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} = \dfrac{89}{3 \times 5^2} = \dfrac{89}{75}$.

EXERCICE 33

1. $448\,035 = 3 \times 5 \times 7 \times 17 \times 251$
$1\,131\,690 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17 \times 317$.
2. $A = \dfrac{3 \times 5 \times 7 \times 17 \times 251}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17 \times 317} = \dfrac{251}{2 \times 317} = \dfrac{251}{634}$

EXERCICE 34

1. $A = 2^4 \times 5^5$
2. $B = 2^3 \times 5^{-4}$
3. $C = 5^4 \times 2^9$
4. $D = 5^2 \times 2^{-4}$

EXERCICE 35

1. $\dfrac{40}{15} = \dfrac{2^3 \times 5}{3 \times 5} = \dfrac{2^3}{3} = \dfrac{8}{3}$
2. $\dfrac{48}{56} = \dfrac{2^4 \times 3}{2^3 \times 7} = \dfrac{2 \times 3}{7} = \dfrac{6}{7}$
3. $\dfrac{56}{63} = \dfrac{2^3 \times 7}{3^2 \times 7} = \dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9}$
4. $\dfrac{63}{48} = \dfrac{3^2 \times 7}{2^4 \times 3} = \dfrac{3 \times 7}{2^4} = \dfrac{21}{16}$
5. $\dfrac{180}{108} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^3} = \dfrac{5}{3}$
6. $\dfrac{650}{800} = \dfrac{2 \times 5^2 \times 13}{2^5 \times 5^2} = \dfrac{13}{2^4} = \dfrac{13}{16}$
7. $\dfrac{204}{595} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 17}{5 \times 7 \times 17} = \dfrac{12}{35}$
8. $\dfrac{2\,261}{323} = \dfrac{7 \times 17 \times 19}{17 \times 19} = 7$

EXERCICE 36

1. $5^3 \times 5^6 \times 5^{-15} = 5^{-6}$
2. $-2 \times (-2)^{-3} \times (-2)^5 = (-2)^3$
3. $2{,}5^{-3} \times 4{,}4^{-3} = (2{,}5 \times 4{,}4)^{-3} = 11^{-3}$
4. $\dfrac{7^8}{2^8} \times \left(5{,}6^{-4}\right)^{-2} = 2^{-32}$
5. $\dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}} = (-3)^5$
6. $\dfrac{60 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{30 \times 10^2 \times 24 \times 10^{-5}} = 10^6$
7. $\dfrac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times \left(10^{-3}\right)^4}{0{,}2 \times 10^{-7} \times 18} = 10^{-3}$

EXERCICE 37

1. $238 = 2 \times 7 \times 17$ et $170 = 2 \times 5 \times 17$.
On en déduit que $PGCD(238;\ 170) = 2 \times 17 = 34$.
2. D'après le résultat précédent : $\dfrac{170}{238} = \dfrac{5 \times 34}{7 \times 34} = \dfrac{5}{7}$

EXERCICE 38

1. $A = 0{,}000008 = 8 \times 10^{-6}$.
2. $B = 0{,}75 \times 10^3 = 750 = 7{,}5 \times 10^2$.
3. $C = 37{,}5 \times 10^2 = 3750 = 3{,}75 \times 10^3$

EXERCICE 39

1. $A = \dfrac{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}{\frac{17}{9} - \frac{3}{9}} = \dfrac{\frac{7}{6}}{\frac{14}{9}} = \dfrac{7 \times 9}{6 \times 14} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.
2. $B = \dfrac{3 \times 27 \times 6 \times 10^{-7}}{6 \times 3 \times 10^{-2}} = 27 \times 10^{-5} = 2{,}7 \times 10^{-4}$.

EXERCICE 40

1. $A = \frac{16}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{54}{20} = -\frac{27}{10} = 2,7.$
2. $B = \frac{3\times 10^{-4}\times 10^{12}}{5\times 10^{-2}} = \frac{3\times 10^{10}}{5} = 6\times 10^{9}.$

EXERCICE 41

$x_A = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $x_B = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $x_C = \frac{5}{12}$.
On en déduit alors que :
$x_B - x_A = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ et $x_C - x_B = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
Les points A, B et C sont donc régulièrement espacés sur la droite graduée.

EXERCICE 42

1. $E = \frac{2}{3} + \frac{34}{3} = \frac{36}{3} = 12.$
2. $F = 10^{-1+2} + a\times 10^2 = 10 + a\times 10^2.$
   D'autre part $E = 12 = 10+2$
   On en déduit que $E = F$ si et seulement si $a\times 10^2 = 2$ donc $a = 2\times 10^{-2}$.

EXERCICE 43

1. $A = \frac{13}{20}$ et $B = \frac{3}{20}$, on en déduit alors que
   $C = \frac{13}{20}\times\frac{20}{3} = \frac{13}{3}.$
2. $D = 2^6$, $E = (4\times 3)^5 = 12^5$, $F = 5^{26-17} = 5^9$.

EXERCICE 44

1. $A = \frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}{\frac{7}{6}-\frac{12}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{1}{3}\times\frac{6}{5} = -\frac{2}{5}.$
2. $B = \frac{6\times 10^4}{10^{15}} = 6\times 10^{-11}.$

EXERCICE 45

1. $A = -\frac{25}{15} + \frac{21}{15} = -\frac{4}{15}$
   $B = \frac{7}{4}\times\frac{9}{21} = \frac{7\times 3\times 3}{4\times 3\times 7} = \frac{3}{4}.$
2. $C = -2\times(60-80) - (-7) = 40+7 = 47.$

EXERCICE 46

1. $A = 150\times 10^{-6+7+4} = 150\times 10^5 = 1,5\times 10^7.$
2. **a.** Utilisons l'algorithme d'Euclide :
   $1610 = 1\times 854 + 756$
   $854 = 1\times 756 + 98$
   $756 = 7\times 98 + 70$
   $98 = 1\times 70 + 28$
   $70 = 2\times 28 + 14$
   $28 = 2\times 14 + 0.$
   On en déduit alors que $PGCD(1610;\ 854) = 14$.
   b. $\frac{854}{1610} = \frac{14\times 61}{14\times 115} = \frac{61}{115}.$

EXERCICE 47

1. $17,2 = 1\times 10^1 + 7\times 10^0 + 2\times 10^{-1}$
   $1053,42 = 1\times 10^3 + 5\times 10^1 + 5\times 10^0 + 4\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2}$
   $0,003 = 3\times 10^{-3}$
   $\frac{1}{4} = 0,25 = 2\times 10^{-1} + 5\times 10^{-2}$
   $\frac{112}{25} = 4,48 = 4\times 10^0 + 4\times 10^{-1} + 8\times 10^{-2}.$
2. **a.** $A = 2034,009$
   b. $B = 400110,9$
   c. $C = 934,35.$

EXERCICE 48

1. $2022 = 2\times 10^3 + 2\times 10^1 + 2\times 10^0$
   $987,65 = 9\times 10^2 + 8\times 10^1 + 7\times 10^0 + 6\times 10^{-1} + 5\times 10^{-2}$
   $0,9002 = 9\times 10^{-1} + 2\times 10^{-4}$
   $\frac{25}{40} = 0,625 = 6\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 5\times 10^{-3}$
   $\frac{2022}{25} = 80,88 = 8\times 10^1 + 8\times 10^{-1} + 8\times 10^{-2}.$
2. **a.** $A = 9009090,009$
   b. $B = 111111,11$
   c. $C = 123,21.$

EXERCICE 49

Utilisons l'écriture scientifique pour comparer les trois distances :
$105\times 10^6 = 1,05\times 10^8$
$2250\times 10^5 = 2,25\times 10^8$
$1,5\times 10^8$ est déjà en notation scientifique.
Ainsi $1,05\times 10^8 \leqslant 1,5\times 10^8 \leqslant 2,25\times 10^8$.
De ces trois planètes, Mars est donc la plus éloignée du Soleil.

EXERCICE 50

Utilisons une démonstration par l'absurde : supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Alors il existe a appartenant à $\mathbb{Z}$ et n appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{3} \times 3 \times 10^n = \dfrac{a}{10^n} \times 3 \times 10^n$

soit $10^n = 3 \times a$

On en déduit alors que l'une des puissances de 10 est un multiple de 3. C'est faux d'après les critères de divisibilité.

$\dfrac{1}{3}$ n'est donc pas un nombre décimal.

EXERCICE 51

$N = 2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \times 2^n = (1+2) \times 2^n = 3 \times 2^n$.

N est donc divisible par 3 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 52

1. $A = \dfrac{8+12}{1+3} = \dfrac{20}{4} = 5$.
2. Il manque les parenthèses ouvrantes avant le « 8 » et après le signe « ÷ », les parenthèses fermantes avant le signe « ÷ » et avant le signe « = ».

EXERCICE 53

$a = -\dfrac{2}{21} = -\dfrac{2}{3\times 7}$ et $b = -\dfrac{5}{7}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{-\frac{2}{3\times 7}}{-\frac{5}{7}} = \dfrac{2}{3\times 7} \times \dfrac{7}{5} = \dfrac{2}{15}$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{15}{2}$

$a \times b = \left(-\dfrac{2}{3\times 7}\right) \times \left(-\dfrac{5}{7}\right) = \dfrac{10}{147}$

$a + b = -\dfrac{2}{3\times 7} - \dfrac{5}{7} = -\dfrac{2+5\times 3}{3\times 7} = -\dfrac{17}{21}$

$a - b = -\dfrac{2}{3\times 7} + \dfrac{5}{7} = \dfrac{-2+5\times 3}{3\times 7} = \dfrac{13}{21}$

EXERCICE 54

1. $V = \pi \times 1,60 \left[\dfrac{0,85}{2} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1,34}{2} - \dfrac{0,85}{2}\right)\right]^2$

   $V = \dfrac{124609\pi}{225000}$.

   $V = 1,740$ m^3 à $0,001$ m^3 près par excès.

   $V = 1740$ L à 1 litre près par excès.
2. $1740 = 2320 \times 0,75$, le viticulteur pourra remplir 2 320 bouteilles.

EXERCICE 55

1. $A = 200 + 10 + 0,1 + 0,02 = 210,12$.
2. $A = 2,1012 \times 10^2$.
3. $A = 21012 \times 10^{-2}$.
4. $A = 210 + \dfrac{12}{100} = 210 + \dfrac{3}{25}$.

EXERCICE 56

1. Le numérateur et le dénominateur sont des nombres pairs, la fraction n'est donc pas irréductible.
2. $1848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$

   $2040 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 17$

   On en déduit alors que

   $PGCD(1848;\ 2040) = 2^3 \times 3 = 24$.
3. $\dfrac{1848}{2040} = \dfrac{24 \times 77}{24 \times 85} = \dfrac{77}{85}$.

EXERCICE 57

1. $A = \dfrac{3}{25} = \dfrac{12}{100} = 0,12,\ A \in \mathbb{D}$.

   L'affirmation 1 est donc vraie.
2. Les nombres 570 et 795 sont divisibles par 5, ils ne sont donc pas premiers entre eux.

   L'affirmation 2 est fausse.
3. Soit $a = 5p$ et $b = 5q$ avec p et q deux entiers relatifs non nuls. $a + b = 5p + 5q = 5(p+q)$.

   L'affirmation 3 est vraie.
4. Le double de 2^{39} est égal à $2 \times 2^{39} = 2^{40}$.

   L'affirmation 4 est vraie.
5. Le nombre 14 est pair, le nombre 7 est impair et $PGCD(7;\ 14) = 7$.

   L'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 58

Question 1 : 30 n'est pas divisible par 7,

la bonne réponse est donc la **B**.

Question 2 : $\dfrac{\left(10^{-3}\right)^2 \times 10^4}{10^{-5}} = 10^{-6+4+5} = 10^3$,

la bonne réponse est la **C**.

Question 3 : $5^n \times 5^m = 5^{n+m}$,

la bonne réponse est la **B**.

Question 4 : $\dfrac{7}{3} - \dfrac{4}{3} \div \dfrac{5}{2} = \dfrac{7}{3} - \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{35}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{27}{15}$,

la bonne réponse est la **C**.

EXERCICE 59

Question 1 : 774 et 338 sont deux nombres pairs, ils ne sont donc pas premiers entre eux.

1035 et 774 sont divisibles par 9, ils ne sont donc pas premiers entre eux.

La bonne réponse est la **B**.

Question 2 : la bonne réponse est la **C**.

Question 3 : $3^{-2} \times 3^3 - 3 = 3 - 3 = 0$, la bonne réponse est la **A**.

Question 4 : $\dfrac{4}{3} < \dfrac{4}{3} \times \dfrac{27}{24}$ le résultat est donc négatif, la bonne réponse est la **C**.

Question 5 : $\dfrac{6 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}} = 12 \times 10^4$, la bonne réponse est la **C**.

EXERCICE 60

Question 1 : $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{18} + \dfrac{3}{18} = \dfrac{5}{18}$. Réponse **C**.

Question 2 : $\left(4 \times 10^{-3}\right)^2 = 16 \times 10^{-6} = 1,6 \times 10^{-5}$.

Réponse **A**.

Question 3 : $\dfrac{12}{25} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{12 \times 7}{25 \times 10} = \dfrac{84}{250}$. Réponse **C**.

Question 4 : $\left(3 \times 10^{-2}\right)^3 \times 5 \times 10^4 = 135 \times 10^{-2}$
$= 1,35 \times 10^{-4}$.

Réponse **B**.

EXERCICE 61

- $\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{5} = \dfrac{15}{10} + \dfrac{14}{10} = \dfrac{29}{10}$. Réponse **C**.
- $\dfrac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$. Réponse **A**.
- $\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \div \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{4}{1} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{28}{3} = -\dfrac{26}{3}$. Réponse **B**.
- $\left(10^5\right)^2 = 10^{5\times 2} = 10^{10}$. Réponse **C**.

EXERCICE 62

1. $\dfrac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $\dfrac{83}{70} = 1,1\overline{857142}$, $\dfrac{12}{13} = 0,\overline{923076}$.

2. **a.** $100 \times A = 2727,\overline{27}$.

b. $99 \times A = 100 \times A - A = 2727,\overline{27} - 27,\overline{27} = 2700$.

c. D'après la question précédente
$A = \dfrac{2700}{99} = \dfrac{300}{11}$.

EXERCICE 63

1. $100 \times A = 345,\overline{678}$.
$100\,000 \times A = 345678,\overline{678}$.

2. $99\,900 \times A = 100\,000 \times A - 100 \times A = 345678 - 345$
$= 345\,333$.

3. D'après la question précédente
$A = \dfrac{345\,333}{99\,900} = \dfrac{115\,111}{33\,300}$.

EXERCICE 64

- $10 \times A = 6,\overline{6}$.

On en déduit alors que $9 \times A = 6$ d'où $A = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

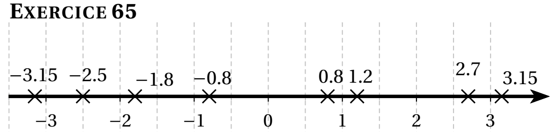
- $1\,000 \times B = 4152,\overline{45}$ et $100\,000 \times B = 415245,\overline{45}$

On en déduit alors que $99\,000 \times B = 411\,093$ d'où $B = \dfrac{411\,093}{99\,000} = \dfrac{45\,677}{11\,000}$.

- $10\,000 \times C = 97531,\overline{7531}$ d'où $9\,999 \times C = 97\,522$

D'où $C = \dfrac{97\,522}{9\,999}$.

EXERCICE 65



EXERCICE 66

$\sqrt{9} = 3$ et 14 sont des éléments de $\mathbb{N}$.

$-10;\ \sqrt{9};\ -\sqrt{121}$ et 14 sont des éléments de $\mathbb{Z}$

$-10;\ 2,03;\ \sqrt{9};\ \dfrac{1}{5};\ -\sqrt{121};$ 14 sont des éléments de $\mathbb{D}$

$-10;\ 2,03;\ -\dfrac{2}{3};\ \sqrt{9};\ \dfrac{1}{5};\ -\sqrt{121};\ 14;\ \dfrac{1}{6}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 67

1. $A = 64 \quad B = 36 \quad C = 144$
$D = 100 \quad E = 81 \quad F = 9$.

2. $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$
$\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11 \quad \sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$
$\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13 \quad \sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$

EXERCICE 68

1. $A = 4 \times 2 = 2^2 \times 2 \quad B = 36 \times 2 = 6^2 \times 2$
$C = 25 \times 5 = 5^2 \times 5 \quad D = 16 \times 3 = 4^2 \times 3$
$E = 64 \times 2 = 8^2 \times 2 \quad F = 121 \times 3 = 11^2 \times 3$.

2. $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{125} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5} \quad \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3} = 4\sqrt{3}$
$\sqrt{128} = \sqrt{8^2 \times 2} = 8\sqrt{2} \quad \sqrt{363} = \sqrt{11^2 \times 3} = 11\sqrt{3}$

EXERCICE 69

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

- $\dfrac{3}{\sqrt{12}} = \dfrac{3\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}} = \dfrac{3\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{12}}{4}$
- $\dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
- $\dfrac{3}{2\sqrt{13}} = \dfrac{3\times\sqrt{13}}{2\sqrt{13}\times\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{26}$
- $\dfrac{7}{\sqrt{14}} = \dfrac{7\times\sqrt{14}}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = \dfrac{7\sqrt{14}}{14} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

EXERCICE 70

1. $A = \sqrt{14}\times\sqrt{2} = \sqrt{7\times 2^2} = 2\sqrt{7}$
2. $B = \sqrt{18}\times\sqrt{6} = \sqrt{3\times 6^2} = 6\sqrt{3}$
3. $C = \sqrt{3}\times\sqrt{15} = \sqrt{3^2\times 5} = 3\sqrt{5}$
4. $\sqrt{45}\times\sqrt{35} = \sqrt{3^2\times 5^2\times 7} = 15\sqrt{7}$

EXERCICE 71

1. $A = \sqrt{\dfrac{14}{7}} = \sqrt{2}$
2. $B = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $C = \sqrt{\dfrac{15\times 16}{15\times 5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{5}\sqrt{5}$
4. $D = \sqrt{\dfrac{9\times 5\times 2\times 9}{8\times 8\times 9}} = \dfrac{3}{8}\sqrt{10}$

EXERCICE 72

1. $\sqrt{96} = \sqrt{16\times 6} = 4\sqrt{6}$
   $\sqrt{150} = \sqrt{25\times 6} = 5\sqrt{6}$.
2. $A = 4\sqrt{6}+5\sqrt{6}-15\sqrt{6} = -6\sqrt{6}$.

EXERCICE 73

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$
$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.

EXERCICE 74

1. $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$ et $2,6457 < \sqrt{7} < 2,6458$.
2. $A = 2\sqrt{2}$ et $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$
   donc $2,8284 < 2\sqrt{2} < 1,8286$ ainsi $2,828 < A < 2,829$
   $B = \sqrt{2}\times\sqrt{7}$
   donc $1,4142\times 2,6457 < B < 1,4143\times 2,6458$.
   $3,7415 < 1,4142\times 2,6457 < 3,7416$
   et $3,7419 < 1,4143\times 2,6458 < 3,7420$
   ainsi $3,741 < B < 3,742$.

EXERCICE 75

1. $\left(\sqrt{a\times b}\right)^2 = a\times b = \left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2$.
   $\sqrt{a\times b}$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ étant positifs, on en conclut que $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.
2. Pour $b\neq 0$, $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$.
   $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ étant positifs,
   on en conclut que $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

EXERCICE 76

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\\ &= \left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}\sqrt{a}+\left(\sqrt{b}\right)^2\\ &\geqslant \left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\\ &\geqslant a+b\\ &\geqslant \left(\sqrt{a+b}\right)^2\end{aligned}$$

$\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ étant positifs, on en conclut que $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

EXERCICE 77

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors $\sqrt{2}$ s'écrit sous forme d'une fraction irréductible
Donc $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}^\star$ tels que a et b premiers entre eux.
En élevant au carré, on en déduit que $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$ donc
$a^2 = 2b^2$.
On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.
En effet, si a est impair alors a^2 est impair (voir exercice 16).
Puisque a est pair alors il existe un entier p tel que $a = 2p$ alors l'égalité $a^2 = 2b^2$ s'écrit $(2p)^2 = 2b^2$ soit $4p^2 = 2b^2$ ou encore $b^2 = 2p^2$.
On en déduit alors que b^2 est pair donc b est pair.
Ainsi a et b sont pairs ce qui contredit a et b premiers entre eux. On en déduit alors que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 78

1. $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$
   $\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=5\sqrt{3}$.
2. $A=8\sqrt{3}+9\sqrt{3}-25\sqrt{3}=-8\sqrt{3}$.

EXERCICE 79

$A=2\sqrt{36\times 5}+5\sqrt{16\times 5}-3\sqrt{25\times 5}$
$A=2\times 6\sqrt{5}+5\times 4\sqrt{5}-3\times 5\sqrt{5}$
$A=12\sqrt{5}+20\sqrt{5}-15\sqrt{5}$
Ainsi $A=17\sqrt{5}$.
$B=\sqrt{100\times 5}+7\sqrt{4\times 5}-6\sqrt{9\times 5}$
$B=10\sqrt{5}+7\times 2\sqrt{5}-6\times 3\sqrt{5}$
$B=10\sqrt{5}+14\sqrt{5}-18\sqrt{5}$
Ainsi $B=6\sqrt{5}$.

EXERCICE 80

$A=\sqrt{25\times 3}+4\sqrt{9\times 3}-5\sqrt{16\times 3}$
$A=5\sqrt{3}+4\times 3\sqrt{3}-5\times 4\sqrt{3}$
$A=5\sqrt{3}+12\sqrt{3}-20\sqrt{3}$
Ainsi $A=-3\sqrt{3}$.
$B=-3\sqrt{9\times 3}+\sqrt{25\times 3}-2\sqrt{36\times 3}$
$B=-3\times 3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-2\times 6\sqrt{3}$
$B=-9\sqrt{3}+5\sqrt{3}-12\sqrt{3}$
Ainsi $B=-16\sqrt{3}$.

EXERCICE 81

$A=2\sqrt{25\times 2}-5\sqrt{4\times 2}+3\sqrt{100\times 2}$
$A=2\times 5\sqrt{2}-5\times 2\sqrt{2}+3\times 10\sqrt{2}$
$A=10\sqrt{2}-10\sqrt{2}+30\sqrt{2}$
Ainsi $A=30\sqrt{2}$.
$B=2\sqrt{64\times 2}-3\sqrt{81\times 2}+2\sqrt{49\times 2}$
$B=2\times 8\sqrt{2}-3\times 9\sqrt{2}+2\times 7\sqrt{2}$
$B=16\sqrt{2}-27\sqrt{2}+14\sqrt{2}$
Ainsi $B=3\sqrt{2}$.

EXERCICE 82

$A=\sqrt{11\times 36}-\sqrt{11\times 49}+\sqrt{11\times 64}-\sqrt{11\times 25}+\sqrt{16\times 11}-\sqrt{81\times 11}$
$A=6\sqrt{11}-7\sqrt{11}+8\sqrt{11}-5\sqrt{11}+4\sqrt{11}-9\sqrt{11}$
D'où $A=-3\sqrt{11}$
$B=\sqrt{36\times 7}-\sqrt{9\times 5}+\sqrt{25\times 7}-\sqrt{5\times 25}+\sqrt{9\times 7}-\sqrt{64\times 5}$
$B=6\sqrt{7}-3\sqrt{5}+5\sqrt{7}-5\sqrt{5}+3\sqrt{7}-8\sqrt{5}$
D'où $B=14\sqrt{7}-16\sqrt{5}$.

EXERCICE 83

- $\sqrt{48+16}=\sqrt{64}=8$
- $\sqrt{48\times 16}=\sqrt{3\times 16\times 16}=16\sqrt{3}$
- $\sqrt{34-33}=\sqrt{1}=1$
- $\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$
- $\sqrt{13^2}-\sqrt{12^2}=13-12=1$
- $\sqrt{13^2}\times\left(\sqrt{144}-\sqrt{36}\right)=13\times(12-6)=13\times 6=78$
- $-\sqrt{30}\times\left(\sqrt{6}+\sqrt{54}\right)=-\sqrt{5\times 6^2}-\sqrt{5\times 6\times 6\times 9}$
  $=-6\sqrt{5}-18\sqrt{5}=-24\sqrt{5}$
- $\left(\sqrt{14}\right)^2-2\sqrt{36}=14-2\times 6=2$
- $\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{12+13}=2\times\sqrt{25}=2\times 5=10$.

EXERCICE 84

- $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\times 2\sqrt{6}=4\sqrt{18}+6\sqrt{12}=4\times 3\sqrt{2}+6\times 2\sqrt{3}$
  $=12\sqrt{2}+12\sqrt{3}$
- $\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{54}\right)=\sqrt{18}+\sqrt{162}=3\sqrt{2}+9\sqrt{2}=12\sqrt{2}$
- $\left(-3\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=9\times 3+9\times 3=54$
- $\left(5\sqrt{5}\right)^2-\left(-2\sqrt{2}\right)^2=25\times 5-4\times 2=117$
- $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\times\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)$
  $=3\sqrt{36}-3\sqrt{40}+2\sqrt{90}-2\sqrt{100}$
  $=3\times 6-3\times 2\sqrt{10}+2\times 3\sqrt{10}-2\times 10$
  $=-2$
- $\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)\times\left(\sqrt{24}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{144}-\sqrt{12}+\sqrt{192}-\sqrt{16}$
  $=12-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-4=8+6\sqrt{3}$.

EXERCICE 85

- $2\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}=2\times 6\times 3=36$
- $2\sqrt{5}\times 4\sqrt{15}=2\times 5\times 4\sqrt{3}=40\sqrt{3}$
- $\dfrac{3\sqrt{20}}{\sqrt{10}}=3\sqrt{2}$
- $\sqrt{5}\times 2\sqrt{45}=2\times 5\times 3=30$
- $6\sqrt{12}\times\sqrt{3}=6\times 3\times 2=36$
- $\dfrac{3}{\sqrt{27}}\times\sqrt{75}=\dfrac{3\times 5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=5$
- $2\sqrt{6}\times\sqrt{42}=2\times 6\sqrt{7}=12\sqrt{7}$
- $2\sqrt{7}\times\sqrt{14}=2\times 7\sqrt{2}=14\sqrt{2}$
- $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{25}}=\dfrac{2\times 2\times 3\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=\dfrac{12}{5}$.

EXERCICE 86

- $A=3\times 2-\sqrt{12}=6-2\sqrt{3}$

- $B = 10\times 3 - 35\sqrt{15} = 30 - 35\sqrt{15}$
- $C = 2\times 5 + 6\sqrt{10} + 6\sqrt{6} + 18\times 2 = 46 + 12\sqrt{6}$
- $D = 3\sqrt{21} + 6\times 7 - 7\times 3 - 14\sqrt{21} = 21 - 11\sqrt{21}.$

EXERCICE 87

- $A = \left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\times\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$
  $= 9\times 2 + 3\sqrt{12} + 3\sqrt{12} + 6$
  $= 24 + 6\sqrt{12} = 24 + 12\sqrt{3}.$
- $B = \left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)\times\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)$
  $= 4\times 3 + 6\sqrt{15} + 6\sqrt{15} + 9\times 5$
  $= 57 + 12\sqrt{15}.$
- $C = \left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)$
  $= 5 - 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} + 9\times 2$
  $= 23 - 6\sqrt{10}.$
- $D = \left(3\sqrt{7}-7\sqrt{3}\right)\times\left(3\sqrt{7}-7\sqrt{3}\right)$
  $= 9\times 7 - 21\sqrt{21} - 21\sqrt{21} + 49\times 3$
  $= 210 - 42\sqrt{21}.$

EXERCICE 88

$A = \left(4+5\sqrt{2}\right)\times\left(4+5\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2}+3\right)\times\left(3\sqrt{2}+7\right)$
$= 16 + 20\sqrt{2} + 20\sqrt{2} + 25\times 2 + 6\times 2 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21$
$= 99 + 63\sqrt{2}.$

$B = \left(3-2\sqrt{5}\right)\times\left(3-2\sqrt{5}\right) + \left(3\sqrt{5}+1\right)\times\left(5\sqrt{5}-3\right)$
$= 9 - 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 4\times 5 + 15\times 5 - 9\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 3$
$= 101 - 16\sqrt{5}.$

EXERCICE 89

$$A = \sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}.$$
$$= \sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+2}}}}}$$
$$= \sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+3}}}}$$
$$= \sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+4}}}$$
$$= \sqrt{43+\sqrt{31+5}} = \sqrt{43+6} = 7$$

$$B = \sqrt{5\times\sqrt{5\times\sqrt{5\times\sqrt{5^2}}}}.$$
$$= \sqrt{5\times\sqrt{5\times\sqrt{5\times 5}}}$$
$$= \sqrt{5\times\sqrt{5\times 5}} = \sqrt{5\times 5} = 5$$

$$C = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$$

$$C = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$$
$$= \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}} = \sqrt{6+\sqrt{9}} = \sqrt{9} = 3$$

$$D = \sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}} = \sqrt{2^8\,\frac{2^{22}+2^{12}}{2^{12}+2^{22}}}$$
$$= \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$$

EXERCICE 90

1. $(a+b)\times(a-b) = a^2 - a\times b - b\times a - b^2 = a^2 - b^2.$

2.
- $\left(\sqrt{5}-1\right)\times\left(\sqrt{5}+1\right) = 5-1 = 4$
- $\left(\sqrt{2}-3\right)\times\left(\sqrt{2}+3\right) = 2-9 = -7$
- $\left(2-\sqrt{3}\right)\times\left(2+\sqrt{3}\right) = 4-3 = 1$
- $\left(5-\sqrt{6}\right)\times\left(5+\sqrt{6}\right) = 25-6 = 19$
- $\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right) = 5-6 = -1$
- $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\times\left(2\sqrt{2}-\sqrt{10}\right) = 8-10 = -2$

EXERCICE 91

1. $A = \dfrac{c}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{c\times\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\times\left(a+\sqrt{b}\right)}$

En développant le numérateur et en utilisant le résultat de l'exercice précédent, on en déduit que $A = \dfrac{a\times c + c\times\sqrt{b}}{a^2-b}.$

2. $B = \dfrac{c}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{c\times\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\times\left(a+\sqrt{b}\right)}$

En développant le numérateur et en utilisant le résultat de l'exercice précédent, on en déduit que $B = \dfrac{a\times c - c\times\sqrt{b}}{a^2-b}.$

3. $C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{1-5} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}.$

$D = \dfrac{6-3\sqrt{6}}{4-6} = \dfrac{3\sqrt{6}-6}{2}$

$E = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3-2} = 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}.$

EXERCICE 92

- $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1$
- $\dfrac{3}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{1-3} = -\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}$
- $\dfrac{2}{4+\sqrt{5}} = \dfrac{8-2\sqrt{5}}{16-5} = \dfrac{8-2\sqrt{5}}{11}$
- $\dfrac{5}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{25+5\sqrt{3}}{25-3} = \dfrac{25+5\sqrt{3}}{22}$

- $\dfrac{-7}{\sqrt{10}-5} = \dfrac{-7\sqrt{10}-35}{10-25} = \dfrac{35+7\sqrt{10}}{15}$
- $\dfrac{-2}{\sqrt{3}-8} = \dfrac{-2\sqrt{3}-16}{3-64} = \dfrac{16+2\sqrt{3}}{61}$.

EXERCICE 93

- $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-2}$

  $= -1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

- $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-3}$

  $= \dfrac{2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{-2} = -\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$.

- $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{3-5}$

  $= \dfrac{\sqrt{15}-5}{-2} = -\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}$

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3}$

  $= \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$.

- $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-5} = \dfrac{\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+5\right)}{2-25}$

  $= \dfrac{2\sqrt{2}-6+10-15\sqrt{2}}{2-25} = \dfrac{13\sqrt{2}-4}{23}$

- $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{3-5}$

  $= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}+3-\sqrt{15}}{-2}$

  $= \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}-3+\sqrt{15}}{2}$

EXERCICE 94

1. $\varphi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{4}$

$\varphi^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. $\varphi^2 = \dfrac{2+1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2}{2}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi$.

3. $\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\times\left(1-\sqrt{5}\right)}$

$= \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$= \dfrac{1-2+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{2}{2} = \varphi - 1$

4. $\varphi^3 = \varphi\times\varphi^2 = \varphi\times\left(\varphi+1\right) = \varphi^2+\varphi =$

$1+\varphi+\varphi = 2\varphi+1$

EXERCICE 95

La somme des nombres de la diagonale est égale à $15\sqrt{2}$.

$4\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$
$8\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$

La somme des nombres de la colonne est égale à $15\sqrt{3}$.

$6\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$
$7\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$

EXERCICE 96

1. Le produit sur chaque ligne, colonne et diagonale est égal à $6\sqrt{210}$, le carré est donc multi-magique.

2. Le produit des facteurs de la ligne complète est égal à $128\sqrt{2}$.

2	$8\sqrt{2}$	8
$16\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
4	$2\sqrt{2}$	16

EXERCICE 97

- $1{,}5 \in [0\,;\,5]$
- $6 \in \left]\dfrac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$
- $\dfrac{24}{6} \notin [6\,;\,24]$
- $1{,}33 \notin \left[\dfrac{4}{3}\,;\,10\right]$
- $\sqrt{2} \in [1{,}4\,;\,24]$
- $\pi \notin]0\,;\,3{,}14]$
- $\dfrac{1}{6} \in \left[\dfrac{1}{8}\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$
- $-\dfrac{1}{3} \in]-0{,}3\,;\,0{,}3[$

EXERCICE 98

On remarque que : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{6}{9}$

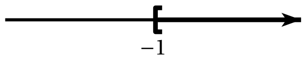
- $\left[0\,;\,\dfrac{4}{5}\right] = \left[0\,;\,\dfrac{12}{15}\right]$ donc $\dfrac{2}{3} \in \left[0\,;\,\dfrac{4}{5}\right]$
- $\left[\dfrac{3}{5}\,;\,1\right] = \left[\dfrac{9}{15}\,;\,\dfrac{15}{15}\right]$ donc $\dfrac{2}{3} \in \left[\dfrac{3}{5}\,;\,1\right]$
- $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{5}\right] = \left[\dfrac{5}{15}\,;\,\dfrac{6}{15}\right]$ donc $\dfrac{2}{3} \notin \left[\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{5}\right]$

- $\dfrac{2}{3} \in \left]-1\ ;\ \dfrac{7}{9}\right[$

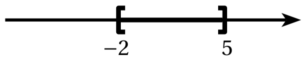
EXERCICE 99

1.


$I =]-\infty\ ;\ 3[$

2.


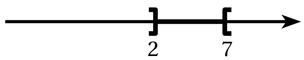
$I = [-1\ ;\ +\infty[$

3.


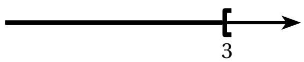
$I = [-2\ ;\ 5]$

4.

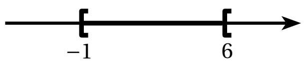

$I =]-\infty\ ;\ 0[$

5.


$I =]2\ ;\ 7[$

6.


$I =]-\infty\ ;\ 3[$

7.


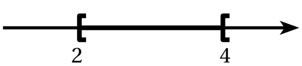
$I = [-1\ ;\ 6[$

EXERCICE 100

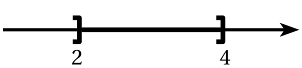
1. x est inférieur à 4, $I =]-\infty\ ;\ 4]$
2. x est compris entre -3 et 7, $I =]-3\ ;\ 7]$.
3. x est strictement supérieur à $\sqrt{2}$, $I = \left]\sqrt{2}\ ;\ +\infty\right[$.
4. x est supérieur à 2 et strictement inférieur à 7,5, $I = [2\ ;\ 7{,}5[$.
5. x est supérieur à 0, $I = [0\ ;\ +\infty[$.
6. x est compris strictement entre $-1{,}5$ et $3{,}2$, $I =]-1{,}5\ ;\ 3{,}2[$.

EXERCICE 101

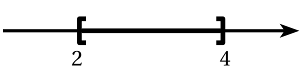
1. $I = [2\ ;\ 4[$



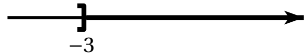
2. $I =]2\ ;\ 4]$



3. $I = [2\ ;\ 4]$



4. $I =]-3\ ;\ +\infty[$



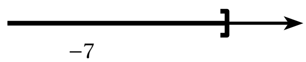
5. $I =]-\infty\ ;\ -3]$

6. $I = [-3\ ;\ +\infty[$

7. $I =]-\infty\ ;\ -3[$

8. $I =]2\ ;\ 4[$

9. $I =]-\infty\ ;\ -7[$



EXERCICE 102

1. $I = [2\ ;\ 3]$.
2. $I =]-\infty\ ;\ 2] \cup [3\ ;\ +\infty[$.
3. $I = [-1\ ;\ 8[$.
4. $I = \mathbb{R}$
5. $I =]-\infty\ ;\ 4] \cup [6\ ;\ +\infty[$
6. $I = [4\ ;\ 6]$.

EXERCICE 103

1. $[-2\ ;\ 3] \cap [1\ ;\ 5] = [1\ ;\ 3]$
2. $[-2\ ;\ 3] \cup [1\ ;\ 5] = [-2\ ;\ 5]$
3. $]-\infty\ ;\ 5] \cap [5\ ;\ +\infty] = \left\{5\right\}$
4. $]-\infty\ ;\ 5] \cup]5\ ;\ +\infty] = \mathbb{R}$
5. $[-5\ ;\ 0] \cap]3\ ;\ +\infty[= \varnothing$
6. $[-5\ ;\ 0] \cup]3\ ;\ +\infty[$ n'est pas simplifiable, les intervalles sont disjoints.

EXERCICE 104

1. Si $x \leqslant \dfrac{1}{3}$ alors $x \leqslant 0{,}3$

   Faux, en effet $0{,}33 \leqslant \dfrac{1}{3}$ et $0{,}33 > 0{,}3$.
2. Si $x \in \left[\dfrac{2}{3};3\right]$ alors $x \in [0{,}7;2]$

Faux, en effet $2,5 \in \left[\frac{2}{3};3\right]$ mais $2,5 \notin [0,7\ ;\ 2]$.

3. Si $x > \sqrt{2}$ alors $x > 1,4$
Vrai, car $\sqrt{2} > 1,4$.

4. Si $\in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$ alors $x \in [0;1]$
Vrai car $0 < \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} < 1$
donc si x est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, il est compris entre 0 et 1.

5. Si $x < \sqrt{2}$ alors $x \leqslant \sqrt{2}$
Vrai car si x est strictement inférieur à $\sqrt{2}$, il est aussi inférieur ou égal à $\sqrt{2}$.

6. Si $x \in [0;1]$ alors $x \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$
Faux en effet $0,2 \in [0;1]$ et $0,2 \notin \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

EXERCICE 105

1. $A = [5\ ;\ 18]$ et $B = [14\ ;\ 20]$.
2. $A =]-2\ ;\ 7]$ et $B = [-2\ ;\ 10]$
   ou $A = [-2\ ;\ 7]$ et $B =]-2\ ;\ 10]$
3. $A =]-3\ ;\ 2[$ et $B = [1\ ;\ 5[$.

EXERCICE 106

1. $I =]-\infty\ ;\ 0[$
2. $I =]-\infty\ ;\ 0[\cup [4\ ;\ 6]$.
3. $I = [0\ ;\ 1] \cup [2\ ;\ +\infty[$
4. $I = \emptyset$
5. $I = [2\ ;\ 4] \cup [0\ ;\ 3] = [0\ ;\ 4]$
6. $I = \mathbb{R}$
7. $I = [2\ ;\ 4] \cap [0\ ;\ 3] = [2\ ;\ 3]$
8. $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 107

- $-9 \notin A$ et $-9 \notin B$ donc $-9 \notin A \cap B$ et $-9 \notin A \cup B$.
- $-3 \in A$ et $-3 \notin B$ donc $-3 \notin A \cap B$ et $-3 \in A \cup B$.
- $1 \in A$ et $1 \notin B$ donc $1 \notin A \cap B$ et $1 \in A \cup B$.
- $0 \in A$ et $0 \in B$ donc $0 \in A \cap B$ et $0 \in A \cup B$.
- $5 \in A$ et $5 \in B$ donc $5 \in A \cap B$ et $5 \in A \cup B$.
- $49 \notin A$ et $49 \in B$ donc $49 \notin A \cap B$ et $49 \in A \cup B$.
- $60 \notin A$ et $60 \notin B$ donc $60 \notin A \cap B$ et $60 \notin A \cup B$.

EXERCICE 108

$A = 3$
$B = 6$
$C = 2$
$D = \sqrt{2} - 1$
$E = \sqrt{2} - 1$
$F = \frac{25}{3}$
$G = \sqrt{6} - \sqrt{5}$
$H = \frac{5}{3}$

EXERCICE 109

- $|5-\pi| = 5-\pi$
- $\left|2-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$
- $|2+3| = 5$
- $\left|3+\frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2}$
- $|\pi-3| = \pi-3$
- $|-3-6| = 9$
- $\left|1-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}$
- $\left|\frac{1}{2}-5\right| = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

EXERCICE 110

- $|x| \leqslant 1$ s'écrit encore $-1 \leqslant x \leqslant 1$ soit $x \in [-1\ ;\ 1]$
- $|x-3| \leqslant 2$ s'écrit encore $-2 \leqslant x-3 \leqslant 2$ donc $1 \leqslant x \leqslant 5$ ainsi $x \in [1\ ;\ 5]$
- $|x-8| \leqslant 3$ s'écrit encore $-3 \leqslant x-8 \leqslant 3$ donc $5 \leqslant x \leqslant 11$ ainsi $x \in [5\ ;\ 11]$
- $|x-2,5| \leqslant 5$ s'écrit encore $-5 \leqslant x-2,5 \leqslant 5$ donc $-2,5 \leqslant x \leqslant 7,5$ ainsi $x \in [-2,5\ ;\ 7,5]$

EXERCICE 111

- $x \in [-4\ ;\ 4]$ donc $|x| \leqslant 4$
- $x \in [0\ ;\ 4]$ on commence par déterminer le centre : $\frac{0+4}{2} = 2$.

Comme $0 \leqslant x \leqslant 4$ alors $0-2 \leqslant x-2 \leqslant 4-2$ (on retranche le centre aux trois membres des inégalités)
Ainsi $|x-2| \leqslant 2$.

- $x \in [1\ ;\ 5]$, le centre de l'intervalle est $\frac{1+5}{2} = 3$.

Comme $1 \leqslant x \leqslant 5$ alors $1-3 \leqslant x-3 \leqslant 5-3$
Ainsi $|x-3| \leqslant 2$.

- $x \in [0\ ;\ 1,2]$, le centre de l'intervalle est $0,6$.

Comme $0 \leqslant x \leqslant 1,2$ alors $-0,6 \leqslant x-0,6 \leqslant 0,6$
Ainsi $|x-0,6| \leqslant 0,6$.

EXERCICE 112

1. Avec une valeur absolue : $|x| = 3$,
   Sans valeur absolue : $x = 3$ ou $x = -3$.
2. Avec une valeur absolue : $|x-2| = 1,2$,
   Sans valeur absolue : $x-2 = 1,2$ ou $x-2 = -1,2$
   donc $x = 3,2$ ou $x = 0,8$.

3. Avec une valeur absolue : $\left|x+\dfrac{1}{3}\right|=1$,
Sans valeur absolue : $x+\dfrac{1}{3}=1$ ou $x+\dfrac{1}{3}=-1$
donc $x=\dfrac{2}{3}$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$.
4. Avec une valeur absolue : $\left|x-\sqrt{3}\right|=0,1$,
Sans valeur absolue : $x-\sqrt{3}=0,1$ ou $x-\sqrt{3}=-0,1$
donc $x=\sqrt{3}+0,1$ ou $x=\sqrt{3}-0,1$.
5. Avec une valeur absolue : $|x+2|=0,2$,
Sans valeur absolue : $x+2=0,2$ ou $x+2=-0,2$ donc $x=-1,8$ ou $x=-2,2$.
6. Avec une valeur absolue : $\left|x-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{1}{3}$,
Sans valeur absolue : $x-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{3}$ ou $x-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{3}$
donc $x=\dfrac{14}{15}$ ou $x=\dfrac{4}{15}$.
7. Avec une valeur absolue : $|x|=\sqrt{3}$,
Sans valeur absolue : $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.
8. Avec une valeur absolue : $\left|x+\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$,
Sans valeur absolue : $x+\sqrt{2}=\sqrt{2}$ ou $x+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$
donc $x=0$ ou $x=-2\sqrt{2}$.
9. Avec une valeur absolue : $\left|x+\dfrac{9}{5}\right|=\dfrac{1}{100}$,
Sans valeur absolue : $x+\dfrac{9}{5}=\dfrac{1}{100}$ ou $x+\dfrac{9}{5}=-\dfrac{1}{100}$
donc $x=-\dfrac{179}{100}$ ou $x=-\dfrac{181}{100}$.

EXERCICE 113

1. Avec une valeur absolue : $|x|\leqslant 3$,
Sans valeur absolue : $-3\leqslant x\leqslant 3$
Soit $x\in[-3\,;\,3]$.
2. Avec une valeur absolue : $|x-2|\leqslant 1,2$,
Sans valeur absolue : $-1,2\leqslant x-2\leqslant 1,2$
donc $0,8\leqslant x\leqslant 3,2$
Soit $x\in[0,8\,;\,3,2]$.
3. Avec une valeur absolue : $\left|x+\dfrac{1}{3}\right|\leqslant 1$,
Sans valeur absolue : $-1\leqslant x+\dfrac{1}{3}\leqslant 1$
donc $-\dfrac{4}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$
Soit $x\in\left[-\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$.
4. Avec une valeur absolue : $\left|x-\sqrt{3}\right|\leqslant 0,1$,
Sans valeur absolue : $-0,1\leqslant x-\sqrt{3}\leqslant 0,1$
donc $\sqrt{3}-0,1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}+0,1$
Soit $x\in\left[\sqrt{3}-0,1\,;\,\sqrt{3}+0,1\right]$.
5. Avec une valeur absolue : $|x+2|\leqslant 0,2$,
Sans valeur absolue : $-0,2\leqslant x+2\leqslant 0,2$
donc $-2,2\leqslant x\leqslant -1,8$
Soit $x\in[-2,2\,;\,-1,8]$.
6. Avec une valeur absolue : $\left|x-\dfrac{3}{5}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$,
Sans valeur absolue : $-\dfrac{1}{3}\leqslant x-\dfrac{3}{5}\leqslant\dfrac{1}{3}$
donc $\dfrac{4}{15}\leqslant x\leqslant\dfrac{14}{15}$
Soit $x\in\left[\dfrac{4}{15}\,;\,\dfrac{14}{15}\right]$.
7. Avec une valeur absolue : $|x|\leqslant\sqrt{3}$,
Sans valeur absolue : $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$
Soit $x\in\left[-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\right]$.
8. Avec une valeur absolue : $\left|x+\sqrt{2}\right|\leqslant\sqrt{2}$,
Sans valeur absolue : $-\sqrt{2}\leqslant x+\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}$
donc $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 0$
Soit $x\in\left[-2\sqrt{2}\,;\,0\right]$.
9. Avec une valeur absolue : $\left|x+\dfrac{9}{5}\right|\leqslant\dfrac{1}{100}$,
Sans valeur absolue : $-\dfrac{1}{100}\leqslant x+\dfrac{9}{5}\leqslant\dfrac{1}{100}$
donc $-1,81\leqslant x\leqslant -1,79$
Soit $x\in[-1,81\,;\,-1,79]$.

EXERCICE 114

1. Avec une valeur absolue : $|x|>3$,
Sans valeur absolue : $x>3$ ou $x<-3$
Soit $x\in\,]-\infty\,;\,-3]\cup]3\,;\,+\infty[$.
2. Avec une valeur absolue : $|x-2|>1,2$,
Sans valeur absolue : $x-2>1,2$ ou $x-2<-1,2$ donc $x>3,2$ ou $x<0,8$
Soit $x\in\,]-\infty\,;\,0,8]\cup]3,2\,;\,+\infty[$.
3. Avec une valeur absolue : $\left|x+\dfrac{1}{3}\right|>1$,
Sans valeur absolue : $x+\dfrac{1}{3}>1$ ou $x+\dfrac{1}{3}<-1$ donc $x>\dfrac{2}{3}$ ou $x<-\dfrac{4}{3}$
Soit $x\in\left]-\infty\,;\,-\dfrac{4}{3}\right]\cup\left]\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.
4. Avec une valeur absolue : $\left|x-\sqrt{3}\right|>0,1$,
Sans valeur absolue : $x-\sqrt{3}>0,1$ ou $x-\sqrt{3}<-0,1$
donc $x>\sqrt{3}+0,1$ ou $x<\sqrt{3}-0,1$
Soit $x\in\left]-\infty\,;\,\sqrt{3}-0,1\right]\cup\left]\sqrt{3}+0,1\,;\,+\infty\right[$.
5. Avec une valeur absolue : $|x+2|>0,2$,
Sans valeur absolue : $x+2>0,2$ ou $x+2<-0,2$ donc

$x > -1,8$ ou $x < -2,2$

Soit $x \in]-\infty\,;\,-2,2] \cup]-1,8\,;\,+\infty[$.

6. Avec une valeur absolue : $\left|x - \frac{3}{5}\right| > \frac{1}{3}$,

Sans valeur absolue : $x - \frac{3}{5} > \frac{1}{3}$ ou $x - \frac{3}{5} < -\frac{1}{3}$ donc $x > \frac{14}{15}$ ou $x < \frac{4}{15}$

Soit $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{4}{15}\right] \cup \left]\frac{14}{15}\,;\,+\infty\right[$.

7. Avec une valeur absolue : $|x| > \sqrt{3}$,

Sans valeur absolue : $x > \sqrt{3}$ ou $x < -\sqrt{3}$

Soit $x \in \left]-\infty\,;\,-\sqrt{3}\right] \cup \left]\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[$.

8. Avec une valeur absolue : $\left|x + \sqrt{2}\right| > \sqrt{2}$,

Sans valeur absolue : $x + \sqrt{2} > \sqrt{2}$ ou $x + \sqrt{2} < -\sqrt{2}$ donc $x > 0$ ou $x < -2\sqrt{2}$

Soit $x \in \left]-\infty\,;\,-2\sqrt{2}\right] \cup]0\,;\,+\infty[$.

9. Avec une valeur absolue : $\left|x + \frac{9}{5}\right| > \frac{1}{100}$,

Sans valeur absolue : $x + \frac{9}{5} > \frac{1}{100}$ ou $x + \frac{9}{5} < -\frac{1}{100}$ donc $x > -\frac{179}{100}$ ou $x < -\frac{181}{100}$

Soit $x \in]-\infty\,;\,-1,81] \cup]-1,79\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 115

1. On a $160-0,1 \leqslant L \leqslant 160+0,1$ et $90-0,1 \leqslant \ell \leqslant 90+0,1$ donc $159,9 \leqslant L \leqslant 160,1$ et $89,9 \leqslant \ell \leqslant 90,1$.
2. On sait que le périmètre est : $p = 2(L+\ell)$

D'après la question précédente :

$2 \times (159,9 + 89,9) \leqslant 2 \times (L+\ell) \leqslant 2 \times (160,1 + 90,1)$

D'où $499,6 \leqslant p \leqslant 500,4$.

3. On sait que l'aire est : $A = L \times \ell$.

Les valeurs étant positives, on a :

$159,9 \times 89,9 \leqslant L \times \ell \leqslant 160,1 \times 90,1$

D'où $14\,375,01 \leqslant A \leqslant 14\,425,01$

On en déduit alors que $14\,375 \leqslant L \times \ell \leqslant 14\,426$.

$c = \frac{14\,375 + 14\,426}{2} = 14\,400,5$

$r = 14426 - 14400,5 = 25,5$.

$14\,400,5$ m^2 est une valeur approchée de l'aire à $25,5$ m^2 près.

EXERCICE 116

1. $1,78 - 10^{-2} \leqslant x \leqslant 1,78 + 10^{-2}$ soit $1,77 \leqslant x \leqslant 1,79$.
2. $3,123 - 10^{-3} \leqslant x \leqslant 3,123 + 10^{-3}$ soit $3,122 \leqslant x \leqslant 3,124$.
3. $-0,43 - 0,02 \leqslant x \leqslant -0,43 + 0,02$ soit $-0,45 \leqslant x \leqslant -0,41$.
4. $0,55 \leqslant x \leqslant 0,55 + 10^{-2}$ soit $0,55 \leqslant x \leqslant 0,56$.
5. $1,42 - 10^{-2} \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$ soit $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$.
6. $1,73 - 10^{-2} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,73$ soit $1,72 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,73$.

EXERCICE 117

- $x \in [21\,;\,43]$ soit $|x - 32| \leqslant 11$
- $x \in [-2,8\,;\,-1,6]$ soit $|x - (-2,2)| \leqslant 0,6$

donc $|x + 2,2| \leqslant 0,6$

- $x \in [0,815\,;\,2,019]$ soit $|x - 1,417| \leqslant 0,602$
- $x \in]3,5\,;\,7,3[$ soit $|x - 5,4| < 1,9$.

EXERCICE 118

1. La fonction abs(x,y) détermine le centre (c) et le rayon (r) de l'intervalle $[x\,;\,y]$.
2. En entrant abs$(3,7)$, la fonction affiche $c = 5$, $r = 2$.
3.

```
def intervalle(c,r) :
    a = c - r
    b = c + r
    print("[ ", a, " ; " , b , " ] ")
```

EXERCICE 119

1. $x \in [-1\,;\,5] \cap [-1\,;\,3]$ donc $x \in [-1\,;\,3]$.
2. $x \in [-1\,;\,5] \cup [-1\,;\,3]$ donc $x \in [-1\,;\,5]$.
3. $x \in [-3\,;\,1] \cap]-2\,;\,8]$ donc $x \in]-2\,;\,1]$.
4. $x \in [-1\,;\,5] \cap \Big( ]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[\Big)$ donc $x \in [2\,;\,5]$.
5. $x \in \left[-3\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right] \cup \left[0\,;\,2\sqrt{2}\right]$ donc $x \in \left[-3\sqrt{2}\,;\,+2\sqrt{2}\right]$.
6. $x \in [-1,5\,;\,0,5] \cap [-0,5\,;\,1,5]$ donc $x \in [-0,5\,;\,0,5]$.

EXERCICE 120

1. Procédons de manière géométrique : soient A, B et M les points d'un axe des réels d'abscisses respectives 2, 5 et x.

L'égalité équivaut alors à $MA = MB$.

M est donc le milieu du segment $[AB]$.

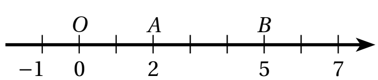
Donc $x = \frac{2+5}{2} = 3,5$.

2. En procédant de manière analogue, on obtient $x = \dfrac{-3+7}{2} = 2$.
3. En procédant de manière analogue, on obtient $x = \dfrac{1-1}{2} = 0$.
4. Il faut utiliser la méthode algébrique pour la dernière équation.
   Les deux nombres $x-2$ et $2x-6$ ont la même valeur absolue, donc :
   $x-2 = 2x-6$ ou $x-2 = -2x+6$
   • $x-2 = 2x-6 \implies x-2x = -6+2 \implies -x = -4$ soit $x = 4$
   • $x-2 = -2x+6 \implies x+2x = 6+2 \implies 3x = 8$ soit $x = \dfrac{8}{3}$.
   On en déduit que $x = 4$ ou $x = \dfrac{8}{3}$.

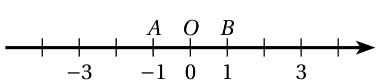
EXERCICE 121

On utilise une méthode géométrique : soient A, B et M les points d'un axe des réels d'abscisses respectives a, b et x.
L'égalité $|x-a| + |x-b| = c$ équivaut à $MA + MB = c$.

1. Ici $a = 2$ et $b = 5$, l'équation s'écrit $MA + MB = 8$.



   • Si $M \in [AB]$ alors $MA + MB = AB$ soit $MA + MB = 3$
   L'égalité n'est donc pas vérifiée lorsque $M \in [AB]$.
   • Si M appartient à la demi-droite d'origine A ne contenant pas B,
   la relation s'écrit $MA + MA + AB = 8$ or $AB = 3$ donc $AM = 2,5$ comme $x < 2$ alors $x = -0,5$.
   • Si M appartient à la demi-droite d'origine B ne contenant pas A,
   la relation s'écrit $MB + AB + MB = 8$ or $AB = 3$ donc $BM = 2,5$ comme $x > 5$ alors $x = 7,5$.
   Finalement, les solutions sont $\left\{-0,5\ ;\ 7,5\right\}$.
2. D'après la question précédente $M = A$ ou $M = B$
   Les solutions sont donc $\left\{2\ ;\ 5\right\}$.
3. Ici $a = -1$ et $b = 1$, l'équation s'écrit $MA + MB = 5$.



   • Si $M \in [AB]$ alors $MA + MB = AB$ soit $MA + MB = 2$
   L'égalité n'est donc pas vérifiée lorsque $M \in [AB]$.
   • Si M appartient à la demi-droite d'origine A ne contenant pas B,
   la relation s'écrit $MA + MA + AB = 5$ or $AB = 2$ donc $AM = 1,5$ comme $x < -1$ alors $x = -2,5$.
   • Si M appartient à la demi-droite d'origine B ne contenant pas A,
   la relation s'écrit $MB + AB + MB = 5$ or $AB = 2$ donc $BM = 1,5$ comme $x > 1$ alors $x = 2,5$.
   Finalement, les solutions sont $\left\{-2,5\ ;\ 2,5\right\}$.
4. D'après la question précédente $M = A$ ou $M = B$
   Les solutions sont donc $\left\{-1\ ;\ 1\right\}$.

EXERCICE 122

1. Une valeur absolue étant positive, une somme de valeurs absolues est également positive. L'inéquation proposée n'a donc aucune solution.
2. L'inégalité s'écrit encore $|x+2| \leqslant 3$
   donc $-3 \leqslant x+2 \leqslant 3$ ainsi $x \in [-5\ ;\ 1]$.
3. L'inégalité s'écrit encore $|x+3| \geqslant 4$
   donc $x+3 \leqslant -4$ ou $x+3 \geqslant 4$
   ainsi $x \in]-\infty\ ;\ -7] \cup [1\ ;\ +\infty[$.
4. L'inégalité s'écrit encore $|x-2| < 1$
   Donc $-1 < x-2 < 1$ ainsi $x \in]1\ ;\ 3[$.

EXERCICE 123

D'après l'énoncé, $4,57 \leqslant a \leqslant 4,58$ et $4,58 \leqslant b \leqslant 4,59$
On en déduit alors que $a \leqslant 4,58 \leqslant b$ les inégalités sont larges, l'égalité entre a et b est donc possible.
On n'a donc pas $a < b$.

EXERCICE 124

1. Pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-x-x^2+x^2}{1+x}$ donc
   $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{(1+x)-(1+x)x+x^2}{1+x} = 1-x+\dfrac{x^2}{1+x}$.
2. **a.** Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$
   Si $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$ alors $\dfrac{1}{4} \geqslant x^2 \geqslant 0$
   Ainsi pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right] : 0 \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$
   b. Si $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{1}{2} \leqslant x+1 \leqslant \dfrac{3}{2}$
   donc $2 \geqslant \dfrac{1}{1+x} \geqslant \dfrac{2}{3}$.

c. $x^2 \geqslant 0$ et $\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 2$ donc $0 \leqslant \frac{x^2}{1+x} \leqslant 2x^2$.

3. D'après les résultats précédents, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $1-x \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1-x+2x^2$
c'est-à-dire $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1+x}$ à $2x^2$ près.

4. **a.** On pose $x = 0,003 = 3\times 10^{-3}$ alors $1-x = 0,997$ et $2x^2 = 18\times 10^{-6}$
Ainsi $0,997 \leqslant \frac{1}{1,003} \leqslant 0,997 + 1,8\times 10^{-5}$
$0,997$ est la valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1,003}$ à $1,8\times 10^{-6}$ près.

b. On pose $x = -0,0008 = -8\times 10^{-4}$ alors
$1-x = 1,0008$ et $2x^2 = 128\times 10^{-8}$
Ainsi $1,0008 \leqslant \frac{1}{0,9992} \leqslant 1,0008 + 1,28\times 10^{-6}$
$1,0008$ est la valeur approchée par défaut de $\frac{1}{0,997}$ à $1,28\times 10^{-6}$ près.

c. $\frac{1}{2,005} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1,0025}$
On pose $x = 0,0025 = 2,5\times 10^{-3}$ alors $1-x = 0,9975$ et $2x^2 = 2\times 6,25\times 10^{-6}$
Ainsi $0,9975 \leqslant \frac{1}{1,0025} \leqslant 0,9975 + 2\times 6,25\times 10^{-6}$
donc $\frac{0,9975}{2} \leqslant \frac{1}{2,005} \leqslant \frac{0,9975+2\times 6,25\times 10^{-6}}{2}$
$\frac{0,9975}{2} = 0,49875$ et $\frac{6,25\times 10^{-6}}{2} = 6,25\times 10^{-6}$
$0,49875$ est la valeur approchée par défaut de $\frac{1}{2,005}$ à $6,25\times 10^{-6}$ près.

Exercice 125

1. $A = 6x+12$
2. $B = 15x-5xy$
3. $C = -3x+15$
4. $D = -3x+2x^2$

Exercice 126

1. $A = ab-2a+2b-ab+2a-2b = 0$
2. $B = ab-2a-b^2+2b+2b-ab-4+2a = -b^2+4b-4$
3. $C = 2a-2b-a^2+ab-ab-2b+2a+4 = -a^2+4a-4b+4$
4. $D = a^2-3a+ab-3b-ab-3b+3a+9 = a^2-6b+9$

Exercice 127

1. $A = x^2-2x-x+2+x^2-3x-2x+6 = 2x^2-8x+8$
2. $B = 6x-3x^2-2+x-2x+2x^2-3+3x = -x^2+8x-5$
3. $C = x^3+x^2y-xy-y^2+xy-x^2y = x^3-y^2$
4. $D = x^3+3x-2x^2-6-x^3-2x^2 = -4x^2+3x-6$

Exercice 128

1. $A = x^2+2\times x\times 1+1^2 = x^2+2x+1$
2. $B = x^2-2\times x\times 1+1^2 = x^2-2x+1$
3. $C = 4-4y+y^2$
4. $D = x^2-2^2 = x^2-4$

Exercice 129

1. $A = (2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2 = 4x^2+12x+9$
2. $B = 9x^2-12x+4$
3. $C = (2x)^2-2^5 = 4x^2-25$
4. $D = 81x^2-4$

Exercice 130

1. $A = 2(x+y)$
2. $B = 9(y-x)$
3. $C = b(a+3)$
4. $D = 13(7x-y)$

Exercice 131

1. $A = 4a(a-b)$
2. $B = xy(x-y)$
3. $C = (2b-a)(2a+b+b+2a) = (2b-a)(4a+2b)$
$C = 2(2b-a)(2a+b)$
4. $D = (x-2)\,[x+3-4(x-2)] = (x-2)(x+3-4x+8)$
$D = (x-2)(11-3x)$

Exercice 132

1. $(2x-1)(x+3) = 2x^2+5x-3$
2. $(x-2)(2x+3) = 2x^2-x-6$
3. $(x+3)(x-4) = x^2-x-12$
4. $(2x+3y)(4x-3y) = 8x^2+6xy-9y^2$

Exercice 133

1. $A = x^2+2\times x\times 3+3^2 = (x+3)^2$
2. $B = x^2-2\times x\times 5+5^2 = (x-5)^2$
3. $C = x^2-9^2 = (x+9)(x-9)$
4. $D = 4^2-y^2 = (4+y)(4-y)$

Exercice 134

1. $A = (2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2 = (2x+1)^2$
2. $B = (3x)^2-2\times(3x)\times 2+2^2 = (3x-2)^2$

3. $C = (x-3)^2$

4. $D = (5+6x)(5-6x)$

Exercice 135

1. $A = (13x+8)(13x-8)$

2. $B = [(2x-1)+(2-3x)]\,[(2x-1)-(2-3x)]$
$B = (2x-1+2-3x)\,(2x-1-2+3x)$
$B = (1-x)(5x-3)$

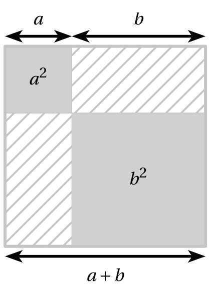
3. $C = [3x+(x+3)]\,[3x-(x+3)] = (4x+3)(2x-3)$

4. $D = [(x+1)-3]^2 = (x-2)^2$

Exercice 136

1. **a.** $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a^2+ab+ba+b^2$
Ainsi $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
b. $(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) = a^2-ab-ba+b^2$
Ainsi $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
c. $(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2$

2.



On considère un carré de côté $a+b$ et d'aire $(a+b)^2$. En pavant ce carré avec les deux carrés gris, on peut constater qu'il reste deux rectangles non occupés de largeur a et de longueur b qui ont pour aire $a\times b$.
En additionnant les aires correspondantes, on en déduit : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Exercice 137

1. $$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

Exercice 138

1. $$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3\\ &= (a+b)\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)\\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2\\ &\qquad +3ab^3+b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(a-b)^4 &= (a-b)(a-b)^3\\ &= (a-b)\left(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\right)\\ &= a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3-a^3b+3a^2b^2\\ &\qquad -3ab^3+b^4\\ &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) &= a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3\\ &\quad -a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4\\ &= a^4-b^4.\end{aligned}$$

Exercice 139

$n^3-n = n\left(n^2-1\right) = n(n+1)(n-1)$
n est un nombre entier donc $n-1$, n et $n+1$ sont trois entiers consécutifs.

Exercice 140

$A = n(n-1)(n+1)+n = n\left(n^2-1\right)+n$
$A = n^3-n+n = n^3$
Ainsi A est égal au cube de n.

Exercice 141

1. $x^2-6x+9 = x^2-2\times x\times 3+3^2 = (x-3)^2$.
L'affirmation 1 est vraie.

2. $-x^2+2x-1 = -\left(x^2-2x+1\right) = -(x-1)^2$
L'affirmation 2 est fausse.

3. $(-x-13)^2 = (-x)^2-2\times(-x)\times 13+13^2 = x^2+26x+169$
L'affirmation 3 est vraie.

4. $122\,237\,958\times 122\,237\,960 =$
$(122\,237\,959-1)\times(122\,237\,959+1)$
d'où $122\,237\,958\times 122\,237\,960 = 122\,237\,959^2-1^2$
$= 122\,237\,959^2-1$
L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 142

1. $$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= \left(x^2+2xy+y^2\right)-\left(x^2-2xy+y^2\right)\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\end{aligned}$$
d'où $(x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy$.

2. $(x+y)^2+(x-y)^2 = \left(x^2+2xy+y^2\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)$
$= x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2$
d'où $(x+y)^2-(x-y)^2 = 2\left(x^2+y^2\right)$.

3. $\left(x+y+z\right)^2 = x^2+2x(y+z)+(y+z)^2$
$= x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2$
d'où $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$.

EXERCICE 143

1. $(x+y+1)(x-y-1) = x^2-xy-x+xy-y^2-y+x-y-1$
$= x^2-y^2-2y-1.$
Ainsi $x^2-y^2-2y-1 = (x+y+1)(x-y-1)$.

2. $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = x^2y^2+x^2+y^2+1$
D'autre part :
$(xy+1)^2+(y-x)^2 = x^2y^2+2xy+1+y^2-2xy+x^2$
$= x^2y^2+x^2+y^2+1$
Ainsi $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = (xy+1)^2+(y-x)^2$.

3. $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) = x^2y^2-x^2-y^2+1$
D'autre part :
$(xy+1)^2-(x+y)^2 = x^2y^2+2xy+1-x^2-2xy-y^2$
$= x^2y^2-x^2-y^2+1$
Ainsi $\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) = (xy+1)^2-(x+y)^2$.

EXERCICE 144

1. $E(x) = 9x^2-30x+25+21x^2-12x-35x+20$
D'où $E(x) = 30x^2-77x+45$.

2. $E(x) = (3x-5)(3x-5+7x-4) = (3x-5)(10x-9)$.

3. Pour $x=0$, la forme développée est la plus simple :
$E(0) = 30\times 0^2-77\times 0+45 = 45$
Pour $x=0{,}9$, la forme factorisée est la plus simple :
$E(0{,}9) = (3\times 0{,}9)\times(10\times 0{,}9-9) = 0$
Pour $x=\sqrt{3}$, la forme développée est la plus simple :
$E\left(\sqrt{3}\right) = 30\times\left(\sqrt{3}\right)^2-77\sqrt{3}+45 = 90-77\sqrt{3}+45$
D'où $E\left(\sqrt{3}\right) = 135-77\sqrt{3}$.

EXERCICE 145

1. $E(x) = 9x^2+12x+4-3x^2-21x-2x-14$
D'où $E(x) = 6x^2-11x-10$.

2. $E(x) = (3x+2)\left((3x+2)-(x+7)\right)$
$= (3x+2)(3x+2-x-7)$
D'où $E(x) = (3x+2)(2x-5)$.

3. Pour $x=-\dfrac{2}{3}$, utilisons la forme initiale :
$E\left(-\dfrac{2}{3}\right) = (-2+2)^2-(-2+2)\left(-\dfrac{2}{3}+7\right) = 0.$
Pour $x=0$ utilisons la forme développée :
$E(0) = 9\times 0^2-11\times 0-10 = -10$
Pour $x=2{,}5$ utilisons la forme factorisée :
$E(2{,}5) = (7{,}5+2)(5-5) = 0.$

EXERCICE 146

1. $A(x) = 9x^2-4+3x^2-9x-2x+6$
D'où $A(x) = 12x^2-11x+2$.

2. $A(x) = (3x-2)(3x+2)+(3x-2)(x-3)$
D'où $A(x) = (3x-2)(4x-1)$.

3. Pour $x=\dfrac{2}{3}$, en utilisant la forme factorisée,
on obtient $A\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$.
Pour $x=3$, en utilisant la forme initiale,
on obtient $A(3) = 9\times 3^2-4 = 77$.
Pour $x=0$, en utilisant la forme factorisée,
on obtient $A(0) = 2$.

EXERCICE 147

1. $AH = AB-HB = 4-x$
On en déduit alors l'aire de $AHIJ$: $\mathcal{A} = (4-x)^2$.
L'aire hachurée est égale à l'aire du carré $AHIJ$ privée de l'aire du carré $AEFG$ ce qui correspond à M.

2. $Q = 16-8x+x^2-4 = x^2-8x+12$.

3. $Q = (4-x+2)(4-x-2) = (6-x)(2-x)$.

4. Pour $x=2$ on obtient $Q=0$, l'aire hachurée est nulle, les points E et H sont confondus.

EXERCICE 148

1. Pour $x=5$, $A = 5^2-4\times 6 = 1$
Pour $x=\dfrac{1}{3}$, $A = \dfrac{1}{9}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{4}{3}$
$A = \dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{9} = 1.$

2. $A = x^2-\left(x^2-x+x-1\right) = x^2-x^2+1 = 1.$

3. D'après le résultat précédent pour $x = 1\,234\,567\,890$, on a $A=1$.

EXERCICE 149

1. **a.** $2^2+2 = 6 = 9-3 = 3^2-3$
b. $3^2+3 = 12 = 16-4 = 4^2-4$
c. $15^2+15 = 240 = 256-16 = 16^2-16$

2. D'après les résultats précédents, on peut conjecturer que :
$115^2+115 = 116^2-116.$

3. Soit n un entier naturel strictement positif.
$(n-1)^2+(n-1)=n^2-2n+1+n-1=n^2-n.$

EXERCICE 150

1. $7=16-9=4^2-3^2$
$17=81-64=9^2-8^2$
$45=529-484=23^2-22^2.$

2. Tout entier impair s'écrit sous la forme $2n+1$, avec $n\in\mathbb{N}$.
$2n+1=n^2+2n+1-n^2=(n+1)^2-n^2.$
Ainsi tout entier impair est la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

EXERCICE 151

1. $A=(2-x)\Big[(3x+7)-(2x+1)\Big]=(2-x)(x+6)$

2. $B=(x-6)\Big[(2x+1)-1\Big]=2x(x-6)$

3. $C=(4x+1)\Big[(4x+1)-(5x+2)-1\Big]=(4x+1)(-x-2)$

4. $D=(3-2x)\Big[(3-2x)-(2x-1)+3\Big]=(3-2x)(7-4x)$

EXERCICE 152

1. $A=(x-2)\Big[(7x-3)-5\Big]=(x-2)(7x-8)$

2. $B=(x-1)\Big[2(x-1)+3\Big]=(x-1)(2x+1)$

3. $C=(3x-5)\Big[5-9-(x+1)\Big]=(3x-5)(-x-5)$

4. $D=(x+4y)(2+3x)$

EXERCICE 153

1. $A=(x+1)(x+2)-5(x+2)^2=(x+2)\Big[(x+1)-5(x+2)\Big]$
Ainsi $A=(x+2)(-4x-9)$.

2. $B=5(2x-1)+(2x-1)(2x+1)=(2x-1)(2x+6)$
Ainsi $B=2(2x-1)(x+3)$

3. $C=(x-1)^2-(x-3)^2$
$=\Big[(x-1)+(x-3)\Big]\Big[(x-1)-(x-3)\Big]$
$=(2x-4)\times 2$
Ainsi $C=4(x-2)$

4. $D=(2x+1)^2-9(2x+1)=(2x+1)(2x+1-9)$
$=(2x+1)(2x-8)$
Ainsi $D=2(2x+1)(x-4)$

EXERCICE 154

1. $A=(x+3)(x-3)+(x+3)(x-9)=(x+3)(2x-12)$
Ainsi $A=2(x+3)(x-6)$

2. $B=(4x-5)(4x+5)-(4x-5)(16x-25)$
$B=(4x-5)(4x+5-16x+25)=(4x-5)(-12x+30)$
Ainsi $B=6(4x-5)(5-2x)$.

3. $C=8(x-5)^2+3(x-1)(x-5)$
$C=(x-5)\Big[8(x-5)+3(x-1)\Big]$
Ainsi $C=(x-5)(11x-43)$

4. $D=(x-4)(x-4)-2(x+4)(x-16)$
$D=(x+4)\Big[(x-4)-2(x-16)\Big]$
$D=(x+4)(28-x)$

EXERCICE 155

Soit $n-1$, n et $n+1$ trois entiers naturels consécutifs.
Le produit de ces trois entiers est égal à $P=n(n-1)(n+1)$
La somme de ces trois entiers est égale à $S=3n$.
$\dfrac{P}{S}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{3}=\dfrac{n^2-1}{3}$
On cherche donc n tel que $\dfrac{n^2-1}{3}=16$
Donc $n^2=3\times16+1=49$.
On en déduit que $n=7$, les trois entiers sont donc 6, 7 et 8.
Vérification : $\dfrac{6\times7\times8}{6+7+8}=\dfrac{336}{21}=16.$

EXERCICE 156

$1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n^2-1}{n^2}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$
D'où $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}.$
$S=\dfrac12\times\dfrac32\times\dfrac23\times\dfrac43\times\dfrac34\times\dfrac54\times\cdots\dfrac{2020}{2021}\times\dfrac{2022}{2021}\times\dfrac{2021}{2022}\times\dfrac{2023}{2022}$
On remarque que $\dfrac32\times\dfrac23=1$, $\dfrac43\times\dfrac34=1,\cdots$
$\dfrac{2022}{2021}\times\dfrac{2021}{2022}=1$
On en déduit alors que $S=\dfrac12\times\dfrac{2023}{2022}=\dfrac{2023}{4044}.$

EXERCICE 157

• $1^2+2^2=5$ et $\dfrac{3^2+1}{2}=\dfrac{10}{2}=5$
donc $1^2+2^2=\dfrac{3^2+1}{2}$
On vérifie de même les autres égalités.
Conjecture : Pour tout n entier strictement positif,
$n^2+(n+1)^2=\dfrac{(2n+1)^2+1}{2}.$
Démonstration :
$n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1=\dfrac12\left(4n^2+4n+2\right)$
On remarque que $4n^2+4n+2=(2n+1)^2+1$

D'où $n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(2n+1)^2+1}{2}$.

EXERCICE 158

• $1\times2\times3\times4+1=25$ et $(1\times4+1)^2=5^2=25$

donc $1\times2\times3\times4+1=(1\times4+1)^2$

On vérifie de même les autres égalités.

Conjecture : Pour tout entier n strictement positif,
$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=\left(n(n+3)+1\right)^2$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}&n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1\\&\quad=n(n+3)\left(n^2+3n+2\right)+1\end{aligned}$$

D'autre part $n^2+3n+2=n(n+3)+2$, d'où

$$\begin{aligned}n(n+3)\left(n^2+3n+2\right)+1&=\left(n(n+3)\right)^2+2n(n+3)+1\\&=\left[(n(n+3))+1\right]^2\end{aligned}$$

Ainsi $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=\left[(n(n+3))+1\right]^2$.

EXERCICE 159

$1^2+2^2+(1\times2)^2=1+4+4=9$ $(1\times2+1)^2=3^2=9$

D'où $1^2+2^2+(1\times2)^2=(1\times2+1)^2$

On vérifie de même les autres égalités.

Conjecture : Pour tout entier n strictement positif,
$n^2+(n+1)^2+(n(n+1))^2=(n(n+1)+1)^2$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}n^2+(n+1)^2+(n(n+1))^2&=2n^2+2n+1+(n(n+1))^2\\&=(n(n+1))^2+2n(n+1)+1\\&=(n(n+1)+1)^2\end{aligned}$$

Ainsi $n^2+(n+1)^2+(n(n+1))^2=(n(n+1)+1)^2$.

EXERCICE 160

Pour tout n entier naturel strictement positif :

$$\begin{aligned}&n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2\\&\quad=n^2-n^2-2n-1-n^2-4n-4+n^2+6n+9\end{aligned}$$

D'où $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$

Chaque parenthèse est donc égale à 4.

D'autre part : $5=2\times2+1$, $2021=2\times1010+1$

Il y a donc au total 1010 parenthèses, on en déduit alors que la somme est égale à 4×1010 soit 4040.

EXERCICE 161

1. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ or $(a-b)^2\geqslant0$
   D'où $a^2+b^2\geqslant2ab$.
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\leqslant a^2+a^2+b^2+b^2$ (d'après (1))
   D'où $(a+b)^2\leqslant2\left(a^2+b^2\right)$.
3. On obtient $b^2+c^2\geqslant2bc$ et $a^2+c^2\geqslant2ac$
   D'après les inégalités précédentes :
   $2a^2+2b^2+2c^2\geqslant2ab+2bc+2ac$
   Soit encore $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

EXERCICE 162

1. $$\begin{aligned}3x+2=0&\iff 3x+2-2=0-2\\&\iff 3x=2\\&\iff \frac{3x}{3}=\frac{2}{3}\\&\iff x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{3x}{2}-\frac{1}{4}=0&\iff \frac{3x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0+\frac{1}{4}\\&\iff \frac{3x}{2}=\frac{1}{4}\\&\iff \frac{3x}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\\&\iff x=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}5x-8=0&\iff 5x-8+8=0+8\\&\iff 5x=8\\&\iff \frac{5x}{5}=\frac{8}{5}\\&\iff x=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{1}{3}x+3=0&\iff \frac{1}{3}x+3-3=0-3\\&\iff \frac{1}{3}x=-3\\&\iff 3\times\frac{1}{3}x=-3\times3\\&\iff x=-9\end{aligned}$$

EXERCICE 163

1. $$\begin{aligned}2x-3=x+7&\iff 2x-x=7+3\\&\iff x=10\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}-5x+2=9x-5&\iff -5x-9x=-5-2\\&\iff -14x=-7\\&\iff x=\frac{-7}{-14}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}4(x+2)=3(5x-3)&\iff 4x+8=15x-9\\&\iff 4x-15x=-9-8\\&\iff -11x=-17\\&\iff x=\frac{-17}{-11}=\frac{17}{11}\end{aligned}$$

4. $3(x-2)=7(2-3x) \iff 3x-6=14-21x$

$\iff 3x+21x=14+6$

$\iff 24x=20$

$\iff x=\dfrac{20}{24}=\dfrac{5}{6}$

EXERCICE 164

1. $2(x+2)-3(x-1)=4(3-x) \iff 2x+4-3x+3=12-4x$

$\iff 2x-3x+4x=12-4-3$

$\iff 3x=5$

$\iff x=\dfrac{5}{3}$

2. $3(2x-1)-4(1+x)=2(x+3) \iff 6x-3-4-x=2x+6$

$\iff 6x-x-2x=6+3+4$

$\iff 3x=13 \iff x=\dfrac{13}{3}$

3. $5(3x-1)-(1-2x)=3(5x-2)$

$\iff 15x-5-1+2x=15x-6$

$\iff 2x=0 \iff x=0$

4. $7(x-9)-3(2-3x)=5(6-4x)$

$\iff 7x-63-6+9x=30-20x$

$\iff 7x+9x+20x=30+63+6$

$\iff 36x=99 \iff x=\dfrac{99}{36}=\dfrac{11}{4}$

EXERCICE 165

1. $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{x-1}{6}$

$\iff \dfrac{3(3x-1)}{6}+\dfrac{2(2x-3)}{6}=\dfrac{x-1}{6}$

$\iff 3(3x-1)+2(2x-3)=x-1$

$\iff 9x-3+4x-6=x-1$

$\iff 9x+4x-x=3+6-1$

$\iff 12x=8 \iff x=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$

2. $\dfrac{1-x}{4}-\dfrac{3x-2}{3}=\dfrac{2x+5}{6}$

$\iff \dfrac{3(1-x)}{12}-\dfrac{4(3x-2)}{12}=\dfrac{2(2x+5)}{12}$

$\iff 3(1-x)-4(3x-2)=2(2x+5)$

$\iff 3-3x-12x+8=4x+10$

$\iff -3x-12x-4x=10-3-8$

$\iff -19x=-1 \iff x=\dfrac{1}{19}.$

3. $\dfrac{5(x-2)}{8}+\dfrac{3(1-2x)}{5}=\dfrac{2x-5}{10}$

$\iff \dfrac{25(x-2)}{40}+\dfrac{24(1-2x)}{40}=\dfrac{4(2x-5)}{40}$

$\iff 25x-50+24-48x=8x-20$

$\iff 25x-48x-8x=-20+50-24$

$\iff -31x=6 \iff x=-\dfrac{6}{31}.$

4. $\dfrac{4x-3}{4}-\dfrac{3x-8}{8}=\dfrac{5x+2}{2}+\dfrac{2(3x-5)}{7}$

$\iff \dfrac{14(4x-3)}{56}-\dfrac{7(3x-8)}{56}=\dfrac{28(5x+2)}{56}+\dfrac{16(3x-5)}{56}$

$\iff 14(4x-3)-7(3x-8)=28(5x+2)+16(3x-5)$

$\iff 56x-42-21x+56=140x+56+48x-80$

$\iff -153x=-38 \iff x=\dfrac{-38}{-153}=\dfrac{38}{153}.$

EXERCICE 166

1. $(x+4)(x+1)=0 \iff x+4=0$ ou $x+1=0$

Les solutions sont $x=-1$ et $x=-4$.

2. $(x+3)(3x-2)=0 \iff x+3=0$ ou $3x-2=0$

Les solutions sont $x=-3$ et $x=\dfrac{2}{3}$

3. $(2x+3)(3x+2)=0 \iff 2x+3=0$ ou $3x+2=0$

Les solutions sont $x=-\dfrac{3}{2}$ et $x=-\dfrac{2}{3}$

4. $(4x-7)(3x+4)=0 \iff 4x-7=0$ ou $3x+4=0$

Les solutions sont $x=\dfrac{7}{4}$ et $x=-\dfrac{4}{3}$.

EXERCICE 167

1. $4x^2-(x+1)^2=0 \iff (2x+x+1)(2x-x-1)=0$

$\iff (3x+1)(x-1)=0$

$\iff 3x+1=0$ ou $x-1=0$

Les solutions sont donc $x=-\dfrac{1}{3}$ et $x=1$.

2. $(2x+1)^2-(x+3)^2=0$

$\iff (2x+1+x+3)(2x+1-x-3)=0$

$\iff (3x+4)(x-2)=0$

$\iff 3x+4=0$ ou $x-2=0$

Les solutions sont donc $x=-\dfrac{4}{3}$ et $x=2$.

3. $\left(4x^2+4x+1\right)-(x-2)(2x+1)=0$

$\iff (2x+1)^2-(x-2)(2x+1)=0$

$\iff (2x+1)\Big((2x+1)-(x-2)\Big)=0$

$\iff (2x+1)(x+3)=0$

$\iff 2x+1=0$ ou $x+3=0$

Les solutions sont donc $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=-3$.

4. $(x+2)(x+3)+(x-5)(x+2)=0$

$\iff (x+2)\Big((x+3)+(x-5)\Big)=0$

$\iff (x+2)(2x-2)=0$

$\iff x+2=0$ ou $2x-2=0$

Les solutions sont donc $x=-2$ et $x=1$.

EXERCICE 168

1. $2x+3\geqslant 0 \iff 2x+3-3\geqslant 0-3$
$\iff 2x\geqslant -3 \iff \dfrac{2x}{2}\geqslant -\dfrac{3}{2} \iff x\geqslant -\dfrac{3}{2}$

Donc $\mathcal{S}=\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. $3x-5\leqslant 0 \iff 3x-5+5\leqslant 0+5$
$\iff 3x\leqslant 5 \iff \dfrac{3x}{3}\leqslant \dfrac{5}{3} \iff x\leqslant \dfrac{5}{3}$

Donc $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{3}\right]$.

3. $6-9x<0 \iff 6-9x-6<0-6$
$\iff -9x<-6 \iff \dfrac{-9x}{-9}>\dfrac{-6}{-9} \iff x>\dfrac{2}{3}$

Donc $\mathcal{S}=\left]\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

4. $-2x-6>0 \iff -2x-6+6<0+6$
$\iff -2x<6 \iff \dfrac{-2x}{-2}>\dfrac{6}{-2} \iff x>-3$

Donc $\mathcal{S}=]-3\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 169

1. $2(x+1)\leqslant 3x-4 \iff 2x-3x\leqslant -4-2$
$\iff -x\leqslant -6 \iff x\geqslant 6$

Donc $\mathcal{S}=[6\,;\,+\infty[$.

2. $3(x-1)>5(x-2) \iff 3x-5x>-10+3$
$\iff -2x>-7 \iff x<\dfrac{7}{2}$

Donc $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$.

3. $0,9x-2,5\geqslant 2-3,6x \iff 0,9x+3,6x\geqslant 2+2,5$
$\iff 4,5x\geqslant 4,5 \iff x\geqslant 1$

$\mathcal{S}=[1\,;\,+\infty[$.

4. $-3,5x+3\leqslant 1,5x-8 \iff -3,5x-1,5x\leqslant -8-3$
$\iff -5x\leqslant -11 \iff x\geqslant \dfrac{11}{5}$

$\mathcal{S}=\left[\dfrac{11}{5}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 170

1. $2(x+3)+6(x-2)\leqslant 3(x-3) \iff 8x-6\leqslant 3x-9$
$\iff 5x\leqslant -3$
$\iff x\leqslant -\dfrac{3}{5}$

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{5}\right]$.

2. $9(2-3x)\geqslant 2(5x-3)+3(3-2x) \iff 18-27x\geqslant 4x+3$
$\iff -4x-27x\geqslant 3-18$
$\iff -31x\geqslant -15$
$\iff x\leqslant \dfrac{15}{31}$

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{15}{31}\right]$.

3. $3(2+5x)-x-3\leqslant 14x+7 \iff 14x+3\leqslant 14x+7$
$\iff 3\leqslant 7$

Cette inégalité est toujours vraie donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

4. $-7x+3+6(2x-3)<5+2x \iff 5x-15<5+2x$
$\iff 3x<20$
$\iff x<\dfrac{20}{3}$

$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{20}{3}\right[$.

5. $4(x+1)+2(x-2)>3-2(x+2) \iff 6x>-2x-1$
$\iff 8x>-1 \iff x>-\dfrac{1}{8}$

$\mathcal{S}=\left]-\dfrac{1}{8}\,;\,+\infty\right[$.

6. $5x+2+3(x-9)\geqslant 8x+5 \iff 8x-25\geqslant 8x+5$
$\iff -25\geqslant 5$

Cette inégalité est fausse, il n'existe donc aucun réel vérifiant l'inéquation. On a donc $\mathcal{S}=\varnothing$

EXERCICE 171

1. $\dfrac{7x-3}{2}+\dfrac{9x+4}{8}>0 \iff \dfrac{4(7x-3)}{8}+\dfrac{9x+4}{8}>0$
$\iff 4(7x-3)+(9x+4)>0$
$\iff 37x-8>0$
$\iff x>\dfrac{8}{37}$

$\mathcal{S}=\left]\dfrac{8}{37}\,;\,+\infty\right[$.

2. $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{3x-1}{5}\leqslant\dfrac{x+1}{6}$
$\iff \dfrac{10(2x+1)}{30}-\dfrac{6(3x-1)}{30}\leqslant\dfrac{5(x+1)}{30}$
$\iff 10(2x+1)-6(3x-1)\leqslant 5(x+1)$
$\iff 2x+16\leqslant 5x+5$
$\iff -3x\leqslant -11 \iff x\geqslant\dfrac{11}{3}$

$\mathcal{S}=\left[\dfrac{11}{3}\,;\,+\infty\right[$.

3. $\dfrac{5x-2}{9}-\dfrac{2-5x}{3}>x+2$
$\iff \dfrac{5x-2}{9}-\dfrac{3(2-5x)}{9}>\dfrac{9(x+2)}{9}$
$\iff 5x-2-3(2-5x)>9(x+2)$
$\iff 20x-8>9x+18 \iff 11x>26$

$$\iff x > \frac{26}{11}$$

$\mathcal{S} = \left]\frac{26}{11}\,;\,+\infty\right[$.

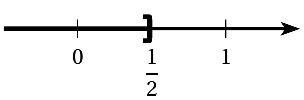
4. $\dfrac{x-1}{3} + 3 \geqslant 5 - \dfrac{3-5x}{2}$

$$\iff \frac{2(x-1)}{6} + \frac{18}{6} \geqslant \frac{30}{6} - \frac{3(3-5x)}{6}$$
$$\iff 2(x-1)+18 \geqslant 30-3(3-5x)$$
$$\iff 2x+16 \geqslant 21+15x$$
$$\iff -13x \geqslant 5 \iff x \leqslant -\frac{5}{13}$$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{5}{13}\right]$.

EXERCICE 172

1. On remplace x par 0 dans l'inéquation, on obtient : $-5 \leqslant \dfrac{3}{2}$
   Cette inégalité est vraie, 0 est donc solution de cette inéquation.
2. On remplace x par 1 dans l'inéquation, on obtient : $-3 \leqslant -\dfrac{19}{2}$
   Cette inégalité est fausse, 1 n'est donc pas solution de cette inéquation.
3. **a.** $2x-5 \leqslant \dfrac{3}{2} - 11x \iff 4x-10 \leqslant 3-22x$
   $$\iff 26x \leqslant 13 \iff x \leqslant \frac{1}{2}$$
   b.



EXERCICE 173

Pour résoudre l'équation $f(x) = k$, dans chaque cas on trace la droite d'équation $y = k$, les solutions sont les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe de f.

1. $f(x) = 2$ pour $x \approx 2,6$
2. $f(x) = -3$ pour $x \approx -3,1$
3. $f(x) = 4$ pour $x \approx 3,4$
4. $f(x) = -1$ pour $x \approx -2,1$
5. $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$
6. $f(x) < 3$ pour $x < 3,1$
7. $-6 \leqslant f(x) \leqslant -2$ pour $-4 \leqslant x \leqslant -2,6$.

EXERCICE 174

1. $g(x) = 2$ admet 4 solutions.
2. $g(x) = 0,5$ admet 4 solutions.
3. $g(x) = 3$ admet une solution.
4. $g(x) = -1$ n'admet aucune solution.
5. $g(x) = 0$ admet 2 solutions.
6. $g(x) = 1,5$ admet 6 solutions.

EXERCICE 175

1. $x^2 - x - 1 = 0 \iff x^2 - x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} - 1 = 0$

$$\iff x^2 - 2\times\frac{1}{2}\times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

2. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

On en déduit alors que $x^2 - x - 1 = 0$ si et seulement si $x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$ ou $x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$.

(E) admet donc deux solutions : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 176

1. $\left(\dfrac{x}{8}\right)^2 - x + 12 = 0 \iff \left(\dfrac{x}{8}\right)^2 - x + 16 - 4 = 0$

$$\iff \left(\frac{x}{8}\right)^2 - 2\times\frac{x}{8}\times 4 + 4^2 - 4 = 0$$
$$\iff \left(\frac{x}{8}-4\right)^2 - 4 = 0.$$

2. Soit x le nombre total d'enfants. Le problème s'écrit alors $\left(\dfrac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$

Ou encore $\left(\dfrac{x}{8}\right)^2 - x + 12 = 0$

D'après le résultat précédent, cette équation est équivalente à $\left(\dfrac{x}{8}-4\right)^2 - 4 = 0$.

De plus $\left(\dfrac{x}{8}-4\right)^2 - 4 = 0 \iff \left(\dfrac{x}{8}-4\right)^2 - 2^2 = 0$

$$\iff \left(\frac{x}{8}-4+2\right)\left(\frac{x}{8}-4-2\right) = 0$$
$$\iff \left(\frac{x}{8}-2\right)\left(\frac{x}{8}-6\right) = 0$$
$$\iff \left(\frac{x}{8}-2 = 0 \text{ ou } \frac{x}{8}-6 = 0\right)$$

$\dfrac{x}{8} - 2 = 0 \iff x = 16$ et $\dfrac{x}{8} - 6 = 0 \iff x = 48$

Deux solutions : il y avait 16 ou 48 enfants.

EXERCICE 177

1. $\begin{cases} 1,5(x+2) \leqslant 3(0,8x+2) \\ 5(x+2)-2x \leqslant 2(x+4) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 1,5x+3 \leqslant 2,4x+6 \\ 3x+10 \leqslant 2x+8 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -0,9x \leqslant 3 \\ x \leqslant -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{10}{3} \\ x \leqslant -2 \end{cases}$

Donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{10}{3}\ ;\ -2\right]$.

2. $\begin{cases} 3(14x-3) > 3x+4 \\ 4(x-4) > 3x-14 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 42x-9 > 3x+4 \\ 4x-16 > 3x-14 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 39x > 13 \\ x > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x > 2 \end{cases}$

Donc $\mathcal{S} =]2\ ;\ +\infty[$

EXERCICE 178

1. $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7} > 4x+7 \\ 2x+16 > \dfrac{9x+2}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 42x+5 > 28x+49 \\ 4x+32 > 9x+2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 14x > 44 \\ -5x > -30 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \dfrac{22}{7} \\ x < 6 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \left]\dfrac{22}{7}\ ;\ 6\right[$.

2. $\begin{cases} 15x-2 > x+\dfrac{1}{3} \\ 4(x-2) < 3x-15 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 45x-6 > 3x+1 \\ 4x-8 < 3x-15 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 42x > 7 \\ x < -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ x < -7 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \emptyset$.

EXERCICE 179

1. $\begin{cases} (2x+1)^2-(x+2)^2 > 0 \\ 4x^2-16 < 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (2x+1+x+2)(2x+1-x-2) > 0 \\ (2x+4)(2x-4) < 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3(x+1)(x-1) > 0 \\ 4(x+2)(x-2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)(x-1) > 0 \\ (x+2)(x-2) < 0 \end{cases}$

Pour terminer la résolution, le plus simple est d'établir un tableau de signe de chaque inégalité :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+2)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \Big(]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[\Big) \cap]-2\ ;\ 2[=]-2\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ 2[$.

2. $\begin{cases} (2-3x)^2-(3x+1)^2 \leqslant 0 \\ 36x^2-81 \leqslant 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (2-3x+3x+1)(2-3x-3x-1) \leqslant 0 \\ (6x+9)(6x-9) \leqslant 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3(1-6x) \leqslant 0 \\ 9(2x+3)(2x-3) \leqslant 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 1-6x \leqslant 0 \\ (2x+3)(2x-3) \leqslant 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{6} \\ (2x+3)(2x-3) \leqslant 0 \end{cases}$

Etablissons un tableau de signe pour la seconde inégalité :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $(2x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(2x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(2x+3)(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[\cap \left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right] = \left[\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

EXERCICE 180

Soit a le nombre d'années, le problème s'écrit :

$a+26 = 2(a+11) \iff a+26 = 2a+22$

$\iff a = 4$

Dans 4 ans, Marc aura 15 ans, Pierre en aura 30, soit le double de l'âge de Marc.

EXERCICE 181

Soit x la somme reçue par le benjamin, le cadet reçoit alors $x+1000$, l'aîné reçoit $x+3000$.

On en déduit l'équation : $x+x+1\,000+x+3000 = 16\,000$.

Cette équation est équivalent à $3x = 12\,000$

Donc $x = \dfrac{12\,000}{3} = 4\,000$.

L'aîné, le cadet et le benjamin héritent respectivement de $7\,000$, $5\,000$ et $4\,000$ €.

EXERCICE 182

Soit x le nombre recherché. Ce nombre vérifie donc :

$$\left[\left(\left(\left(\frac{\frac{x}{5}+6}{7}-8\right)\times 9\right)+114\right)\times 3\right]-4 = x$$

$$\iff \left[\left(\left(\left(\frac{x}{35}+\frac{6}{7}-8\right)\times 9\right)+114\right)\times 3\right]-4 = x$$

$$\iff \left[\left(\left(\left(\frac{x}{35}-\frac{50}{7}\right)\times 9\right)+114\right)\times 3\right]-4 = x$$

$$\iff \left[\left(\frac{9x}{35}-\frac{450}{7}+114\right)\times 3\right]-4 = x$$

$$\iff \left[\left(\frac{9x}{35}+\frac{348}{7}\right)\times 3\right]-4 = x$$

$$\iff \frac{27x}{35}+\frac{1044}{7}-4 = x$$

$$\iff \frac{27x}{35}+\frac{1016}{7} = x$$

$$\iff 25x+5\times 1016 = 35x \iff 8x = 5080$$

soit $x = \dfrac{5080}{8} = 635$

EXERCICE 183

Soit x l'âge de la fille de Mathilde, Mathilde a alors $x+27$ ans.

Dans 6 ans, Mathilde aura $x+33$ ans, sa fille $x+6$ ans.

Mathilde aura un âge double de celui de sa fille soit : $x+33 = 2(x+6)$.

La résolution de l'équation donne $x = 21$.

La fille de Mathilde à 21 ans, Mathilde à 48 ans.

EXERCICE 184

Soit $2n+1$ le premier nombre impair recherché, les quatre autres seront $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$ et $2n+9$.

La somme de ces cinq nombres est égale à 405 d'où :

$10n+25 = 405$ donc $n = \dfrac{405-25}{10} = 38$.

Les cinq entiers sont donc 77, 79, 81, 83 et 85.

EXERCICE 185

Soit x et y les deux entiers recherchés.

L'un est le triple de l'autre, on a donc $y = 3x$

Leur produit est égal à 243, donc $xy = 3x^2 = 243$

On en déduit alors que $x^2 = 81$ donc $x = 9$ ou $x = -9$.

Si $x = 9$ alors $y = 27$

Si $x = -9$ alors $y = -27$.

Il y a donc deux couples solutions : $(9\,;\,27)$ et $(-9\,;\,-27)$.

EXERCICE 186

Soit n l'un des deux entiers recherché.

La somme des deux entiers étant égale à 924, le second sera alors égal à $924-x$.

En ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient de double de l'autre.

D'où $x+78 = 2\times(924-x+78)$ ou $924-x+78 = 2\times(x+78)$.

• $x+78 = 2\times(924-x+78) \iff x+78 = 2004-2x$
$\iff 3x = 1926$

soit $x = \dfrac{1926}{3} = 642$

• $924-x+78 = 2\times(x+78) \iff 1002-x = 2x+156$
$\iff 3x = 846$

soit $x = \dfrac{846}{3} = 282$.

Les deux entiers sont donc 282 et 642.

EXERCICE 187

Soit $x-1$, x et $x+1$ les longueurs des trois côtés du triangle.

Le triangle est rectangle donc $(x-1)^2+x^2 = (x+1)^2$.

En développant et en simplifiant cette équation, nous obtenons : $x^2-4x = 0 \iff x(x-4) = 0$

L'équation admet deux solutions $x = 0$ et $x = 4$.

Si $x = 0$ alors $x-1 < 0$ ce qui est impossible.

Si $x = 4$ alors $x-1 = 3$ et $x+1 = 5$.

Il n'existe donc qu'un triangle rectangle dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs : le triangle de côtés 3-4-5.

EXERCICE 188

Soit $x-2$, $x-1$, x, $x+1$ et $x+2$ les cinq entiers consécutifs.

D'après l'énoncé $(x+1)^2+(x+2)^2 = (x-2)^2+(x-1)^2+x^2$

En développant et en simplifiant, nous obtenons :

$x^2 - 12x = 0 \iff x(x-12)$
L'équation admet deux solutions : $x = 0$ et $x = 12$.
Si $x = 0$, les cinq entiers sont $-2;\ -1;\ 0;\ 1$ et 2.
Si $x = 12$, les cinq entiers sont $10;\ 11;\ 12;\ 13$ et 14.

EXERCICE 189

1. $x + 15 \geqslant \frac{2}{3}(x+27) \iff 3x + 45 \geqslant 2x + 54 \iff x \geqslant 9.$
2. Nombre d'informaticiens après l'embauche : $27 + x$
   Nombre de mathématiciens après l'embauche : $15 + x$
   Le nombre de mathématiciens est au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens, soit
   $15 + x \geqslant \frac{2}{3}(x+27)$.
   Nous retrouvons l'inéquation résolue dans la question précédente. Il faut donc embaucher au moins 9 informaticiens et 9 mathématiciens.

EXERCICE 190

Soit a le nombre d'absents et p le nombre de présents.
Lundi : $p = 8a$
Mardi : $a + 2 = \frac{20}{100}(p-2)$.
Donc $a + 2 = 0,2 \times (8a - 2) \iff 0,6a = 2,4$
$\iff a = \frac{2,4}{0,6} = 4.$
On en déduit alors que $p = 4 \times 8 = 32$ et $p + a = 36$
Il y a donc 36 élèves dans la classe.

EXERCICE 191

Présentons les données sous forme d'un tableau :

	Paul	Sylvain	Mady	Sandrine
Aujourd'hui	58	27	$x+22$	x
Dans a années	$58+a$	$27+a$	$x+22+a$	$x+a$

Dans a années, Paul aura deux fois l'âge de Sylvain :
$58 + a = 2(27 + a) \iff a = 4$
Dans 4 ans, Sandrine et Mady ont ensemble 100 ans :
$(x+4) + (x+26) = 100 \iff 2x = 70 \iff x = 35$
Sandrine a aujourd'hui 35 ans.

EXERCICE 192

Soit n le nombre de glaces vendues.
Bénéfices = recettes − coûts de fabrication = $3n - 100$.
Le glacier veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 100, il s'agit donc de résoudre l'inéquation :
$3n - 100 \geqslant 100$.
On en déduit que $n \geqslant \frac{200}{3}$, sachant que $\frac{200}{3} \approx 66,67$.
Le glacier doit vendre au moins 67 glaces.

EXERCICE 193

Soit x le nombre de m^3 d'eau consommée.
En choisissant le premier tarif, Tom paiera $1,15x + 32$.
En choisissant le second tarif, Tom paiera $1,75x + 14$.
Le premier tarif est plus avantageux si :
$1,15x + 32 < 1,75x + 14 \iff -0,6x < -18 \iff x > \frac{18}{0,6}$
Soit $x > 30$.
Le premier tarif sera plus avantageux pour une consommation supérieure à 30 m^3.

EXERCICE 194

Soit x le nombre de kilomètres parcourus. La consommation étant proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus, on en déduit alors que : $\frac{5x}{100} < 55$
$\frac{5x}{100} < 55 \iff x < \frac{55 \times 100}{5}$ soit $x < 1100$.
Math doit refaire le plein avant 1100 km.

EXERCICE 195

Soit x le nombre de minutes de communication.
• Prix payé avec le premier tarif : $0,15x + 12$
• Prix payé avec le second tarif : $0,25x$
Le premier tarif est plus avantageux si $0,15x + 12 < 0,25x$.
$0,15x + 12 < 0,25x \iff 12 < 0,1x \iff 120 < x.$
Le premier tarif est plus avantageux si la consommation est supérieure à 120 minutes, soit 2 heures.

EXERCICE 196

Soit n le nombre de caisses transportées.
$1500 + 95n < 3500 \iff 95n < 2000 \iff n < \frac{2000}{95}.$
Sachant que $\frac{2000}{95} \approx 21,05$. On en déduit que le camion pourra transporter au maximum 21 caisses.

EXERCICE 197

Soit n le nombre de devoirs faits par Tom.
Le total des points obtenus par Tom s'exprime de deux manières :
• $19,95 \times (n-1)$ • $19 \times n$
En égalant ces deux valeurs, on obtient $0,95n = 19,95$
Soit $n = \frac{19,95}{0,95} = 21.$
Tom a donc fait 21 devoirs.

EXERCICE 198

Le temps mis par la voiture pour atteindre la sortie est : $t_v = \dfrac{150}{120} = 1,25$ heure.

Le temps mis par le motard est : $t_m = \dfrac{150+x}{130}$.

Le motard rattrapera la voiture si $t_m \leqslant t_v$ soit $\dfrac{150+x}{130} \leqslant 1,25$.

$$\begin{aligned}\frac{150+x}{130} \leqslant 1,25 &\iff 150+x \leqslant 1,25\times 130\\ &\iff x \leqslant 1,25\times 130-150\\ &\iff x \leqslant 12,5\end{aligned}$$

Si le motard est à moins de 12,5 km, il rattrapera la voiture avant la sortie.

EXERCICE 199

1. if $n > 0,75n+30$
2. $n > 0,75n+30 \iff 0,25n > 30 \iff n > 120$.
   L'abonnement devient rentable à partir de 121 tickets achetés sur l'année.

EXERCICE 200

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x-7y=-9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=2-2x \\ 5x-7(2-2x)=-9 \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} y=2-2x \\ 19x=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=2-2\times\frac{5}{19} \\ x=\frac{5}{19} \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} y=\frac{28}{19} \\ x=\frac{5}{19} \end{cases}$
   Vérification :
   $\begin{cases} 2\times\frac{5}{19}+\frac{28}{19}=\frac{38}{19}=2 \\ 5\frac{5}{19}-7\frac{28}{19}=-\frac{171}{19}=-9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+3y=4 \\ 8x-4y=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4-3y \\ 8(4-3y)-4y=5 \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=4-3y \\ -28y=-27 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4-3\times\frac{27}{28} \\ y=\frac{27}{28} \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{31}{28} \\ y=\frac{27}{28} \end{cases}$
   Vérification :
   $\begin{cases} \frac{31}{28}+3\times\frac{27}{28}=\frac{112}{28}=4 \\ 8\times\frac{31}{28}-4\times\frac{27}{28}=\frac{140}{28}=5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-5y=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=8-2y \\ 3(8-2y)-5y=-3 \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=8-2y \\ -11y=-27 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=8-2\times\frac{27}{11} \\ y=\frac{27}{11} \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{34}{11} \\ y=\frac{27}{11} \end{cases}$
   Vérification :
   $\begin{cases} \frac{34}{11}+2\times\frac{27}{11}=\frac{88}{11}=8 \\ 3\times\frac{34}{11}-5\times\frac{27}{11}=-\frac{33}{11}=-3 \end{cases}$

EXERCICE 201

1. $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-3y=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=3x-1 \\ 6x-3(3x-1)=-3 \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} y=3x-1 \\ -3x=-6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$
   Vérification :
   $\begin{cases} 3\times2-5=1 \\ 6\times2-3\times5=-3 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x+2y=7 \\ x+3y=11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=7-2y \\ 7-2y+3y=11 \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$
   Vérification :
   $\begin{cases} -1+2\times4=7 \\ -1+3\times4=11 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -2x+5y=3 \\ 4x+y=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x+5(1-4x)=3 \\ y=1-4x \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} -22x=-2 \\ y=1-4x \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{11} \\ y=1-4\times\frac{1}{11} \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{11} \\ y=\frac{7}{11} \end{cases}$
   Vérification :
   $\begin{cases} -2\times\frac{1}{11}+5\times\frac{7}{11}=\frac{33}{11}=3 \\ 4\times\frac{1}{11}+\frac{7}{11}=\frac{11}{11}=1 \end{cases}$

EXERCICE 202

1. $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x=y \end{cases}$
Couple solution $x=0$ et $y=0$.

2. $\begin{cases} 3x=2y \\ y=3x-9 \end{cases}$
Couple solution $x=6$ et $y=9$.

3. $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=-8 \end{cases}$
Couple solution $x=0$ et $y=8$.

EXERCICE 203

1. $\begin{cases} (L_1) \quad 7x+4y=6 \\ (L_2) \quad 5x+2y=0 \end{cases}$
On cherche x, il faut donc éliminer y :
$\begin{cases} (L_1) \quad 7x+4y=6 \\ (-2L_2) \quad -10x-4y=0 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $-3x=6$ donc $x=-2$.
On cherche y, il faut donc éliminer x :
$\begin{cases} (5L_1) \quad 35x+20y=30 \\ (-7L_2) \quad -35x-14y=0 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $6y=30$ donc $y=5$.
Vérification :
$\begin{cases} 7\times(-2)+4\times 5=6 \\ 5\times(-2)+2\times 5=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (L_1) \quad 12x+14y=2 \\ (L_2) \quad 2x+4y=2 \end{cases}$
On cherche x, il faut donc éliminer y :
$\begin{cases} (2L_1) \quad 24x+28y=4 \\ (-7L_2) \quad -14x-28y=-14 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $10x=-10$ donc $x=-1$.
On cherche y, il faut donc éliminer x :
$\begin{cases} (L_1) \quad 12x+14y=2 \\ (-6L_2) \quad -12x-24y=-12 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $-10y=-10$ donc $y=1$.
Vérification :
$\begin{cases} 12\times(-1)+14\times 1=2 \\ 2\times(-1)+4\times 1=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (L_1) \quad 3x-4y=1 \\ (L_2) \quad 5x+8y=2 \end{cases}$
On cherche x, il faut donc éliminer y :
$\begin{cases} (2L_1) \quad 6x-8y=2 \\ (L_2) \quad 5x+8y=2 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $11x=4$ donc $x=\dfrac{4}{11}$.
On cherche y, il faut donc éliminer x :
$\begin{cases} (5L_1) \quad 15x-20y=5 \\ (-3L_2) \quad -15x-24y=-6 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $-44y=-1$ donc $y=\dfrac{1}{44}$.
Vérification :
$\begin{cases} 3\times\frac{4}{11}-4\times\frac{1}{44}=\frac{44}{44}=1 \\ 5\times\frac{4}{11}+8\times\frac{1}{44}=\frac{88}{44}=2 \end{cases}$

EXERCICE 204

1. $\begin{cases} (L_1) \quad 3x+4y=42 \\ (L_2) \quad 3x+8y=66 \end{cases}$
On cherche x, il faut donc éliminer y :
$\begin{cases} (-2L_1) \quad -6x-8y=-84 \\ (L_2) \quad 3x+8y=66 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $-3x=-18$ donc $x=6$.
On cherche y, il faut donc éliminer x :
$\begin{cases} (L_1) \quad 3x+4y=42 \\ (-L_2) \quad -3x-8y=-66 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $-4y=-24$ donc $y=6$.
Vérification :
$\begin{cases} 3\times 6+4\times 6=42 \\ 3\times 6+8\times 6=66 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (L_1) \quad -3x+5y=9 \\ (L_2) \quad 6x+y=3 \end{cases}$
On cherche x, il faut donc éliminer y :
$\begin{cases} (L_1) \quad -3x+5y=9 \\ (-5L_2) \quad -30x-5y=-15 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations,

nous obtenons $-33x = -6$ donc $x = \dfrac{2}{11}$.
On cherche y, il faut donc éliminer x :
$\begin{cases} (2L_1) \quad -6x+10y=18 \\ (L_2) \quad 6x+y=3 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $11y = 21$ donc $y = \dfrac{21}{11}$.
Vérification :
$\begin{cases} -3\times\frac{2}{11}+5\times\frac{21}{11}=\frac{99}{11}=9 \\ 6\times\frac{2}{11}+1\times\frac{21}{11}=\frac{33}{11}=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (L_1) \quad 6x+7y=-4 \\ (L_2) \quad -3x+2y=5 \end{cases}$
On cherche x, il faut donc éliminer y :
$\begin{cases} (2L_1) \quad 12x+14y=-8 \\ (-7L_2) \quad 21x-14y=-35 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $33x = -43$ donc $x = -\dfrac{43}{33}$.
On cherche y, il faut donc éliminer x :
$\begin{cases} (L_1) \quad 6x+7y=-4 \\ (2L_2) \quad -6x+4y=10 \end{cases}$
En ajoutant membre à membre les deux équations, nous obtenons $11y = 6$ donc $y = \dfrac{6}{11}$.
Vérification :
$\begin{cases} 6\times\left(-\frac{43}{33}\right)+7\times\frac{6}{11}=-\frac{44}{11}=-4 \\ -3\times\left(-\frac{43}{33}\right)+2\times\frac{6}{11}=\frac{55}{11}=5 \end{cases}$

EXERCICE 205

1. $\begin{cases} 9a-7b=8 \\ -2a+7b=20 \end{cases}$
Couple solution $a = 4$ et $b = 4$.

2. $\begin{cases} 4a-3b=2 \\ 3a+4b=5 \end{cases}$
Couple solution $a = \dfrac{23}{25}$ et $b = \dfrac{14}{25}$

3. $\begin{cases} 3a+2b=-150 \\ 3a-2b=-78 \end{cases}$
Couple solution $a = -38$ et $b = -18$

EXERCICE 206

1. $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 7x-2y=4 \end{cases}$
Couple solution $x = \dfrac{14}{17}$ et $y = \dfrac{15}{17}$

2. $\begin{cases} 3x=2y \\ y=6x-9 \end{cases}$
Couple solution $x = 2$ et $y = 3$.

3. $\begin{cases} 9x+7y=-12 \\ -9x+4y=30 \end{cases}$
Couple solution $x = -\dfrac{86}{33}$ et $y = \dfrac{18}{11}$.

EXERCICE 207

1. $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=13 \end{cases}$
Couple solution $x = 19$ et $y = 6$.

2. $\begin{cases} 3x+5y=23 \\ 4x+2y=19 \end{cases}$
Couple solution $x = 3,5$ et $y = 2,5$.

3. $\begin{cases} x+y=28 \\ 36x+45y=1035 \end{cases}$
Couple solution $x = 25$ et $y = 3$.

EXERCICE 208

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=-9 \end{cases}$
$Det(S) = 2\times2-4\times1 = 0$. Le système n'admet donc pas un unique couple solution.
$\begin{cases} (L_1) \quad 2x+y=2 \\ (L_2) \quad 4x+2y=-9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (-2L_1) \quad -4x-2y=-4 \\ (L_2) \quad 4x+2y=-9 \end{cases}$
En ajoutant les deux égalités, on obtient $0 = -13$ ce qui est absurde, le système n'admet donc aucune solution.

2. $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 8x+6y=12 \end{cases}$
$Det(S) = 4\times6-8\times3 = 0$. Le système n'admet donc pas un unique couple solution.
$\begin{cases} (L_1) \quad 4x+3y=6 \\ (L_2) \quad 8x+6y=12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (2L_1) \quad 8x+6y=12 \\ (L_2) \quad 8x+6y=12 \end{cases}$
Les deux équations sont identiques. Le système admet une infinité de solution : l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $4x+3y=6$.
☞ Il s'agit de tous les points de coordonnées $(x; y)$ appartenant à la droite d'équation $4x+3y=6$.

3. $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$

$Det(S) = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$. Le système n'a donc pas un unique couple solution.

$$\begin{cases} (L_1) & x+2y=8 \\ (L_2) & 3x+6y=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (-3L_1) & -3x-6y=-24 \\ (L_2) & 3x+6y=3 \end{cases}$$

En ajoutant les deux égalités, on obtient $0 = -21$ ce qui est absurde, le système n'admet donc aucune solution.

EXERCICE 209

1. $\begin{cases} (L_1) & x+y=2 \\ (L_2) & 3x+3y=-6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (-3L_1) & -3x-3y=-6 \\ (L_2) & 3x+3y=-6 \end{cases}$

En ajoutant les deux égalités, on obtient $0 = -12$ ce qui est absurde, le système n'admet donc aucune solution.

2. $\begin{cases} (L_1) & 2x+3y=4 \\ (L_2) & 8x+12y=16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (4L_1) & 8x+12y=16 \\ (L_2) & 8x+12y=16 \end{cases}$

Les deux équations sont identiques. Le système admet une infinité de solution : l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $2x+3y=4$.

3. $\begin{cases} (L_1) & \sqrt{2}x+2y=1 \\ (L_2) & x+\sqrt{2}y=\sqrt{2} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} (L_1) & \sqrt{2}x+2y=1 \\ (-\sqrt{2}L_2) & -\sqrt{2}x-2y=-2 \end{cases}$

En ajoutant les deux égalités, on obtient $0 = -1$ ce qui est absurde, le système n'admet donc aucune solution.

EXERCICE 210

1. $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases}$

Il s'agit des droites D_1 et D_3, ces droites se coupent au point de coordonnées $(-1\ ;\ 2)$.

Le couple solution du système est donc $x=-1$, $y=2$.

2. $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=-x-2 \end{cases}$

Il s'agit des droites D_1 et D_2, ces droites sont parallèles.

Le système n'admet donc pas de solution.

3. $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x-2 \end{cases}$

Il s'agit des droites D_2 et D_3, ces droites se coupent au point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.

Le couple solution du système est donc $x=-2$, $y=0$.

EXERCICE 211

1. $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3} \end{cases}$

Il s'agit des droites D_2 et D_3, ces droites se coupent au point de coordonnées $(2\ ;\ -1)$.

Le couple solution du système est donc $x=2$, $y=-1$.

2. $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2} \\ y=-x+1 \end{cases}$

Il s'agit des droites D_1 et D_3, ces droites se coupent au point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

Le couple solution du système est donc $x=1$, $y=0$.

3. $\begin{cases} y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3} \\ y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$

Il s'agit des droites D_1 et D_2, ces droites se coupent au point de coordonnées $(-1\ ;\ -3)$.

Le couple solution est donc $x=-1$, $y=-3$.

EXERCICE 212

1. $\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3} \end{cases}$

Il s'agit des droites D_2 et D_3, ces droites se coupent au point de coordonnées $(2\ ;\ -2)$.

Le couple solution du système est donc $x=2$, $y=-2$.

2. $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=-2x+2 \end{cases}$

Il s'agit des droites D_1 et D_3, ces droites se coupent au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$.

Le couple solution du système est donc $x=0$, $y=2$.

3. $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3} \\ y=3x+2 \end{cases}$

Il s'agit des droites D_1 et D_2, ces droites se coupent au point de coordonnées $(-1\ ;\ -1)$.

Le couple solution du système est $x=-1$, $y=-1$.

EXERCICE 213

Soient x le nombre de billets « tarif plein » vendus et y le nombre de billets « tarif réduit ».

470 places ont été vendues donc $x + y = 470$

La recette a été de 9 000 € donc $20x + 15y = 9000$.

On en déduit le système : $\begin{cases} x + y = 470 \\ 20x + 15y = 9000 \end{cases}$

La résolution du système donne $x = 390$ et $y = 80$

390 personnes ont payé le « tarif plein » et 80 personnes ont payé le « tarif réduit ».

EXERCICE 214

Soient x le prix d'une limonade et y celui d'un jus d'orange.

On obtient le système $\begin{cases} 3x + 2y = 7,8 \\ x + 3y = 6,8 \end{cases}$

La résolution du système donne $x = 1,4$ et $y = 1,8$

Une limonade coûte 1 € 40, un jus d'orange 1 € 80.

EXERCICE 215

Soient x le nombre de places d'intérieur et y le nombre de places d'impériale.

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 12 \\ 1,5x + 3y = 28,5 \end{cases}$

La résolution du système donne $x = 5$ et $y = 7$.

Le chauffeur a vendu 5 places d'intérieur et 7 places d'impériale.

EXERCICE 216

Soient x le nombre de poules et y le nombre de lapins.

On obtient le système $\begin{cases} x + y = 91 \\ 2x + 4y = 260 \end{cases}$

La résolution du système donne $x = 52$ et $y = 39$.

Il y a donc 52 poules et 39 lapins.

EXERCICE 217

Soit n le numérateur et d le dénominateur de la fraction avec $d \neq 0$.

L'énoncé se traduit par le système $\begin{cases} \frac{n+50}{d+120} = 0,45 \\ \frac{n-50}{d-120} = 0,55 \end{cases}$

Il faut donc de plus $d \neq 120$ et $d \neq -120$.

Le système se ramène à $\begin{cases} n - 0,45d = 4 \\ n - 0,55d = -16 \end{cases}$

On en déduit alors que $d = 200$ et $n = 94$.

Les valeurs trouvées pour d et n obéissent aux contraintes, n et d entiers, d différent de 0, 120 et -120.

La fraction recherchée est $\frac{94}{200}$.

EXERCICE 218

Soit c le prix d'une chemise et p celui d'un pantalon.

L'énoncé se traduit par le système : $\begin{cases} 7c + 3p = 570 \\ 3c + 7p = 730 \end{cases}$.

On recherche p :

$\begin{cases} 21c + 9p = 1710 \\ -21c - 49p = -5110 \end{cases}$

En additionnant les deux équations, nous obtenons : $-40p = -3400$ donc $p = 85$

On recherche c :

$\begin{cases} 49c + 21p = 3990 \\ -9c - 21p = -2190 \end{cases}$

En additionnant les deux équations, nous obtenons : $40c = 1800$ donc $c = 45$

Le pantalon coûte 85€, la chemise 45 €.

EXERCICE 219

Soit P le poids d'un potiron, M celui d'un melon et C celui d'un concombre.

D'après l'énoncé : $\begin{cases} P = 3M + C \\ 2P = 5M + 7C \end{cases}$

L'idée est de combiner les deux lignes de sorte à ne plus avoir de M.

$\begin{cases} P = 3M + C \\ 2P = 5M + 7C \end{cases} \iff \begin{cases} -5P = -15M - 5C \\ 6P = 15M + 21C \end{cases}$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, nous en déduisons que $P = 16C$.

Il faut donc 16 concombres pour équilibrer un potiron.

EXERCICE 220

Soit p le nombre de passagers de première classe et s le nombre de passagers de seconde classe.

L'énoncé permet d'écrire le système :

$\begin{cases} p + s = 145 \\ 320p + 260s = 39800 \end{cases}$

La résolution du système donne : $p = 35$ et $s = 110$.

Il y a 35 passagers en première et 110 en seconde classe.

EXERCICE 221

Soit x le nombre de tables de 4 élèves et y le nombre de tables de 5 élèves.

L'énoncé permet d'écrire le système : $\begin{cases} x+y=9 \\ 4x+5y=41 \end{cases}$

La résolution du système donne : $x=4$ et $y=5$.

Il y a donc 4 tables de 4 élèves et 5 tables de 5 élèves.

EXERCICE 222

1. Le couple solution est (1 ; 3,5).
2. $\begin{cases} 10\times1+4\times3,5=24 \\ 3\times1+6\times3,5=24 \end{cases}$ Le couple (1; 3,5) est donc solution du système.
3. Soit x le prix d'une perle noire et y celui d'une perle dorée.
   Les données de l'énoncé permettent de retrouver le système précédent.
   On en déduit alors qu'une perle noire coûte 1 € et une perle dorée 3,50 €.
   $4\times1+3\times3,5=14,5$.
   Le sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées serait vendu 14,50 €.

EXERCICE 223

1. La résolution du système donne $x=56$ et $y=48$.
2. Soit x l'âge de Simon, y celui de Matéo avec $x>y$.
   Matéo et Simon ont 8 ans d'écart donc : $x-y=8$
   La somme des deux âges est égale à 104 donc :
   $x+y=104$.
   Nous retrouvons le système résolu à la question précédente. On en déduit alors que Matéo a 48 ans, Simon a 56 ans.

EXERCICE 224

1. $\begin{cases} x-3y=20 \\ 5x-4y=-35 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=3y+20 \\ 5(3y+20)-4y=-35 \end{cases}$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x=3y+20 \\ 11y=-135 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=3\times\left(-\dfrac{135}{11}\right)+20 \\ y=-\dfrac{135}{11} \end{cases}$
   $\begin{cases} x=-\dfrac{185}{11} \\ y=-\dfrac{195}{11} \end{cases}$
2. $0,8\left(\dfrac{-\frac{185}{11}-5}{-\frac{135}{11}+5}\right)=0,8\times\dfrac{-185-55}{-135+55}=\dfrac{12}{5}$
   $3\left(\dfrac{-\frac{185}{11}+35}{-\frac{135}{11}+35}\right)=3\times\dfrac{-185+385}{-135+385}=\dfrac{12}{5}$
   x et y vérifient bien la condition :
   $0,8\left(\dfrac{x-5}{y+5}\right)=3\left(\dfrac{x+35}{y+35}\right)$.

EXERCICE 225

Soit g le prix d'une gomme et c le prix d'un crayon. Les données de l'énoncé permettent d'obtenir le système :

$\begin{cases} 5c+2g=10,9 \\ 8c+3g=17,2 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne $c=1,7$ et $g=1,2$.

Le crayon coûte 1,70 €, la gomme 1,20 €.

EXERCICE 226

1. La résolution du système donne : $x=1200$ et $y=350$.
2. En posant x le prix d'un tee-shirt en centimes et y celui d'une casquette, nous retrouvons le système de la question précédente.
   Nous en déduisons qu'un tee-shirt coûte 12 €, une casquette 3,50 €.

EXERCICE 227

1. La résolution du système donne : $x=2,5$ et $y=2$.
2. En posant x le prix d'un poisson rouge et y celui d'un poisson jaune, nous retrouvons le système de la question précédente. Nous en déduisons alors que :
   a. Un poisson rouge coûte 2,50 €.
   b. Un poisson jaune coûte 2 €.

EXERCICE 228

1. Soit m le prix de 1 kg de mangues et i celui de 1 kg d'ignames.
   L'énoncé permet d'écrire le système :
   $\begin{cases} 6m+2i=14 \\ 3m+8i=24,5 \end{cases}$
2. Recherche de i :
   $\begin{cases} 6m+2i=14 \\ 3m+8i=24,5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6m+2i=14 \\ -6m-16i=-49 \end{cases}$.

En additionnant membre à membre les deux équations, nous obtenons : $-14i = -35$ donc $i = \dfrac{35}{14} = 2,5$.

Recherche de m :

$$\begin{cases} 6m+2i = 14 \\ 3m+8i = 24,5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 24m+8i = 56 \\ -3m-8i = -24,5 \end{cases}.$$

En additionnant membre à membre les deux équations, nous obtenons : $21m = 31,5$ donc $m = 1,5$.

Les mangues coûtent 1,5 € par kilo, les ignames 2,5€.

EXERCICE 229

Soit x et y deux nombres tels que $x + y = 456$.

$(x+7)(y+7) - xy = xy + 7(x+y) + 49 - xy = 3241$.

Le produit augmente donc de 3241.

EXERCICE 230

1. $A = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{21}{4} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{10}{4} = -\dfrac{1}{4}$
   $B = 10^{7-3-1} = 10^3$.
2. $C = 7 \times 10^{-1}$.
3. $D = 5 \times 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

EXERCICE 231

1. Appliquons l'algorithme d'Euclide :
   $1755 = 1 \times 1053 + 702$
   $1053 = 1 \times 702 + 351$
   $702 = 2 \times 351 + 0$
   On en déduit alors que $PGCD(1755\ ;\ 1053) = 351$.
2. $\dfrac{1053}{1755} = \dfrac{3 \times 351}{5 \times 351} = \dfrac{3}{5}$.
3. $1755 = 5 \times 351$ et $1053 = 3 \times 351$
   a. Il pourra réaliser au maximum 351 lots.
   b. Dans ce cas, chaque lot contiendra 5 cônes et 3 porcelaines.

EXERCICE 232

$B = \dfrac{\frac{6}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{4}{1} = \dfrac{20}{3}$.

$C = -\dfrac{-20 \times 10^6}{3 \times 10^6} = \dfrac{20}{3}$

$D = \dfrac{9 + 6\sqrt{11} + 11 - 6\sqrt{11}}{3} = \dfrac{20}{3}$

Ainsi $B = C = D$.

EXERCICE 233

1. $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5 \times 7 \times 3}{3 \times 3 \times 5} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} = -\dfrac{5}{3}$.
2. $B = 0,8 \times 5 \times 10^{-3+6+2} = 4 \times 10^5$.
3. $C = 4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1 - 4\sqrt{3} + 12 = 20$.

EXERCICE 234

1. $P = x^2 + 2x + 12x + 24 = x^2 + 14x + 24$.
2. $Q = x^2 + 14x + 49 - 25 = x^2 + 14x + 24$.
3. ABC est un triangle rectangle en A donc en appliquant le théorème de Pythagore :
   $BC^2 = AC^2 + AB^2$
   d'où $AC^2 = BC^2 - AB^2 = (x+7)^2 - 5^2$
   donc d'après la question précédente :
   $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.

EXERCICE 235

1. **a.** $D = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$.
   b. $E = \sqrt{50 \times 8} = \sqrt{400} = 20$
   $F = 5^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 25 - 3 = 22$.
2. **a.** $G = 9x^2 - 25 + 6x^2 + 45x - 10x - 75 = 15x^2 + 35x - 100$.
   b. $G = (3x-5)(3x+5) + (3x-5)(2x+15)$
   $G = (3x-5)(5x+20) = 5(3x-5)(x+4)$.
   c. $(3x-5)(5x+20) = 0$ si et seulement si $3x - 5 = 0$ ou $5x + 20 = 0$.
   $3x - 5 = 0 \iff 3x = 5 \iff x = \dfrac{5}{3}$
   $5x + 20 = 0 \iff 5x = -20 \iff x = -4$
   Les solutions sont donc $\dfrac{5}{3}$ et -4.
3. $1999^2 - 1998^2 = (1999 + 1998)(1999 - 1998) = 3997$.

EXERCICE 236

1.B - 2.B - 3.B - 4.C - 5.B - 6.C - 7.A - 8.A - 9.A.

EXERCICE 237

1.C - 2.D - 3.D - 4.B - 5.C - 6.C - 7.C .

EXERCICE 238

1. **a.** $\mathcal{A}_{ABCD} = x^2$.
   b. $\mathcal{A}_{ABCD} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}$.
2. **a.** $\mathcal{A}_{ECF} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times (x - 0,5) = 2x - 1$
   b. $S = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{ECF} = x^2 + 2x - 1$
3. Pour $x = 2 + \sqrt{2}$, $S = 6 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} - 1 = 9 + 6\sqrt{2}$.

EXERCICE 239

1. $m = \dfrac{4 \times 13 + 6 \times 7}{10} = 9,4$
   Caroline ne sera pas reçue.

2. **a.** $\dfrac{4\times7+6y}{10}=10 \iff y=\dfrac{100-28}{6}=12.$
Etienne doit avoir 12 à l'écrit.
b. $\dfrac{4\times7+6y}{10}=13 \iff y=\dfrac{130-28}{6}=17.$

EXERCICE 240

1. **a.** $11\times(2\times9)=11\times18=\boxed{198}$ et $10^2+2=\boxed{102}$
b. Les trois entiers sont 9, 10 et 11.
2. **a.** $7\times(2\times5)=70$ alors que $6^2+2=38$.
Le professeur n'a pas choisi 6 comme deuxième nombre.
b. $-6\times(2\times(-8))=96$ et $(-7)^2+2=51$.
Le professeur n'a pas choisi -7 comme deuxième nombre.
c. En prenant pour inconnue le deuxième nombre entier (qu'il appelle n), alors les trois nombres sont $n-1$, n et $n+1$.
D'où l'équation $(n+1)\times2\times(n-1)=n^2+2$
$$\begin{aligned}2(n-1)(n+1)=n^2+2 &\iff 2\left(n^2-1\right)=n^2+2\\ &\iff 2n^2-n^2=2+2\\ &\iff n^2=4\end{aligned}$$
L'équation $n^2=4$ permet de retrouver le ou les nombres choisis par le professeur.
Cette équation a deux solutions 2 et -2.
Les entiers consécutifs sont 1, 2, 3, et -3, -2, -1.
On a bien $3\times2\times1=2^2+2$ et $(-3)\times2\times(-1)=(-2)^2+2$.

EXERCICE 241

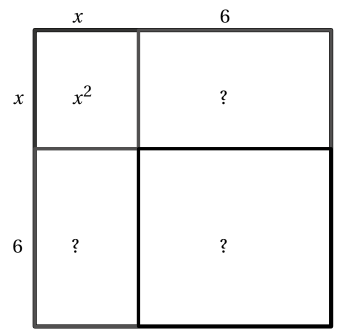
$$\begin{aligned}2^{200}\times2^{203}+2^{163}\times2^{241}+2^{126}\times2^{277}&=2\times2^{403}+2^{404}\\&=2\times2^{404}=2^{405}\end{aligned}$$
D'autre part $32^n=2^{5n}$
n est donc solution de l'équation $5n=405$ soit $n=81$.

EXERCICE 242

En utilisant l'expression conjuguée, on a pour tout n entier strictement positif : $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
L'inéquation de l'énoncé devient alors $\sqrt{n+1}-1\geqslant100$.
Soit encore $n+1\geqslant101^2$ donc $n\geqslant101^2-1$.
Ainsi $n\geqslant10\,200$.

EXERCICE 243

1. $x^2+12x=45$



Le grand carré a pour aire $\left(x^2+12x\right)+6^2$ c'est-à-dire $45+36=81$.
Le grand carré est de côté 9.
On en déduit que $x=9-6=3$ est une solution.
La seconde solution sera $-9-6=-15$.
2. $x^2+2x=8$.
Le grand carré a pour aire $\left(x^2+2x\right)+1^2$ c'est-à-dire $8+1=9$.
Le grand carré est de côté 3.
On en déduit que $x=3-1=2$ est une solution.
La seconde solution est donc $-3-1=-4$.
3. $x^2+20x=21$
Le grand carré a pour aire $\left(x^2+20x\right)+10^2$ c'est-à-dire $21+100=121$.
Le grand carré est de côté 11.
On en déduit que $x=11-10=1$ est une solution.
La seconde solution est donc $-11-10=-21$.

EXERCICE 244

1. $\begin{cases}x+y=9\\ y+z=27\\ z+x=22\end{cases} \implies \begin{cases}x=9-y\\ z=27-y\\ (27-y)+(9-y)=22\end{cases}$
$\implies \begin{cases}x=2\\ z=20\\ y=7\end{cases}.$
Vérification :
$\begin{cases}2+7=9\\ 7+20=27\\ 20+2=22\end{cases}$
Le triplet solution est donc $(2;\ 7;\ 20)$.

2. $\begin{cases} x+y+z=16 \\ 8x-7y=0 \\ 9y=8 \end{cases} \implies \begin{cases} z=16-x-y \\ x=\dfrac{7}{8}y \\ y=\dfrac{8}{9} \end{cases}$

$\implies \begin{cases} z=\dfrac{43}{3} \\ x=\dfrac{7}{9} \\ y=\dfrac{8}{9} \end{cases}$

Vérification : $\begin{cases} \dfrac{7}{9}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{43}{3}=\dfrac{144}{9}=16 \\ 8\times\dfrac{7}{9}-7\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{56-56}{9}=0 \\ 9\times\dfrac{8}{9}=8 \end{cases}$

Le triplet solution est donc $\left(\dfrac{7}{9};\ \dfrac{8}{9};\ \dfrac{43}{3}\right)$.

EXERCICE 245

1. $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y=-1 \\ 3x-z=-1 \end{cases} \implies \begin{cases} x+3(-1-x)+(3x-1)=0 \\ y=-1-x \\ z=3x-1 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=11 \end{cases}$

On vérifie bien sûr que le triplet obtenu vérifie le système.

2. $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4y-3z=0 \\ x+z=2 \end{cases} \implies \begin{cases} x=-\frac{2}{3}y \\ z=\frac{4}{3}y \\ -\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}y=2 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} x=-2 \\ z=4 \\ y=3 \end{cases}$.

On vérifie bien sûr que le triplet obtenu vérifie le système.

EXERCICE 246

1. $f(0)=5$ donc $c=5$

$f(1)=4$ donc $a+b+c=4$

$f(2)=7$ donc $4a+2b+c=7$

D'où le système $\begin{cases} c=5 \\ a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} c=5 \\ a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases} \implies \begin{cases} c=5 \\ a+b=-1 \\ 4a+2b=2 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} c=5 \\ -a-b=1 \\ 2a+b=1 \end{cases}$

d'où $c=5$, $a=2$ et $b=-3$

Ainsi $f(x)=2x^2-3x+5$

EXERCICE 247

1. $f(0)=2$ donc $c=2$

$f(1)=7$ donc $a+b+c=7$

$f(-2)=-20$ donc $4a-2b+c=-20$

D'où le système $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=7 \\ 4a-2b+c=-20 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=7 \\ 4a-2b+c=-20 \end{cases} \implies \begin{cases} c=2 \\ a+b=5 \\ 4a-2b=-22 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} c=2 \\ 2a+2b=10 \\ 4a-2b=-22 \end{cases}$

d'où $c=2$, $a=-2$ et $b=7$

Ainsi $f(x)=-2x^2+7x+2$

EXERCICE 248

Soient f, c et m les poids respectifs des pots de confiture de fraises, cerises et melons.

La première étagère permet d'écrire : $f+3c+3m=6$

La seconde étagère permet d'écrire : $2f+6m=6$

La troisième étagère permet d'écrire : $4c+6m=6$

f, c et m doivent donc vérifier le système :

$\begin{cases} f+3c+3m=6 \\ 2f+6m=6 \\ 4c+6m=6 \end{cases}$

$\begin{cases} f+3c+3m=6 \\ 2f+6m=6 \\ 4c+6m=6 \end{cases} \implies \begin{cases} (3-3m)+3\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}m\right)+3m=6 \\ f=3-3m \\ c=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}m \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{3} \\ f = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

On vérifie que les valeurs obtenues vérifient le système.

Le pot de confiture de fraises pèse 2 kg, celui de cerises 1 kg et celui de melons $\dfrac{1}{3}$ kg.

EXERCICE 249

1. $f(0) = -2$ donc $d = -2$

$f(1) = -2$ donc $a + b + c + d = -2$

$f(-1) = 2$ donc $-a + b - c + d = 2$

$f(2) = 8$ donc $8a + 4b + 2c + d = 8$

D'où le système $\begin{cases} d = -2 \\ a + b + c + d = -2 \\ -a + b - c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} d = -2 \\ a + b + c + d = -2 \\ -a + b - c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ a + b + c = 0 \\ -a + b - c = 4 \\ 8a + 4b + 2c = 10 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ b = 2 \\ a + c = -2 \\ 8a + 2c = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ b = 2 \\ a = 1 \\ c = -3 \end{cases}$

d'où $f(x) = x^2 + 2x^2 - 3x - 2$.

EXERCICE 250

1. $\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b = x^2 + 2 \times x \times \dfrac{a}{2} + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b$

$= x^2 + ax + b.$

2. a. D'après le résultat précédent :

$P = x^2 + 8x - 9 = \left(x + \dfrac{8}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{8}{2}\right)^2 - 9$

$P = (x+4)^2 - 16 - 6 = (x+4)^2 - 25.$

b. $P = (x+4)^2 - 5^2 = (x+4+5)(x+4-5)$

D'où $P = (x+9)(x-1)$.

c. $P = 0 \iff x = 1$ ou $x = -9$.

3. a. $A = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 - 2^2 + 5$

$A = (x+2)^2 + 1.$

b. $B = x^2 - 6x - 7 = (x-3)^2 - 3^2 - 7$

$B = (x-3)^2 - 16 = (x-3-4)(x-3+4) = (x-7)(x+1)$

c. $C = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 2^2 + 1$

$C = (x-2)^2 - 3 = (x-2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$

$C = \left(x - 2 + \sqrt{3}\right)\left(x - 2 - \sqrt{3}\right).$

d. $D = x^2 + x + 2 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2$

$D = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}.$

e. $E = x^2 - x - 5 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 5$

$E = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)^2$

$E = \left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)$

f. $F = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1$

$F = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$F = \left(x - \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right).$

EXERCICE 251

1. a. On applique la méthode de l'exercice précédent :

$P = (x+5)^2 - 5^2 - 15 = (x+5)^2 - 40.$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+5)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow (x+5)^2 - 40 \geqslant -40$

donc $P \geqslant -40$.

c. D'après **1.a**, $P = (x+5)^2 - \left(\sqrt{40}\right)^2$

D'où $P = \left(x + 5 - \sqrt{40}\right)\left(x + 5 + \sqrt{40}\right)$.

d. $P = 0 \iff x + 5 - \sqrt{40} = 0$ ou $x + 5 + \sqrt{40} = 0$

$\iff x = -5 + \sqrt{40} = -5 + 2\sqrt{10}$ ou $x = -5 - 2\sqrt{5}$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{-5 - 2\sqrt{5}\,;\, -5 + 2\sqrt{5}\right\}$.

2. a. $Q = -\left(x^2 - 3x - 1\right)$.

$x^2 - 3x - 1 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{13}{4}$

d'où $Q = \dfrac{13}{4} - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$-\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{13}{4} - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{13}{4}$

donc $Q \leqslant \dfrac{13}{4}$.

c. $Q = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$

D'où $Q = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{2} + x - \dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2} - x + \dfrac{3}{2}\right)$.

d. $Q=0 \iff \dfrac{\sqrt{13}}{2}-x+\dfrac{3}{2}=0$ ou $\dfrac{\sqrt{13}}{2}+x-\dfrac{3}{2}=0$

$\iff x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ ou $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

3. **a.** $R=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0 \implies \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqslant\dfrac{3}{4}$

D'où $R\geqslant\dfrac{3}{4}$.

c. D'après le résultat précédent, R est toujours strictement positif, R ne peut donc jamais s'annuler.

L'équation $R=0$ n'admet donc pas de solution réelle.

EXERCICE 252

1. **a.** $a=120$.

b.

m,n	1, 120	2, 60	3, 40	4, 30
S	121	62	43	34

m,n	5, 24	6, 20	8, 15	10, 12
S	29	26	23	22

c. D'après la question précédente on peut écrire :

$P=6x^2+15x+8x+20$.

d. $P=3x(2x+5)+4(2x+5)=(2x+5)(3x+4)$.

e. $P=0 \iff 2x+5=0$ ou $3x+4=0$

$\iff x=-\dfrac{5}{2}$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$.

2. **a.** $6\times 6=36$.

D'autre part $36=4\times 9$ et $4+9=13$

Nous en déduisons alors que :

$A=6x^2+9x+4x+6=3x(2x+3)+2(2x+3)$

$A=(2x+3)(3x+2)$ donc

$A=0 \iff x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=-\dfrac{2}{3}$.

b. $4\times 6=24$

D'autre part $24=2\times 12$ et $2+12=14$

Nous en déduisons alors que :

$B=4x^2+12x+2x+6=4x(x+3)+2(x+3)$

$B=(4x+2)(x+3)$

$B=0 \iff x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=-3$.

c. $10\times 10=100$.

D'autre part $100=4\times 25$ et $4+25=29$

Nous en déduisons alors que :

$C=10x^2+4x+25x+10=2x(5x+2)+5(5x+2)$

$C=(5x+2)(2x+5)$

$C=0 \iff x=-\dfrac{2}{5}$ ou $x=-\dfrac{5}{2}$.

d. $6\times 2=12$

D'autre part $12=3\times 4$ et $3+4=7$

Nous en déduisons alors que :

$D=6x^2+3x+4x+2=3x(2x+1)+2(2x+1)$

$D=(2x+1)(3x+2)$

$D=0 \iff x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{2}{3}$.

e. $9\times 10=90$

D'autre part $90=6\times 15$ et $15+6=21$

Nous en déduisons alors que :

$E=9x^2+6x+15x+10=3x(3x+2)+5(3x+2)$

$E=(3x+2)(3x+5)$

$E=0 \iff x=-\dfrac{2}{3}$ ou $x=-\dfrac{5}{3}$.

f. $21\times 5=105$

D'autre part $105=3\times 35$ et $3+35=38$

Nous en déduisons alors que :

$F=21x^2+3x+35x+5=3x(7x+1)+5(7x+1)$

$F=(7x+1)(3x+5)$

$F=0 \iff x=-\dfrac{1}{7}$ ou $x=-\dfrac{5}{3}$.

EXERCICE 253

1. **a.** $a=-36$.

b.

m,n	1, −36	−1, 36	2, −18	−2, 18	3, −12
S	−35	35	−16	16	−9

m,n	−3, 12	−4, 9	4, −9	−6, 6
S	9	5	−5	0

c. D'après la question précédente, on peut écrire :

$P=6x^2+4x-9x-6$

d. $P=2x(3x+2)-3(3x+2)=(2x-3)(3x+2)$

e. $P=0 \iff x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=-\dfrac{2}{3}$.

2. **a.** $a=-12$

On remarque que $4-3=1$, on obtient ainsi :

$A=4x^2+4x-3x-3=4x(x+1)-3(x+1)$

$A=(4x-3)(x+1)$ d'où

$A=0 \iff x=\dfrac{4}{3}$ ou $x=-1$.

b. $a=-6$

On remarque que $(-1)\times 6=-6$ et $6-1=5$, on obtient ainsi :

$B=2x^2-x+6x-3=x(2x-1)+3(2x-1)$

$B=(x+3)(2x-1)$ d'où

$B=0 \iff x=-3$ ou $x=\dfrac{1}{2}$.

c. $a=-100$

On remarque que $(-4)\times 25 = -100$ et $25-4 = 21$, on obtient ainsi :

$C = 10x^2 - 4x + 25x - 10 = 2x(5x-2) + 5(5x-2)$

$C = (2x+5)(5x-2)$ d'où

$C = 0 \iff x = -\dfrac{5}{2}$ ou $x = \dfrac{2}{5}$.

d. $a = 12$

On remarque que $(-3)\times(-4) = 12$ et $-3-4 = -7$, on obtient ainsi :

$D = 6x^2 - 4x - 3x + 2 = 2x(3x-2) - 1(3x-2)$

$D = (2x-1)(3x-2)$ d'où

$D = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

e. $a = -90$

On remarque que $(-10)\times 9 = -90$ et $9-10 = -1$, on obtient ainsi :

$E = 15x^2 - 10x + 9x - 6 = 5x(3x-2) + 3(3x-2)$

$E = (5x+3)(3x-2)$ d'où

$E = 0 \iff x = -\dfrac{3}{5}$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

f. $a = -105$

On remarque que $(-3)\times 35 = -105$ et $35-3 = 32$, on obtient ainsi :

$F = 21x^2 + 35x - 3x - 5 = 7x(3x+5) - (3x+5)$

$F = (7x-1)(3x+5)$ d'où

$F = 0 \iff x = \dfrac{1}{7}$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$.

EXERCICE 254

1. **a.** Si $x = 1$ alors $P = 1^2 + 4\times 1 - 5 = 0$

   b. $P = (x-1)(x+a) = x^2 + (a-1)x - a$ or $P = x^2 + 4x - 5$

   Par identification des termes de même coefficient, nous en déduisons que $a = 5$.

   Ainsi $P = (x-1)(x+5)$

   c. $P = 0 \iff x = 1$ ou $x = -5$.

2. **a.** Si $x = 1$ alors $A = 1^2 + 1 - 2 = 0$

   On en déduit alors que $A = (x-1)(x+2)$

   b. Si $x = -1$ alors $B = 0$

   On en déduit alors que $B = (x+1)(x+9)$

   c. Si $x = 2$ alors $C = 0$

   On en déduit alors que $C = (x-2)(x+5)$

   d. Si $x = -2$ alors $D = 0$

   On en déduit alors que $D = (x+2)(x+5)$

   e. Si $x = -2$ alors $E = 0$

   On en déduit alors que $E = (x+2)(x-3)$

   f. Si $x = 5$ alors $F = 0$

   On en déduit alors que $F = (x-5)(x+2)$.

EXERCICE 255

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{50}$ est équivalent à $\sqrt{b} = \sqrt{50} - \sqrt{a}$

En élevant au carré, le problème revient à chercher tous les couples d'entiers positifs (a, b) tels que $a < b$ et $b = a + 50 - 10\sqrt{2a}$.

b est entier donc $2a$ est un carré parfait ce qui entraîne que a est pair.

On pose $a = 2n$, l'égalité devient $b = 2n + 50 - 20\sqrt{n}$.

b est un entier donc n doit être un carré parfait.

Les deux conditions $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{50}$ et $a < b$ entraînent $2\sqrt{a} < \sqrt{50}$

soit $a < \dfrac{50}{4}$ et donc $n < \dfrac{25}{4}$.

Il n'y a que deux carrés parfaits possibles : 1 et 4.

Si $n = 1$ alors $a = 2$ et $b = 32$

Si $n = 4$ alors $a = 8$ et $b = 18$.

L'équation n'admet donc que deux couples solutions : $(2\ ;\ 32)$ et $(8\ ;\ 18)$.

EXERCICE 256

1. $\dfrac{36+64}{2} = 50$ et $\sqrt{36\times 64} = 48$.

2. Il faut résoudre le système $\begin{cases} x + y = 26 \\ xy = 144 \end{cases}$.

   On en déduit alors que $y = 26 - x$ d'où $x(26-x) = 144$

   Soit encore $x^2 - 26x + 144 = 0$.

   Résolvons cette équation :

   $$\begin{aligned} x^2 - 26x + 144 &= (x-13)^2 - 13^2 + 144 \\ &= (x-13)^2 - 25 \\ &= (x-13)^2 - 5^2 \\ &= (x-13-5)(x-13+5) \\ &= (x-18)(x-8) \end{aligned}$$

   Ainsi $x^2 - 26x + 144 = 0 \iff x = 18$ ou $x = 8$.

   Si $x = 18$ alors $y = 26 - 18 = 8$

   Si $x = 8$ alors $y = 26 - 8 = 18$.

   Il y a donc deux couples solutions : $(8\ ;\ 18)$ et $(18\ ;\ 8)$.

3. Comparons les carrés des moyennes qui sont des nombres positifs :

   $$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy &= \frac{1}{4}\left(x^2 + 2xy + y^2 - 4xy\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2xy + y^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x-y\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

   Nous en déduisons ainsi que $\dfrac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$.

4. On cherche les réels positfs x et y tels que $x < y \leqslant 50$

et $x+y-2\sqrt{xy}=2$.

$$\begin{aligned} x+y-2\sqrt{xy}=2 &\iff \left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}=2 \\ &\iff \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=2 \end{aligned}$$

Comme $x<y$ on en déduit que $\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$ soit encore $y=x+2\sqrt{2x}+2$.

x est un entier donc y ne sera un entier que si $\sqrt{2x}$ est un entier, c'est-à-dire s'il existe un entier n tel que $x=2n^2$.

D'autre part $x<y<50$ donc $n<5$.

Si $n=1$ alors $x=2$ et $y=8$

Si $n=2$ alors $x=8$ et $y=18$

Si $n=3$ alors $x=18$ et $y=32$

Si $n=4$ alors $x=32$ et $y=50$.

EXERCICE 257

On peut écrire $(x-y)^2=32 \iff x^2-2xy+y^2=32$ or $xy=56$ on en déduit alors que $x^2+y^2=144$.

D'autre part $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=144+112=256$.

On doit donc résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} x-y=4\sqrt{2} \\ x+y=16 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x-y=4\sqrt{2} \\ x+y=-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4\sqrt{2} \\ x+y=16 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x=16+4\sqrt{2} \\ 2y=16-4\sqrt{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x=8+2\sqrt{2} \\ y=8-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4\sqrt{2} \\ x+y=-16 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x=-16+4\sqrt{2} \\ 2y=-16-4\sqrt{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x=-8+2\sqrt{2} \\ y=-8-2\sqrt{2} \end{cases}.$$

EXERCICE 258

La relation $ab=-1$ entraîne que a et b sont tous deux différents de 0. On peut donc écrire $b=-\dfrac{1}{a}$.

Les deux premières égalités deviennent alors :

$4c=a^3-\dfrac{1}{a}$ et $c=a-\dfrac{1}{a^3}$ de ces deux conditions, on déduit que $a^6-a^2-4a^4+4=0$

Essayons de factoriser le membre de gauche :

$$\begin{aligned} a^6-a^2-4a^4+4 &= a^4\left(a^2-4\right)-\left(a^2-4\right) \\ &= \left(a^4-1\right)\left(a^2-4\right) \end{aligned}$$

$=\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)(a-2)(a+2)$

$=(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)(a-2)(a+2)$

L'équation admet donc 4 solutions : 1, -1, 2 et -2.

Si $a=1$ alors $b=-1$ et $c=0$

Si $a=-1$ alors $b=1$ et $c=0$

Si $a=2$ alors $b=-\dfrac{1}{2}$ et $c=\dfrac{15}{8}$

Si $a=-2$ alors $b=\dfrac{1}{2}$ et $c=-\dfrac{15}{8}$.

Nous avons procédé par condition nécessaire, il faut donc vérifier que les triplets trouvés sont bien solutions.

EXERCICE 259

1. On ne peut acheter ni 10, ni 20 canelés conditionnés (aucune combinaison ne permet d'obtenir ces valeurs).
   En revanche, $12+2\times 9=30$, on peut donc acheter 30 canelés conditionnés.
2. **a.** Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :
   $$\left\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14;\ 17;\ 19;\ 20;\ 23;\ 26;\ 29\right\}.$$
   b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite,tous les entiers supérieurs.
   c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.
3. **a.** Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.
   b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.
4. **a.** On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.
   b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne peut placer.
   c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.
5. **a.** On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.
   b. Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.
6. On peut réaliser tout total de 1 à 31.

5.2 Fonctions

EXERCICE 260

1. $f(-2) = 3 \times (-2)^2 - (-2) = 12 + 2 = 14$
2. $f(-2) = \dfrac{2 - 3 \times (-2)}{(-2)^2 + 1} = \dfrac{8}{5}$
3. $f(-2) = 1 + (-2) + (-2)^2 = 3$
4. $f(-2) = 1 + \dfrac{1}{-2+1} = 1 - 1 = 0.$

EXERCICE 261

1. $g(3) = 3^2 - 4 \times 3 = -3$
2. $g(3) = \dfrac{2 \times 3 - 3}{3^2 + 1} = \dfrac{3}{10}$
3. $g(3) = 3\sqrt{2 \times 3 + 3} = 3 \times 3 = 9$
4. $g(3) = 2 - \dfrac{1}{3+1} = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$

EXERCICE 262

$f(2) = -2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2$, $f(5) = 1$,
$f(-1) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(-2) = -2$.

EXERCICE 263

x	-3	-1	$-0,5$	0	1	2	3
$f(x)$	22	8	2,75	4	2	2	4

EXERCICE 264

x	0	$0,5$	1	2	$\sqrt{3}$	-2	-1
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{\dfrac{9}{2}}$	2	1	$\sqrt{2}$	1	2

EXERCICE 265

Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_h$, $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_p$ sont les courbes de fonctions.

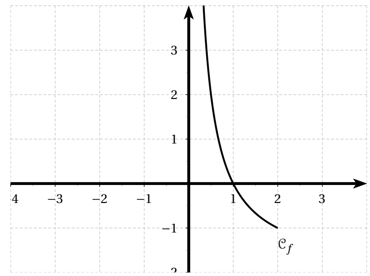
Pour les deux autres courbes, on remarque que certaines valeurs de x ont deux images, ce qui est contraire à la définition.

EXERCICE 266

1.

x	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	2
$f(x)$	6	2	$\frac{2}{3}$	0	$-0,4$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{6}{7}$	-1

2.



EXERCICE 267

1. $f(3) = 4$, l'image de 3 par f est 4.
2. $g\left(\sqrt{3}\right) = 3$, l'image de $\sqrt{3}$ par g est 3.
3. $f(x) = 3 \iff 3x - 5 = 3 \iff x = \dfrac{8}{3}$.
   L'antécédente de 3 par f est $\dfrac{8}{3}$.
4. $g(x) = 5 \iff x^2 = 5 \iff x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.
   Les antécédentes de 5 par g sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
5. Les réels négatifs n'ont pas d'antécédent par g, par exemple -2 n'a pas d'antécédent par g.

EXERCICE 268

1. $f(-x) = 3(-x)^4 + \dfrac{3}{(-x)^2 + 3} = 3x^4 + \dfrac{3}{x^2 + 3}$.
2. L'intervalle de définition de f est $\mathbb{R}$, il est bien symétrique par rapport à 0, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$.
   La fonction f est donc paire.
3. $g(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x$.
4. L'intervalle de définition de g est $\mathbb{R}$, il est bien symétrique par rapport à 0, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = -g(x)$.
   La fonction f est donc impaire.

EXERCICE 269

La fonction f semble paire sur $[-3;3]$.
La fonction g n'est ni paire, ni impaire (il semble y avoir un centre de symétrie, mais ça n'est pas l'origine du repère).
La fonction h semble impaire sur $[-2;2]$.
La fonction m n'est ni paire, ni impaire (le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0).
La fonction p semble paire sur $[-3;3]$.

La fonction q semble paire sur $[-3;-1] \cup [1;3]$.

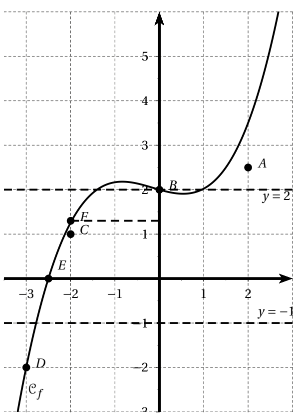
EXERCICE 270

La fonction f est définie sur $[-3;3]$.
La fonction g est définie sur $[-3;1[\cup]1;3]$.
La fonction h est définie sur $[-2;2]$.
La fonction m est définie sur $[-3;1[\cup]1,2;3]$.
La fonction p est définie sur $[-3;3]$.
La fonction q est définie sur $[-3;-1] \cup [1;3]$.

EXERCICE 271

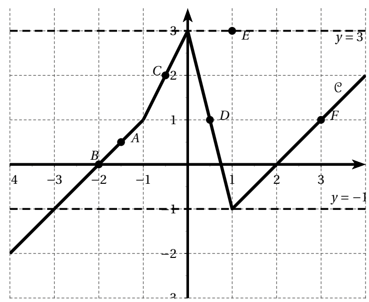
1. **a.** $f_1(x) = 3x$
   b. $f_2(x) = 2x + x^3$
   c. $f_3(x) = x^2 - 2x^3$
   d. $f_4(x) = \sqrt{4(x-3)}$
   e. $f_5(x) = x + \dfrac{1}{x^2-1}$.
2. **a.** $f_1(4) = 12$. L'image de 3 par f_1 est 12.
   b. $f_5(2) = 2 + \dfrac{1}{2^2-1} = 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.
   L'image de 2 par f_5 est $\dfrac{7}{3}$.
   c. f_4 n'est pas définie en 0 (car $4(0-3) < 0$). 0 n'a donc pas d'image par f_4.
   d. $f_4(3) = \sqrt{4(3-3)} = 0$. L'image de 3 par f_4 est 0.
   e. f_5 n'est pas définie est 1 (car $1^1 - 1 = 0$). 1 n'a donc pas d'image par f_5.
   f. $x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$.
   Il n'y a qu'un nombre différent de 1 qui n'a pas d'image par f, c'est -1.

EXERCICE 272



1. Voir graphique.
2. **a.** Voir graphique.
   b. Les points B, D et E appartiennent à la courbe.
3. On obtient graphiquement $y_F \approx 1,3$.
4. Un seul point de la courbe $\mathcal{C}$ a pour ordonnée -1, le point d'abscisse $x \approx -2,8$.
5. Trois points de la courbe $\mathcal{C}$ ont pour ordonnée 2, les points d'abscisse $-1,5$; 0 et 1.

EXERCICE 273



1. Voir graphique.
2. **a.** Voir graphique.
   b. Les points B, C et D semblent appartenir à la courbe.
3. On obtient graphiquement $y_F = 1$.
4. Deux points de la courbe $\mathcal{C}$ ont pour ordonnée -1, les points d'abscisse -3 et 1.
5. Un seul point de la courbe $\mathcal{C}$ a pour ordonnée 3, le point d'abscisse 0.

EXERCICE 274

1. Le programme peut s'écrire : $f(x) = (3x-8) \times 5 - x$.
   a. $f(0) = -40$.
   b. $f(135) = 1850$
   c. $f(15,9) = 182,6$.
2. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   $f(x) = 0 \iff 15x - 40 - x = 0 \iff x = \dfrac{40}{14} = \dfrac{20}{7}$.
   0 n'a donc qu'un antécédent : $\dfrac{20}{7}$.
3. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 2022$.
   $$f(x) = 2022 \iff 15x - 40 - x = 2022 \iff x = \dfrac{2062}{14} = \dfrac{1031}{7}.$$
   Seul le nombre $\dfrac{1031}{7}$ permet d'obtenir 2022 en sortie.

4.

- Enlever 5 au nombre de départ
- Multiplier par 5
- Ajouter le nombre de départ
- Diviser par le nombre de départ
- Enlever 5

EXERCICE 275

1. Le programme peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{(x+8)\times 2}{5} - x$.

a. $f(1) = 2,6$.

b. $f(-19) = 14,6$

c. $f(3,14) = 1,316$.

2. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

En simplifiant l'expression de f, nous obtenons : $f(x) = \dfrac{16-3x}{5}$.

$f(x) = 0 \iff 16-3x = 0 \iff x = \dfrac{16}{3}$.

0 n'a donc qu'un antécédent : $\dfrac{16}{3}$.

3. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 2022$.

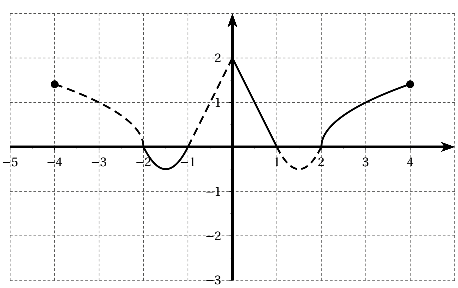
$f(x) = 2022 \iff 16-3x = 2022\times 5 \iff x = -\dfrac{10094}{3}$.

Seul le nombre $-\dfrac{10094}{3}$ permet d'obtenir 2022 en sortie.

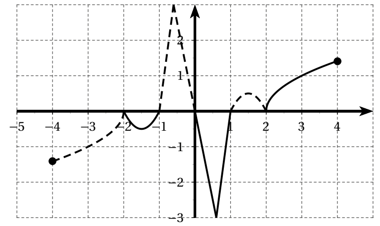
4.

- Diviser par 6 le nombre de départ
- Ajouter 3
- Doubler le résultat
- Diviser par 17
- Multiplier par 101
- Enlever le nombre de départ

EXERCICE 276

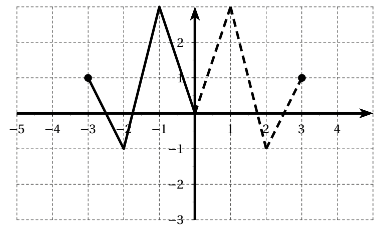


EXERCICE 277

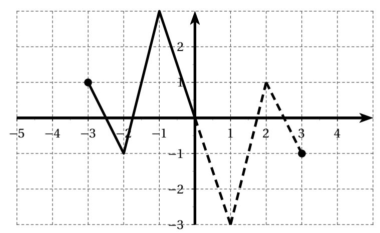


EXERCICE 278

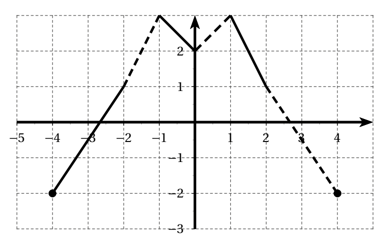
1. Si f est paire :



2. Si f est impaire :



EXERCICE 279



EXERCICE 280

Si f est impaire alors pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

Or $0 \in I$ donc $f(0) = -f(0)$ ce qui implique alors que $2f(0) = 0$ donc $f(0) = 0$.

Nous venons de démontrer que si f est impaire et $0 \in I$ alors $f(0) = 0$
Par contraposition, nous en déduisons que $f(0) \neq 0$ alors f n'est pas impaire.

EXERCICE 281

1. Il faut que $x+2 \neq 0$ donc $x \neq -2$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.
   ☞ On peut aussi le noter : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-2\right\}$.
2. $f(1) = \dfrac{1}{3}$ donc $A \in \mathcal{C}$
   -2 n'appartient pas à l'ensemble de définition, $B \notin \mathcal{C}_f$.
   $f(-1) = -1$ donc $C \in \mathcal{C}$
   $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{7}$ donc $D \in \mathcal{C}$
   $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{5}$ donc $E \notin \mathcal{C}$
3. $f(2) = \dfrac{1}{2}$, le point d'abscisse 2 est d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.
   $f(-5) = \dfrac{5}{3}$, le point d'abscisse -5 est d'ordonnée $\dfrac{5}{3}$.
4. $f(x) = 3 \iff x = 3x+6 \iff x = -3$, le point d'ordonnée 3 est d'abscisse -3
   $f(x) = 2022 \iff x = 2022x+4044 \iff x = -\dfrac{4044}{2021}$, le point d'ordonnée 2022 est d'abscisse $-\dfrac{4044}{2021}$.

EXERCICE 282

1. Il faut que $2-5x \geqslant 0$ donc $x \leqslant \dfrac{2}{5}$
   Ainsi $\mathcal{D}_f = \left]-\infty\,;\,\dfrac{2}{5}\right]$.
2. 1 n'appartient pas à l'ensemble de définition, $A \notin \mathcal{C}_f$.
   $f(-2) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ donc $B \in \mathcal{C}$
   $f(-4,6) = 5 \neq -5$ donc $C \notin \mathcal{C}$
   $f\left(\dfrac{1}{5}\right) = 1$ donc $D \in \mathcal{C}$
   $f(-0,5) = \sqrt{4,5} \neq 2,1$ donc $E \notin \mathcal{C}$
3. $f(0) = \sqrt{2}$, le point d'abscisse 0 est d'ordonnée $\sqrt{2}$.
   $f(0,4) = 0$, le point d'abscisse $0,4$ est d'ordonnée 0.
4. $f(x) = 3 \implies 2-5x = 9 \implies x = -1,4$, le point d'ordonnée 3 est d'abscisse $-1,4$
   $f(x) = 2022 \implies 2-5x = 2022^2 \implies x = -817\,696,4$, le point d'ordonnée 2022 est d'abscisse $-817\,696,4$.

EXERCICE 283

1.
```
def fonction(x) :
    return x**2+3*x-5
```
2.
```
def valeurs(a, b, p) :
    while a <= b :
        print(fonction(a))
        a = a+p
```

EXERCICE 284

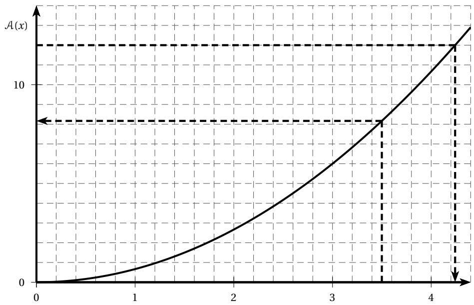
1. $\dfrac{21}{12} = 1,75$ soit 1 heure et 45 minutes.
2. **a.** $f(30) = 15$. Après 30 minutes de courses, Fabien est à 15 km de la ligne d'arrivée.
   b. On recherche x tel que $f(x) = 7$.
   $f(x) = 7 \iff x = \dfrac{14}{0,2} = 70$. Fabien sera à 7 km de la ligne d'arrivée après 1 heure 10.
3. $21-0,2x = 17 \iff x = \dfrac{21-17}{0,2} = 20$.
4. Fabien sera à 17 km de l'arrivée après 20 minutes de course.

EXERCICE 285

1. **a.** La flèche est tirée de 1 m.
   b. La flèche retombe au sol à 10 m.
   c. La flèche atteint 3 m au maximum.
2. **a.** $f(5) = -0,1 \times 5^2 + 0,9 \times 5 + 1 = 3$.
   b. $f(4,5) = 3,025 > 3$, la flèche s'élève donc à plus de 3 mètres.

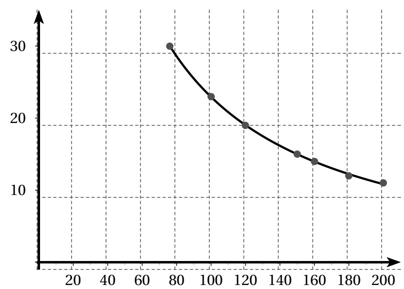
EXERCICE 286

1. **a.** $M \in [EF]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 5,4$.
   b. En appliquant le théorème de Thalès, on obtient $\dfrac{EN}{EG} = \dfrac{EM}{EF}$ donc $EN = 7,2 \times \dfrac{x}{5,4} = \dfrac{4}{3}x$.
   c. Le triangle EMN est rectangle en E, son aire est donc égale à $\dfrac{EM \times EN}{2}$ soit $\dfrac{2}{3}x^2$.
2. **a.** Pour $x = 3,5$ cm, on lit $\mathcal{A}(x) \approx 8,5$ cm^2.
   b. $\mathcal{A}(x) = 12$ cm^2 pour $x \approx 4,2$.



EXERCICE 287

1.



2. **a.** L'image de 140 est 16.

b. Un antécédent de 26 est 90.

c. Pour une pression de 140 cm de mercure, le volume sera de 16 cm^3.

Si le volume est égal à 26 cm^3, la pression sera de 90 cm de mercure.

EXERCICE 288

1. **a.** Le triangle ABC est rectangle, donc son aire est égale à $\dfrac{50 \times 80}{2}$ soit 2000 m^2.

b. Le terrain est partagé en deux lots de même aire soit 1000 m^2 chacun.

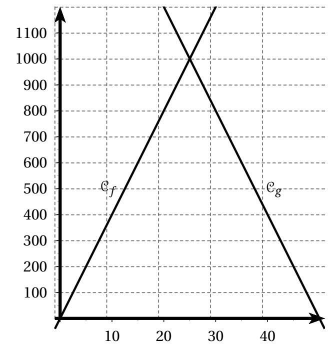
2. **a.** Le triangle AMC est rectangle en A, l'aire de ce triangle est donc égale à $\dfrac{80 \times x}{2} = 40x$.

b. L'aire du triangle BMC est égale à la différence entre les aires des triangles ABC et AMC soit $2000 - 40x$.

c. Les deux aires sont égales si et seulement si $40x = 2000 - 40x$ soit $x = \dfrac{2000}{80} = 25$.

d. $AM = 25$ et $AB = 50$ ($M \in [AB]$) donc M est le milieu du segment $[AB]$.

3. **a.**



b. Les deux courbes se coupent au point d'abscisse 50.

4. **a.** D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$

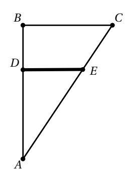
D'où $AN = 80 \times \dfrac{x}{50} = 1,6x$.

b. Le triangle AMN est rectangle en A, son aire est donc égale à $\dfrac{x \times 1,6x}{2}$ soit $0,8x^2$.

5. Graphiquement, pour $y = 1000$, on obtient $x \approx 35$.

Les deux lots auront la même aire si AM mesure 35 mètres.

EXERCICE 289

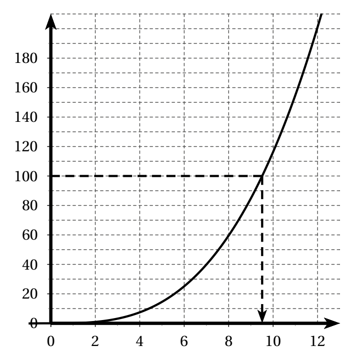


1. On $BC = 4$, $AB = 12$ et $AD = h$.

(BC) et (DE) sont parallèles, en appliquant le théorème de Thalès, on obtient $DE = BC \times \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{3}h$.

$V(h) = \dfrac{1}{3}\pi \times DE^2 \times AD = \dfrac{\pi}{27}h^3$.

2.



3. Verre plein : $V(12) \approx 200$ cm^3,

on cherche donc h tel que $V(h) = 100$ cm^3.

Graphiquement, on obtient $h \approx 9,5$ cm.

EXERCICE 290

1.

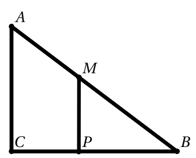
• Ajouter 5 au nombre de départ
• Multiplier le résultat par le nombre de départ
• Soustraire au résultat le carré du nombre de départ

2. $f(x) = (x+5) \times x - x^2$.

3. $f(x) = x^2 + 5x - x^2 = 5x$.

EXERCICE 291

1.



En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient $AB = 5$

2. $M \in [AB]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 5$.

3. **a.** Si $x = 0$ alors $M = A$ et $P = C$ et $f(0) = 0$.
Si $x = 5$ alors $M = P = B$ et $f(5) = 6$.

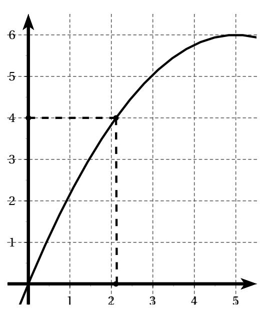
b. $f(x) = PC \times \dfrac{MP + AC}{2}$.
En appliquant le théorème de Thalès, on obtient :
$MP = 0,6(5-x)$ et $PC = 0,8x$.
Ainsi $f(x) = 0,8x \times \dfrac{3 - 0,6x + 3}{2}$
$f(x) = 0,8x(3 - 0,3x) = 2,4x - 0,24x^2$.

c.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	0	1,14	2,16	3,06	3,84	4,5

x	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	5,04	5,46	5,76	5,94	6

d.



e. L'aire est égale à 4 cm^2 si $AM \approx 2,2$

f. $E = [0\ ;\ 6]$.

EXERCICE 292

1.

v	20	40	60	80
d	7,56	19,11	34,67	54,22

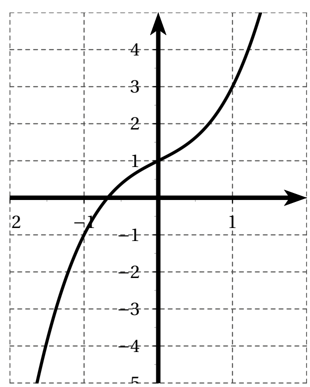
v	100	120	140	160
d	77,78	105,33	136,89	172,44

2. Voir calculatrice.

3. $d = 80$ m pour $v \approx 102$ km/h.
$d = 150$ m pour $v \approx 148$ km/h.

EXERCICE 293

1.



2. D'après le graphique précédent, la courbe ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.

3. Par lecture graphique, $-1 < \alpha < 0$.

4.

x	-1	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$
$f(x)$	-1	$-0,629$	$-0,312$	$-0,043$	$0,184$

x	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0
$f(x)$	$0,375$	$0,536$	$0,673$	$0,792$	$0,899$	1

D'après le tableau : $-0,7 < \alpha < -0,6$.

5. A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	$-0,7$	$-0,69$	$-0,68$	$-0,67$	$-0,66$	$-0,65$
$f(x)$	$-0,04$	$-0,02$	$0,01$	$0,03$	$0,05$	$0,08$

x	$-0,64$	$-0,63$	$-0,62$	$-0,61$	$-0,6$
$f(x)$	$0,10$	$0,12$	$0,14$	$0,16$	$0,18$

D'après le tableau :$-0,69 < \alpha < -0,68$.

6. En réglant le pas à $0,001$ et le début à $-0,69$ (si nécessaire la fin à $-0,68$), nous obtenons : $-0,683 < \alpha < -0,682$.
   En réglant le pas à $0,0001$ et le début à $-0,683$ (si nécessaire la fin à $-0,682$), nous obtenons : $-0,6824 < \alpha < -0,6823$.
   Nous en déduisons alors que $\alpha = -0,682$ à 10^{-3} près.
7. Chaque étape (changement de pas et réduction d'intervalle) demande 11 calculs.
   Nous avons fait 4 étapes soit au total 44 calculs.
   Tom coupe son intervalle de recherche en 10 000 , la calculatrice fera donc 10 001 calculs.
   Sa technique n'est pas « rentable », il ne va pas gagner réellement de temps : les résultats seront plus longs à lire et suivant la mémoire de la calculatrice, celle-ci refusera peut-être de faire le travail.

EXERCICE 294

Soit $f(x) = x^4 - x + 1$.
En traçant la courbe de f sur la calculatrice, nous voyons qu'elle coupe l'axe des abscisses deux fois sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
L'équation admet donc deux solutions que nous noterons α et β avec $1 < \alpha < \beta < 2$.
En utilisant le tableau de valeurs avec un réglage : début à 1, pas de $0,1$ et fin si nécessaire à 2,
Nous obtenons : $1,2 < \alpha < 1,3$ et $1,4 < \beta < 1,5$.
Pour facilité les réglages et la lecture sur la calculatrice, nous traitons séparément α et β.
Nous obtenons $1,2 < \alpha < 1,23$ puis $1,225 < \alpha < 1,226$
et $1,48 < \beta < 1,49$ puis $1,480 < \beta < 1,481$
Nous en déduisons alors que $\alpha = 1,23$ et $\beta = 1,48$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 295

La fonction f est définie sur $[-4 ; 2]$.

x	-4		-3		$0,5$		2
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-2,8$	$\nearrow$	2

La fonction f admet un maximum au point d'abscisse -3 et un minimum au point d'abscisse $-0,5$.

La fonction g est définie sur $[-5 ; 3]$.

x	-5		3
g	$0,2$	$\nearrow$	$4,5$

La fonction g admet un maximum au point d'abscisse 3 et un minimum au point d'abscisse -5.

EXERCICE 296

La fonction f est définie sur $[-4 ; 2]$.

x	-4		-2		2
f	3	$\searrow$	$2,2$	$\nearrow$	$4,5$

La fonction f admet un minimum au point d'abscisse -2 et un maximum au point d'abscisse 2.

La fonction g est définie sur $[-4 ; 0[\cup]0 ; 4]$.

x	-4		0		4
g	$-0,2$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$0,2$

La fonction g n'admet ni maximum, ni minimum.

EXERCICE 297

1.

x	-6		-2		1		4
f	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5

2. 0 a deux antécédents par f, 2 en a trois, -2 n'a pas d'antécédent par f.

EXERCICE 298

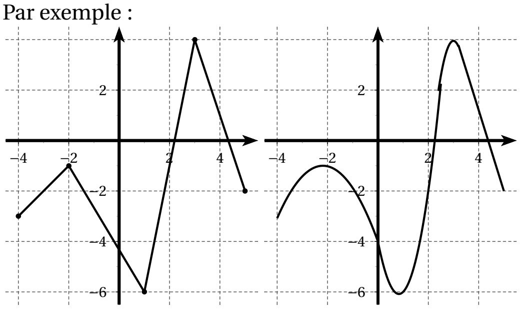
La courbe A correspond à f_2
La courbe B correspond à f_4
La courbe C correspond à f_1
La courbe D correspond à f_3.

EXERCICE 299

La courbe A correspond à f_2
La courbe B correspond à f_3
La courbe C correspond à f_4
La courbe D correspond à f_1.

EXERCICE 300

1. La fonction f est définie sur $[-4 ; 5]$.
2. f est croissante sur $[-4 ; -1]$ et sur $[1 ; 3]$
   f est décroissante sur $[-1 ; 1]$ et sur $[3 ; 5]$
3. f admet deux maxima : un maximum absolu égal à 4 atteint pour $x = 3$, un maximum relatif égal à -1 atteint pour $x = -2$.
   f admet trois minima : un minimum absolu égal à -6 atteint pour $x = 1$, un minimum relatif égal à -3 atteint pour $x = -4$, un minimum relatif égal à -2 atteint pour $x = 5$.
4. D'après le tableau -2 a pour image -1.
5. $-6 < f(0) < -1$.
6. 0 a deux d'antécédents, un dans l'intervalle $[1 ; 3]$ et un dans l'intervalle $[3 ; 5]$.
7. Par exemple :



EXERCICE 301

• Courbe A : Sur l'intervalle $[-4,5 ; 2,5]$, la fonction admet un minimum absolu égal à -1 en $x = -3$, un minimum relatif égal à 0 en $x = 0$ et un maximum relatif égal à environ $2,7$ en $x = -1$.
• Courbe B : Sur l'intervalle $[-4,5 ; 2,5]$, la fonction admet un minimum absolu égal à 0 en $x = -2$.
• Courbe C : Sur l'intervalle $[-2,5 ; 1,5]$, la fonction admet des maxima absolus égaux à 1 et des minima absolus égaux à -1.
• Courbe D : Sur l'intervalle $[-4,5 ; 2,5]$, la fonction admet un maximum absolu égal à 3, deux maxima relatifs égaux à 1, un maximum relatif égal à environ $0,3$, deux minima absolus égaux à -2, deux minima relatifs égaux à environ $-0,5$ et un minimum relatif égal à environ $-0,2$.

EXERCICE 302

f_1 admet un minimum absolu égal à -3, atteint en $x = 1$.
f_2 admet un minimum relatif égal à -9, atteint en $x = -2$ et un maximum relatif égal à 9 atteint en $x = 2$.
f_3 admet un maximum relatif égal à 0, atteint pour $x = -2$ et un minimum relatif égal à -5, atteint pour $x = 5$.
f_4 admet un maximum absolu égal à 6, atteint pour $x = 3$ et un minimum absolu égal à -1 lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

EXERCICE 303

1. **a.** Faux, en effet $f(0) < f(1)$, la fonction f n'est donc pas décroissante sur $[0 ; 1]$.
   b. On ne peut pas répondre, en effet $f(-3) > f(-2) > f(-1) > f(0)$ mais on ne sait pas ce qu'il se passe entre ces valeurs.
   c. Faux, la fonction f s'annule au moins trois fois : entre -2 et 0, entre 0 et $0,5$, entre $\frac{8}{3}$ et 4.
   d. On ne peut pas répondre, en effet sur la table des valeurs, $\sqrt{5}$ est la plus grande valeur de $f(x)$, on ne connaît pas toutes les valeurs de $f(x)$.
2. **a.** Faux, d'après le tableau de variations, f est croissante sur $\left[0 ; \frac{8}{3}\right]$ donc sur $[0 ; 1]$.
   b. Vrai, d'après le tableau de variations, f est décroissante sur $[-3 ; 0]$.
   c. Faux, la fonction f s'annule trois fois : entre -2 et

0, entre 0 et 0,5, entre $\frac{8}{3}$ et 4.

d. Vrai, d'après le tableau de variations, f atteint son maximum pour $x = \frac{8}{3}$ et $f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{5}$.

EXERCICE 304

a. $f(-5) = -2$ et $f(5) = -6$ donc $f(-5) > f(5)$.

b. $-2 < f(-4) < 2$ et $f(5) = -6$ donc $f(-4) > f(5)$.

c. $-2 < f(-6) < 5$ et $-6 < f(4) < 5$ on ne peut donc pas comparer $f(-6)$ et $f(4)$.

d. $-2 < f(-2) < 2$ et $-2 < f(8) < 0$ on ne peut donc pas comparer $f(-2)$ et $f(8)$.

e. $-2 \in [-3 ; -1]$ et f croissante sur cet intervalle donc $f(-3) < f(-2)$.

f. 1 et 2 appartiennent à l'intervalle $[0 ; 5]$ et f décroissante sur cet intervalle donc $f(1) > f(2)$.

g. $-2 < f(-8) < 5$ et $-2 < f(-4) < 2$, on ne peut pas comparer $f(-8)$ et $f(-4)$.

h. $2 < f(-1,5) < 8$ et $-2 < f(8) < 0$ donc $f(-1,5) > f(8)$.

EXERCICE 305

1. $-1 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a+1 < b+1 \implies (a+1)^2 < (b+1)^2$ c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.
2. D'après le résultat précédent, f est strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

EXERCICE 306

Soient a et b tels que $a < b < -2$.

$$\begin{aligned} a < b < -2 &\implies a+2 < b+2 < 0 \\ &\implies \frac{5}{a+2} > \frac{5}{b+2} \implies -\frac{5}{a+2} < -\frac{5}{b+2} \\ &\implies 1 - \frac{5}{a+2} < 1 - \frac{5}{b+2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$, la fonction f est donc croissante sur $]-\infty ; -2[$.

EXERCICE 307

1. $f(b) - f(a) = b^2 - 6b - a^2 + 6a = \left(b^2 - a^2\right) - 6(b-a)$
   $= (b-a)(b+a) - 6(b-a) = (b-a)(a+b-6)$.
2. Si $3 \leqslant a < b$ alors
   d'une part $b - a > 0$ et
   d'autre part $a + b > 6$ soit encore $a + b - 6 > 0$
   On en déduit alors que $f(b) - f(a) > 0$
   donc $f(a) < f(b)$.
   La fonction f est donc croissante sur $[3 ; +\infty[$.
3. Si $a < b \leqslant 3$ alors
   d'une part $b - a > 0$ et
   d'autre part $a + b < 6$ soit encore $a + b - 6 < 0$
   On en déduit alors que $f(b) - f(a) < 0$
   donc $f(a) > f(b)$.
   La fonction f est donc décroissante sur $[\infty ; 3[$.
4.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		↘	-4	↗	

EXERCICE 308

- Courbe A : $f(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$.
- Courbe B : $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant -3$.
- Courbe C : $f(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 0$.
- Courbe D : $f(x) \geqslant 0$ si $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

EXERCICE 309

- Courbe A :

x	$-4,5$		$-2,5$		0		$2,5$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Courbe B :

x	$-2,5$		-2		3		$4,5$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Courbe C :

x	$-4,5$		-4		-2		1		$2,5$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- Courbe D :

x	$-4,5$		-3		-1		1		2		$2,5$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 310

1. Vrai, car $f(-2) = 3$.
2. Faux, car $f(1) = -5$ et $3 < f(-1) < 7$ donc $f(1) < f(-1)$.
3. On ne peut pas répondre. On peut juste dire que $3 < f(-5) < 5$.

4. Vrai, d'après le tableau de variations, pour tout x réel, $f(x) \geqslant -5$.
5. Vrai, d'après le tableau de variations, pour tout $x \leqslant 0$, $3 \leqslant f(x) \leqslant 7$ donc $f(x) \geqslant 0$.
6. Faux, 4 a trois antécédents, un dans l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$, un dans l'intervalle $]-2\,;\,0[$ et enfin un dans l'intervalle $]0\,;\,2[$.
7. Vrai car $3 < f(-3) < 5$ et $-5 < f(3) < 3$ donc $-5 < f(3) < 3 < f(-3) < 5$.

EXERCICE 311

1. f est croissante sur $[2\,;\,6]$ donc $f(3) < f(4)$.
2. On ne peut pas comparer $f(-3)$ et $f(3)$.
3. On ne peut pas comparer $f(-8)$ et $f(1)$.
4. $3 < f(-8) < 4$ et $-1 < f(8) < 2$ donc $f(8) < f(-8)$.

EXERCICE 312

1. **a.** $0 < f(-3) < 4$ et $5 < f(6) < 7$ donc $f(-3) < f(6)$.
   b. $2 < f(-6) < 4$ et $-2 < f(13) < 0$ donc $f(13) < f(-6)$
   c. $-3 < f(-1) < 0$ et $-2 < f(14) < 0$, on ne peut donc pas comparer $f(-1)$ et $f(14)$.
2. $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [-10\,;\,-2] \cup [1\,;\,12]$.
3. Tableau de signe de f :

x	-10		-2		1		12		14
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

EXERCICE 313

1. $f(x) = -x^2 + x$.

$$\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -x^2 + x = f(x).$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

2. $$a < b \leqslant \frac{1}{2} \implies a - \frac{1}{2} < b - \frac{1}{2} \leqslant 0$$
$$\implies \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\implies -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 < -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\implies \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} - \left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$

f est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

$$\frac{1}{2} \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a - \frac{1}{2} < b - \frac{1}{2}$$
$$\implies \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\implies -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\implies \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} - \left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$

f est donc décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. D'après les résultats précédents :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

EXERCICE 314

1. Si $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ alors $f(a) - f(b)$ et $a - b$ sont de même signe, soit :
   - $a - b > 0$ et $f(a) - f(b) > 0$ ou encore $a > b$ et $f(a) > f(b)$ donc f croissante sur I.
   - $a - b < 0$ et $f(a) - f(b) < 0$ ou encore $a < b$ et $f(a) < f(b)$ donc f croissante sur I.

   Ainsi si $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ alors f est croissante.
2. Si $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ alors $f(a) - f(b)$ et $a - b$ sont de signes contraires, soit :
   - $a - b > 0$ et $f(a) - f(b) < 0$ ou encore $a > b$ et $f(a) < f(b)$ donc f décroissante sur I.
   - $a - b < 0$ et $f(a) - f(b) > 0$ ou encore $a < b$ et $f(a) > f(b)$ donc f décroissante sur I.

   Ainsi si $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ alors f est décroissante.

EXERCICE 315

Soit a et b deux réels non nuls, $a \neq b$.

$f(a) - f(b) = 3 + \dfrac{1}{a} - 3 - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b - a}{ab}$.

On en déduit alors que $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} = -\dfrac{1}{ab}$.

Si a et b sont de même signe alors $ab > 0$ donc $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 316

• Supposons $a < b < 1$.

$a < b < 1 \implies a - 1 < b - 1 < 0$

$\implies (a-1)^2 > (b-1)^2$
$\implies 2(a-1)^2 > 2(b-1)^2$
$\implies 2(a-1)^2 + 2 > 2(b-1)^2 + 2$

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$.

• Supposons $1 < a < b$.

$1 < a < b \implies 0 < a-1 < b-1$
$\implies (a-1)^2 < (b-1)^2$
$\implies 2(a-1)^2 < 2(b-1)^2$
$\implies 2(a-1)^2 + 2 < 2(b-1)^2 + 2$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

f est croissante sur $]1\,;\,-\infty[$.

EXERCICE 317

• Supposons $a < b < 0$.

$a < b < 0 \implies a^2 > b^2 \implies -a^2 < -b^2$
$\implies 3 - a^2 < 3 - b^2$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$. f est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$.

• Supposons $0 < a < b$.

$0 < a < b \implies a^2 < b^2 - a^2 > -b^2$
$\implies 3 - a^2 > 3 - b^2$

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$. f est décroissante sur $]0\,;\,-\infty[$.

EXERCICE 318

• Supposons $a < b < 3$.

$a < b < 3 \implies 2a-6 < 2b-6 < 0$
$\implies \dfrac{3}{2a-6} > \dfrac{3}{2b-6}$
$\implies \dfrac{3}{2a-6} - 4 > \dfrac{3}{2b-6} - 4$

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3[$.

• Supposons $3 < a < b$.

$3 < a < b \implies 0 < 2a-6 < 2b-6$
$\implies \dfrac{3}{2a-6} > \dfrac{3}{2a-6}$
$\implies \dfrac{3}{2a-6} - 4 > \dfrac{3}{2b-6} - 4$

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

f est décroissante sur $]3\,;\,-\infty[$.

EXERCICE 319

1. Il faut que $x^2 \neq 0$ donc $x \neq 0$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^\star$.
2. • Supposons $a < b < 0$.

   $a < b < 0 \implies a^2 > b^2$
   $\implies \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{b^2}$
   $\implies -\dfrac{1}{a^2} > -\dfrac{1}{b^2}$
   $\implies 1 - \dfrac{1}{a^2} > 1 - \dfrac{1}{b^2}$

   c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

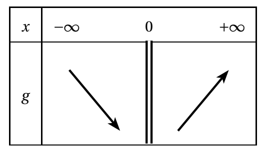
   f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.

   • Supposons $0 < a < b$.

   $0 < a < b \implies a^2 < b^2$
   $\implies \dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{b^2}$
   $\implies -\dfrac{1}{a^2} < -\dfrac{1}{b^2}$
   $\implies 1 - \dfrac{1}{a^2} < 1 - \dfrac{1}{b^2}$

   c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

   f est croissante sur $]0\,;\,-\infty[$.
3.



EXERCICE 320

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. • Supposons $a < b < 3$.

   $a < b < 3 \implies a-3 < b-3 < 0$
   $\implies (a-3)^2 > (b-3)^2$

   c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

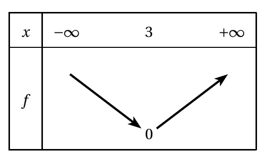
   f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3[$.

   • Supposons $3 < a < b$.

   $3 < a < b \implies 0 < a-3 < b-3$
   $\implies (a-3)^2 < (b-3)^2$

   c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

   f est croissante sur $]3\,;\,-\infty[$.
3.



EXERCICE 321

1. • Supposons $-2 \leqslant a < b < 0$.

   $a < b < 0 \implies a^2 > b^2$
   $\implies 4 - a^2 < 4 - b^2$
   $\implies \sqrt{4-a^2} < \sqrt{4-b^2}$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

f est croissante sur $[-2\ ;\ 0[$.

• Supposons $0 < a < b < 2$.

$$\begin{aligned}0 < a < b &\Longrightarrow a^2 < b^2\\ &\Longrightarrow 4-a^2 > 4-b^2\end{aligned}$$

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

f est décroissante sur $]0\ ;\ 2]$.

2.

x	-2		0		2
f	0	↗	2	↘	0

EXERCICE 322

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Etudions le signe de $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ pour a et b réels, $a \neq b$.

$$\begin{aligned}f(a)-f(b) &= 2\left(a^2-b^2\right)-6(a-b)\\ &= 2(a-b)(a+b)-6(a-b)\\ &= (a-b)(2a+2b-6)\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = 2(a+b-3)$

3. Si $a < b < 1{,}5$ alors $a+b-3 < 0$ donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} < 0$.

Si $1{,}5 < a < b$ alors $a+b-3 > 0$ donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} > 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1{,}5[$ et croissante sur $]1{,}5\ ;\ +\infty[$.

4.

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
f		↘	0	↗	

EXERCICE 323

1. $f(x) = 2x^2-x-6-x^2-2x+8$

d'où $f(x) = x^2-3x+2$.

2. $f(x) = (x-2)(2x+3-x-4) = (x-2)(x-1)$.

3. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} = x^2-3x+\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{4} = x^2-3x+2$

Ainsi $f(x) = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.

4. Pour tout x réel, $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

De plus $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

La fonction f admet un minimum égal à $-\dfrac{1}{4}$ atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 324

1. $f(x) = -2x^2-x+3$.

2.

$$\begin{aligned}-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8} &= -2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{25}{8}\\ &= -2x^2-x-\frac{1}{8}+\frac{25}{8}\\ &= -2x^2-x+3\end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = -2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$.

3. Pour tout réel x, $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 > 0$ donc $-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 < 0$ ainsi $f(x) \leqslant \dfrac{25}{8}$.

La fonction f admet un maximum égal à $\dfrac{25}{8}$ atteint pour $x = -\dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 325

1. $3-(4x-9)^2 = 3-16x^2+72x-81 = -16x^2+72x-78$.

Ainsi $f(x) = 3-(4x-9)^2$.

2. Supposons $a < b \leqslant \dfrac{9}{4}$.

$$\begin{aligned}a < b \leqslant \frac{9}{4} &\Longrightarrow 4a < 4b \leqslant 9\\ &\Longrightarrow 4a-9 < 4b-9 \leqslant 0\\ &\Longrightarrow (4a-9)^2 > (4b-9)^2\\ &\Longrightarrow -(4a-9)^2 < -(4b-9)^2\\ &\Longrightarrow 3-(4a-9)^2 < 3-(4b-9)^2\end{aligned}$$

C'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc croissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{9}{4}\right]$.

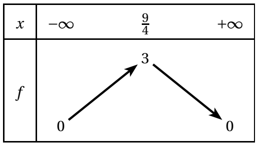
Supposons $\dfrac{9}{4} \leqslant a < b$.

$$\begin{aligned}\frac{9}{4} \leqslant a < b &\Longrightarrow 9 \leqslant 4a < 4b\\ \frac{9}{4} \leqslant a < b &\Longrightarrow 0 \leqslant 4a-9 < 4b-9\\ &\Longrightarrow (4a-9)^2 < (4b-9)^2\\ &\Longrightarrow -(4a-9)^2 > -(4b-9)^2\\ &\Longrightarrow 3-(4a-9)^2 > 3-(4b-9)^2\end{aligned}$$

C'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc décroissante sur $\left[\dfrac{9}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

3.



4. D'après le tableau de variations, la fonction f admet un maximum égal à 3 atteint pour $x = \dfrac{9}{4}$.

EXERCICE 326

$C(q) = (q-6)^2 - 6^2 + 56 = (q-6)^2 + 30$.

Pour tout q réel, $(q-6)^2 \geqslant 0$ donc $C(q) \geqslant 30$.

Le coût moyen minimal est égal à 30, il est atteint pour $q = 6$.

Le coût sera minimal sera égal à 30 000 € pour 6 000 articles fabriqués.

EXERCICE 327

1. $R(x) = 140x$.

2. $B(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 140x - 350$
$= -2\left(x^2 - 70x\right) - 350$.

D'autre part $x^2 - 70x = (x-35)^2 - 35^5 = (x-35)^2 - 1225$

On en déduit alors que :

$B(x) = -2\Big((x-35)^2 - 1225\Big) - 350$

Soit $B(x) = 2100 - 2(x-35)^2$.

3. Pour tout x réel, $(x-35)^2 \geqslant 0$ donc $B(x) \leqslant 2100$, de plus $B(35) = 2100$.

On en déduit que le bénéfice sera maximal pour 35 objets fabriqués et vendus, le bénéfice sera alors de 2100 €.

EXERCICE 328

1. Figure en fin d'exercice.

2. On a $MP = NQ = KH = 4 - x$.

En appliquant le théorème de Thalès, on obtient $MN = BC \times \dfrac{AK}{AH} = 2x$.

Ainsi $\mathcal{A}(x) = 2x(4-x) = 8x - 2x^2$.

3. $8 - 2(x-2)^2 = 8 - 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = -2x^2 + 8x$.

D'où $a(x) = 8 - 2(x-2)^2$.

4. • Supposons $0 \leqslant a < b \leqslant 2$.

$$\begin{aligned}
0 \leqslant a < b \leqslant 2 &\implies -2 \leqslant a-2 < b-2 \leqslant 0 \\
&\implies (a-2)^2 > (b-2)^2 \\
&\implies -2(a-2)^2 < -2(b-2)^2 \\
&\implies 8 - 2(a-2)^2 < 8 - 2(b-2)^2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}(a) < \mathcal{A}(b)$.

La fonction $\mathcal{A}$ est donc croissante sur $[0\,;\,2]$.

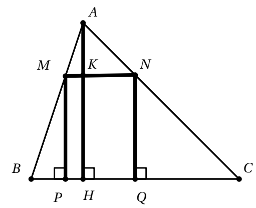
• Supposons $2 \leqslant a < b \leqslant 4$.

$$\begin{aligned}
2 \leqslant a < b \leqslant 4 &\implies 0 \leqslant a-2 < b-2 \leqslant 2 \\
&\implies (a-2)^2 < (b-2)^2 \\
&\implies -2(a-2)^2 > -2(b-2)^2 \\
&\implies 8 - 2(a-2)^2 > 8 - 2(b-2)^2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}(a) > \mathcal{A}(b)$.

La fonction $\mathcal{A}$ est donc décroissante sur $[2\,;\,4]$.

5. D'après les résultats précédents, l'aire est maximale pour $x = 2$, elle est alors égale à 8 unités d'aire.



EXERCICE 329

1. $f(x) \geqslant 2 \iff x \leqslant 0,5$.

2. **a.** Soit $-2 < a < b$.

$$\begin{aligned}
-2 < a < b &\implies 0 < a+2 < b+2 \\
&\implies \frac{5}{a+2} > \frac{5}{b+2}
\end{aligned}$$

Soit $f(a) > f(b)$.

b. D'après le résultat précédent, f est décroissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.

3. **a.**

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$4,5$	$3,5$	$2,5$	$1,5$	$0,5$	$-0,5$

b. Graphique en fin d'exercice.

4. **a.** $f(x) - g(x) = \dfrac{5}{x+2} + x - 2,5 = \dfrac{5 + x^2 + 2x - 2,5x - 5}{x+2}$

D'où $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 - 0,5x}{x+2} = \dfrac{x(x-0,5)}{x+2}$.

b. $x > -2$ donc $x + 2 > 0$.

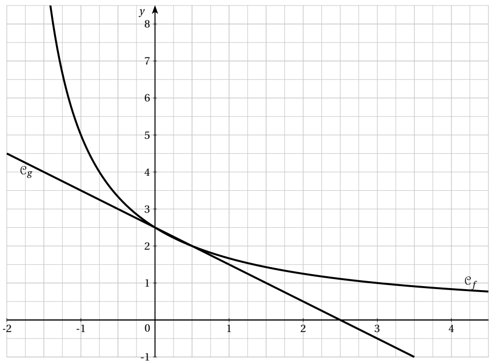
Le signe de $f(x) - g(x)$ ne dépend donc que du signe du numérateur.

Etablissons le tableau de signe du numérateur :

x	$-\infty$		0		0,5		$+\infty$
signe de $2x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) - g(x) \geqslant 0$ ou encore $f(x) \geqslant g(x)$ c'est-à-dire que la courbe de f est au-dessus de la courbe de g si $x \in]-\infty\,;\,0] \cup [0{,}5\,;\,+\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ sera au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\,0{,}5]$.



EXERCICE 330

1. $f(0) = 1$ donc $b = 1$.
2. $f(2) = 2$ et $f(4) = 3$.
3. $\dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{1}{2}$ donc $a = \dfrac{1}{2}$.
4. D'après les résultats précédents $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

EXERCICE 331

• $\mathcal{D}_1$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 2 donc $b = 2$.

$a = \dfrac{f(3) - f(0)}{3-0} = \dfrac{1}{3}$, ainsi $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$.

• $\mathcal{D}_2$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 1 donc $b = 1$.

$a = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} = 2$, ainsi $f_2(x) = 2x + 1$.

• $\mathcal{D}_3$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 3 donc $b = 3$.

$a = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = \dfrac{1}{2}$, aiinsi $f_3(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$.

• $\mathcal{D}_4$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 0 donc $b = 0$.

$a = \dfrac{f(5) - f(0)}{5-0} = \dfrac{1}{5}$, ainsi $f_4(x) = \dfrac{1}{5}x$.

• $\mathcal{D}_5$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 1 donc $b = 1$.

$a = \dfrac{f(-1) - f(0)}{-1-0} = -2$, ainsi $f_5(x) = -2x + 1$.

• $\mathcal{D}_6$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 4 donc $b = 4$.

$a = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = -1$, ainsi $f_6(x) = -x + 4$.

EXERCICE 332

• $\mathcal{D}_1$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 3 donc $b = 3$.

$a = \dfrac{f(5) - f(0)}{5-0} = \dfrac{2}{5}$

Ainsi $f_1(x) = \dfrac{2}{5}x + 3$.

• $\mathcal{D}_2$.

$a = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = 4$

La droite coupe l'axe des ordonnées en -4 donc $b = -4$.

Ainsi $f_2(x) = 4x - 4$.

• $\mathcal{D}_3$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en -1 donc $b = -1$.

$a = \dfrac{f(-2) - f(0)}{-2-0} = -\dfrac{3}{2}$

Ainsi $f_3(x) = -\dfrac{3}{2}x - 1$.

• $\mathcal{D}_4$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 2 donc $b = 2$.

$a = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = 1$

Ainsi $f_4(x) = x + 2$.

• $\mathcal{D}_5$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 1 donc $b = 1$.

$a = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} = -1$

Ainsi $f_5(x) = -x + 1$.

• $\mathcal{D}_6$.

La droite coupe l'axe des ordonnées en 4 donc $b = 2$.

$a = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = 0$

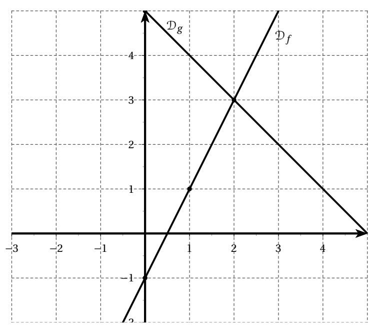
Ainsi $f_6(x) = 2$.

EXERCICE 333

Pour f on calcule par exemple $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ et on place les points de coordonnées $(0\,;\,-1)$ et $(1\,;\,1)$.

Autre méthode : $b = -1$ la droite coupe donc l'axe vertical en -1, on place ce point puis comme $a = 2$ depuis le point que nous venons de placer, on avance horizontalement (vers la droite) d'une unité puis verticalement (vers le haut car $a > 0$) de deux unités, nous obtenons un second point.

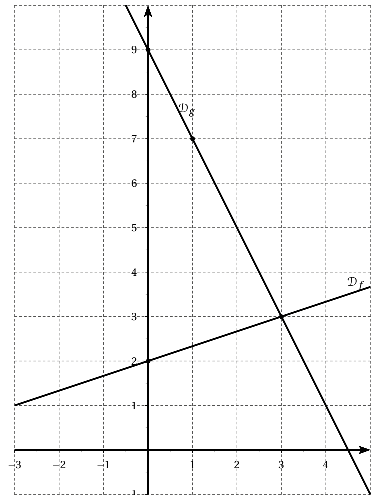
Pour g on calcule par exemple $g(0) = 5$ et $g(2) = 3$ et on place les points de coordonnées (0 ; −1) et (2 ; 3).
Autre méthode : $b = 5$ la droite coupe donc l'axe vertical en 5, on place ce point puis comme $a = -1$ depuis le point que nous venons de placer, on avance horizontalement (vers la droite) d'une unité puis verticalement (vers le bas car $a < 0$) d'une unité, nous obtenons un second point.



Par lecture graphique $f(x) = g(x)$ au point d'intersection des droites soit au point de coordonnées (2 ; 3).
On en déduit que $f(x) = g(x) \iff x = 2$.

EXERCICE 334
Pour f on calcule par exemple $f(0) = 2$ et $f(3) = 3$ et on place les points de coordonnées (0 ; 3) et (3 ; 3).
Autre méthode : $b = 2$ la droite coupe donc l'axe vertical en 2, on place ce point puis comme $a = \dfrac{1}{3}$ depuis le point que nous venons de placer, on avance horizontalement (vers la droite) de 3 unités puis verticalement (vers le haut car $a > 0$) de 1 unité, nous obtenons un second point.

Pour g on calcule par exemple $g(0) = 9$ et $g(1) = 7$ et on place les points de coordonnées (0 ; 9) et (1 ; 7).
Autre méthode : $b = 9$ la droite coupe donc l'axe vertical en 9, on place ce point puis comme $a = -2$ depuis le point que nous venons de placer, on avance horizontalement (vers la droite) d'une unité puis verticalement (vers le bas car $a < 0$) de deux unités, nous obtenons un second point.



Par lecture graphique $f(x) = g(x)$ au point d'intersection des droites soit au point de coordonnées (3 ; 3).
On en déduit que $f(x) = g(x) \iff x = 3$.

EXERCICE 335
On sait que f est une fonction affine, donc $f(x) = ax + b$ avec a et b réels que nous allons chercher.
$f(-2) = 5$ et $f(2) = 1$ donc $a = \dfrac{f(-2) - f(2)}{-2-2} = \dfrac{-6}{-4} = 1{,}5$.
Donc $f(x) = 1{,}5x + b$.
On a aussi $f(2) = 1{,}5 \times 2 + b = 1$ donc $b = 1 - 3 = -2$
Ainsi $f(x) = 1{,}5x - 2$. Nous en déduisons le tableau de valeurs suivant :

x	-2	2	3	5	10	15
$f(x)$	-5	1	$2{,}5$	$5{,}5$	13	$20{,}5$

EXERCICE 336
On sait que f est une fonction affine, donc $f(x) = ax^2 + b$ avec a et b réels que nous allons chercher.
$f(-1) = 3$ et $f(15) = 13$ donc $a = \dfrac{f(-1) - f(15)}{-1-15} = 0{,}625$.
Donc $f(x) = 0{,}625x + b$.
On a aussi $f(-1) = 0{,}625 \times (-1) + b = 3$ donc $b = 3 + 0{,}625 = 3{,}625$
Ainsi $f(x) = 0{,}625x + 3{,}625$. Nous en déduisons le tableau de valeurs suivant :

x	-1	1	3	5	10	15
$f(x)$	3	$4{,}25$	$5{,}5$	$6{,}75$	$9{,}875$	13

EXERCICE 337

On utilise la méthode détaillée dans les deux exercices précédents.

1. $f(x) = 2x - 3$.
2. $f(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{37}{7}$.
3. $f(x) = 2x + 1$.
4. $f(x) = -\frac{10}{3}x - \frac{17}{3}$.
5. $f(x) = 6x - 9$.
6. $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$.

EXERCICE 338

Un article subit une augmentation de 5% son prix est multiplié par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
D'où $f(x) = 1,05x$.
Cette fonction est linéaire (un article à 0 € vaudra encore 0 € après augmentation !)

EXERCICE 339

Le prix d'un article baisse de 2% son prix est multiplié par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.
D'où $f(x) = 0,98x$. Cette fonction est linéaire.

EXERCICE 340

1. $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{19}{3} - \frac{5}{3}}{2 - 0} = \frac{7}{3}$.
   $\frac{f(2) - f(-4)}{2 + 4} = \frac{\frac{19}{3} + \frac{23}{3}}{6} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$.
   Les deux taux d'évolution sont égaux, la fonction f peut être une fonction affine.
2. $\frac{f(34) - f(21)}{34 - 21} = \frac{55 - 34}{13} = \frac{21}{13}$.
   $\frac{f(55) - f(34)}{55 - 34} = \frac{89 - 55}{21} = \frac{34}{21}$.
   $\frac{21}{13} \neq \frac{34}{21}$, la fonction f n'est pas une fonction affine.
3. $\frac{f(2\sqrt{2}) - f(1)}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{7}$.
   $\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1)}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = \sqrt{2}\frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
   $\frac{3\sqrt{2} - 2}{7} \neq \sqrt{2}$, la fonction f n'est pas une fonction affine.

EXERCICE 341

1. $a = 2 > 0$ donc f_1 est croissante.
2. $a = 0,2 > 0$ donc f_2 est croissante.
3. $a = -3 < 0$ donc f_3 est décroissante.
4. $a = 0,99 > 0$ donc f_4 est croissante.
5. $a = 3 - \pi < 0$ donc f_5 est décroissante.
6. $a = -\frac{5}{7} < 0$ donc f_6 est décroissante.

EXERCICE 342

1. $a = 2 > 0$ donc f_1 est croissante.
   $2x + 4 = 0 \iff x = -2$ d'où

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $a = -3 < 0$ donc f_2 est décroissante.
   $-3x - 6 = 0 \iff x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

3. $a = -\sqrt{3} < 0$ donc f_3 est décroissante.
   $-\sqrt{3}x + \sqrt{6} = 0 \iff x = \sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

4. $a = -\frac{2}{3}0$ donc f_4 est décroissante.
   $-\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} \iff x = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$.

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

5. $a = -5 < 0$ donc f_5 est décroissante.
   $3 - 5x = 0 \iff x = \frac{3}{5}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

6. $a = \frac{1}{5} > 0$ donc f_6 est croissante.
   $\frac{1}{5}x + \frac{1}{3} = 0 \iff x = -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

EXERCICE 343

$a=-\dfrac{4}{3}<0$ la fonction est décroissante, on peut donc éliminer les tableaux C et D.

$-\dfrac{9}{4}<0<\dfrac{3}{4}$ et $f(0)=-3<0$ on peut donc éliminer le tableau B.

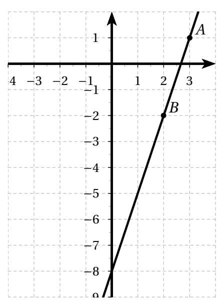
Le tableau de f est donc le A.

EXERCICE 344

Fonction affine	Droite correspondante
$f(x)=x+2$	d_2
$g(x)=2$	d_1
$h(x)=2x$	d_3

EXERCICE 345

1.



2. a. $f(2)=-2$ et $f(3)=1$.

b. Par lecture graphique, on obtient $y=3x-8$

EXERCICE 346

1. Par hypothèse f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la « proportionnalité des écarts », il existe donc un réel tel que pour tous réels x et x_1 $(x \neq x_1)$, $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=a$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=a \implies f(x)-f(x_1)=a(x-x_1)$$
$$\implies f(x)-f(x_1)=ax+f(x_1)-ax_1$$
$$\implies f(x)-f(x_1)=ax+b \text{ avec } b=f(x_1)-ax_1$$

2. D'après le résultat précédent, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la « proportionnalité des écarts » alors $f(x)$ est une fonction affine.

EXERCICE 347

1. a. $-\dfrac{2}{3}x+1>0 \iff x<\dfrac{3}{2}$.

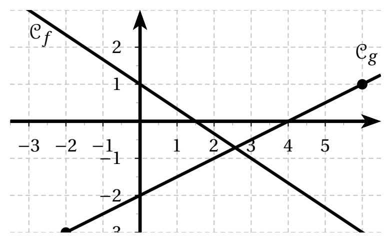
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

b. $a<b \implies -\dfrac{2}{3}a>-\dfrac{2}{3}b$

$\implies -\dfrac{2}{3}a+1>-\dfrac{2}{3}b+1$

$\implies f(a)>f(b)$

c.



2. a. Voir graphique précédent.

b. $a=\dfrac{g(6)-g(-2)}{6+2}=\dfrac{4}{8}=0,5$.

de plus $g(6)=0,5\times 6+b=1$ donc $b=-2$.

Ainsi $g(x)=0,5x-2$.

3. $f(x)\leqslant \dfrac{1}{2}x-2 \iff -\dfrac{2}{3}x+1\leqslant \dfrac{1}{2}x-2$

$\iff -4x+6\leqslant 3x-12$

$\iff -7x\leqslant -18$

$\iff x\geqslant \dfrac{18}{7}$

EXERCICE 348

1. $M\in[AB]$ donc $0\leqslant x\leqslant 17$.

La fonction f est définie sur $[0\,;\,17]$.

2. $h=6$, $CD=7$ et $BM=17-x$.

$f(x)=\dfrac{CD+BM}{2}\times h=\dfrac{7+17-x}{2}\times 6$

D'où $f(x)=72-3x$.

3. L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à 72.

On cherche x tel que $72-3x\geqslant 36$

$72-3x\geqslant 36 \implies -3x\geqslant -36 \implies x\leqslant 12$.

L'aire du trapèze $MBCD$ est supérieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$ si $AM=12$.

EXERCICE 349

1. Pour $x \leqslant -1$

x	-3	-1
$f(x)$	6	0

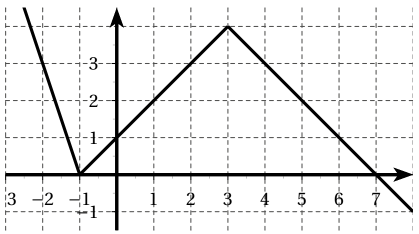
Pour $-1 < x \leqslant 3$

x	0	3
$f(x)$	1	4

Pour $x > 3$

x	4	5
$f(x)$	3	2

2.



3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f		↘	0	↗	4	↘	

EXERCICE 350

Courbe A : $f(x) = \begin{cases} -x & \text{pour } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{pour } 0 < x \leqslant 2 \\ 5-0,5x & \text{pour } x > 2 \end{cases}$

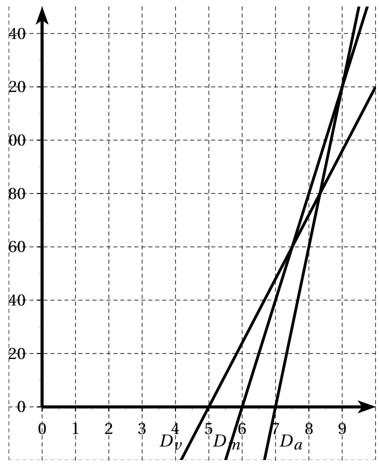
Courbe B : $f(x) = \begin{cases} -3x-6 & \text{pour } x \leqslant -2 \\ 2x+4 & \text{pour } -2 < x \leqslant 0 \\ 4 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Courbe C : $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour } x \leqslant -2 \\ -x & \text{pour } -2 < x \leqslant 2 \\ -2 & \text{pour } x > 2 \end{cases}$

EXERCICE 351

1. $v(t) = 24(t-5) = 24t - 120.$
$s(t) = 40(t-6) = 40t - 240$
$a(t) = 60(t-7) = 60t - 420.$

2.



3. Les droites D_m et D_v se coupent au point d'abscisse 7,5, la moto dépasse le vélo à 7h30.
Par le calcul, il faut résoudre l'inéquation :
$24x - 120 \leqslant 40x - 240.$
$24x - 120 \leqslant 40x - 240 \iff -16x \leqslant 120$
$\iff x \geqslant \dfrac{120}{16} \iff x \geqslant 7,5.$

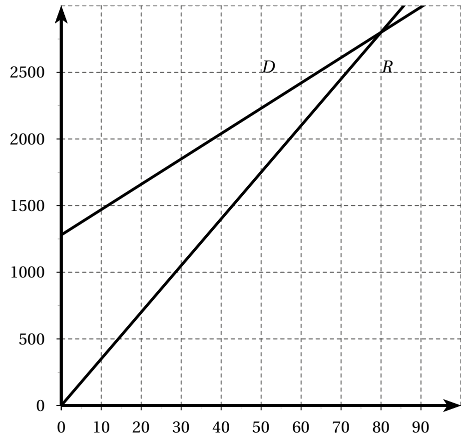
4. Il faut résoudre les inéquations $24x - 120 \leqslant 60x - 420$ et $60x - 420 \leqslant 40x - 240$.
• $24x - 120 \leqslant 60x - 420 \iff 300 \leqslant 36x$
$\iff x \geqslant \dfrac{300}{36} \iff x = 8 + \dfrac{1}{3}.$
• $60x - 420 \leqslant 40x - 240 \iff 20x \leqslant 180 \iff x \leqslant 9$
Donc $8 + \dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 9.$
L'automobile sera entre le vélo et le scooter entre 8h20 et 9h.

EXERCICE 352

1. Graphique en fin d'exercice.

2. Les recettes équilibrent les dépenses lorsque $D(x) = R(x)$.
$D(x) = R(x) \iff 16x = 1280 \iff x = 80.$
Les recettes équilibrent les recettes pour 80 m^3.

3. Les recettes seront une fois et demie les dépenses lorsque $R(x) = 1,5D(x)$
$R(x) = 1,5D(x) \iff 35x = 28,5x + 1920$
$\iff 6,5x = 1920 \iff x = \dfrac{1920}{6,5}.$



EXERCICE 353

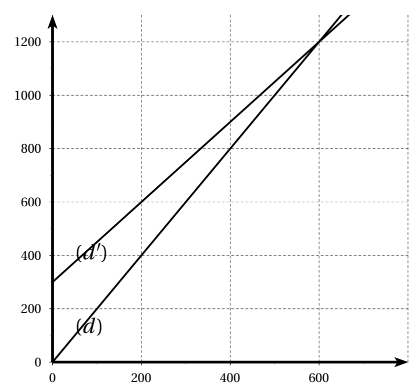
1. Lorsque $M = D$, l'aire du triangle DCM est nulle, l'aire de ce triangle est donc donnée par f_2.
   Lorsque $M = A$, l'aire du triangle ABM est nulle, l'aire de ce triangle est donc donnée par f_1.
   f_3 correspond donc à l'aire du triangle BCM.
2. $f_1(x) = 25 - 5x$
   $f_2(x) = 5x$ et $f_3(x) = x + 20$.
3. L'aire du triangle ABM est égale à $\dfrac{1}{2}AB \times AM = 5x$ d'où $AB = 10$.
   Lorsque $M = D$, l'aire du triangle ABM est égale à 20, d'où $AD = 4$.
   Lorsque $M = A$, l'aire du triangle DCM est égale à 25, d'où $CD = 12,5$
   Soit H le projeté orthogonal de B sur C, le triangle BCH est rectangle, en appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons $BC = \sqrt{4^2 + 2,5^2} = \sqrt{22,25}$.

EXERCICE 354

1. Soit f la fonction affine donnant le nombre d'habitants en fonction de l'année x : $f(x) = ax + b$.
   Ainsi : $a = \dfrac{f(1985) - f(1950)}{1985 - 1950} = \dfrac{220000 - 150000}{35}$
   $a = 2000$.
   Donc $f(x) = 2000x + b$.
   $f(1985) = 220\,000$
   D'où $b = 2\,200\,000 - 1985 \times 2000 = -3\,750\,000$.
   Ainsi $f(x) = 2\,000x - 3\,750\,000$.
   En 2022, il y aurait $f(2022) = 294\,000$ habitants.
2. Soit f la fonction affine donnant la valeur du capital en fonction de l'année x : $f(x) = ax + b$.
   Ainsi $a = \dfrac{f(2010) - f(2006)}{2010 - 2006} = 250$
   donc $f(x) = 250x + b$.
   $f(2010) = 6000 \iff b = 6000 - 250 \times 2010 = -496\,500$.
   Ainsi $f(x) = 250x - 496\,500$.
   a. En 2022, il atteindrait $f(2022) = 9000$ €.
   b. $f(x) \geqslant 10\,000 \iff 250x - 496\,500 \geqslant 10\,000$
   $\iff x \geqslant \dfrac{10\,000 + 496\,500}{250}$
   $\iff x \geqslant 2026$ soit en 2026.
3. Soit f la fonction affine donnant la taille de l'enfant en fonction de l'année x : $f(x) = ax + b$.
   Ainsi, $a = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 19$ donc $f(x) = 19x + b$.
   $f(0) = 54$ donc $b = 54$ ainsi $f(x) = 19x + 54$.
   Si sa taille évoluait de façon affine, à 18 ans il mesurerait $f(18) = 396$ soit 396 cm!!
4. Soit f la fonction affine donnant la valeur de l'action en fonction du nombre de mois x : $f(x) = ax + b$.
   Ainsi $a = \dfrac{f(24) - f(0)}{24 - 0} = \dfrac{35}{24}$ donc $f(x) = \dfrac{35}{24}x + b$
   de plus $f(0) = 132$ donc $b = 132$
   ainsi $f(x) = \dfrac{35}{24}x + 132$.
   L'action doublera si $f(x) \geqslant 2 \times 132$
   $f(x) \geqslant 2 \times 132 \iff \dfrac{35}{24}x + 132 \geqslant 264$
   $\iff x \geqslant 132 \times \dfrac{24}{35} \iff x \geqslant \dfrac{3168}{35}$
   soit $x \geqslant 90,51$ donc à partir du 91^{e} mois.

EXERCICE 355

1. **a.** $S_A = 2x$. **b.** $S_B = 1,5x + 300$.
2.



3. **a.** D'après le graphique, pour $x = 500$, $f(5) < g(5)$ ou

encore la droite (d) est sous la droite (d'), dans ce cas le tarif A est donc le plus intéressant.

b. D'après le graphique, pour $x = 700$, $g(7) < f(7)$ ou encore la droite (d') est sous la droite (d), dans ce cas le tarif B est donc le plus intéressant.

4. Nous recherchons x tel que $g(x) \leqslant f(x)$.
$1,5x + 300 \leqslant 2x \iff 300 \leqslant 0,5x \iff 600 \leqslant x$.
A partir de 600 boîtes achetées, le tarif B devient plus avantageux.

EXERCICE 356

1. Pour 10 mois de garderie, le prix payé sera de 140 € $(10 \times 10 + 40)$ avec la formule A et de 180 € (18×10) avec la formule B.

2. $A(x) = 10x + 40$ et $B(x) = 18x$.

3. Voir l'écran de la calculatrice.

4. **a.** D'après le graphique, les droites se coupent au point d'abscisse 5. Les prix à payer sont les mêmes pour 5 mois.

b. Il faut résoudre l'équation $10x + 40 = 18x$.
$10x + 40 = 18x \iff 40 = 8x \iff x = \dfrac{40}{8} = 5$.

5. D'après le graphique, pour $x = 4$, $A(4) < B(4)$, le tarif A est donc plus intéressant.

6. Il faut résoudre l'inéquation $10x + 40 \leqslant 118$.
$10x + 40 \leqslant 118 \iff 10x \leqslant 78 \iff x \leqslant 7,8$
En utilisant la formule A, pour un budget de 113 €, on pourra payer au maximum 7 mois.

EXERCICE 357

Partie A

1. a.

Prix payé \ Films loués	4	8	10	12
Option A	12	24	30	36
Option B	21	27	30	33
Plus intéressant	A	A	A ou B	B

b. Voir le tableau précédent.

2. a. $A(x) = 3x$.

b. $B(x) = 1,5x + 15$.

Partie B

1. Voir le graphique à la fin de la partie B.

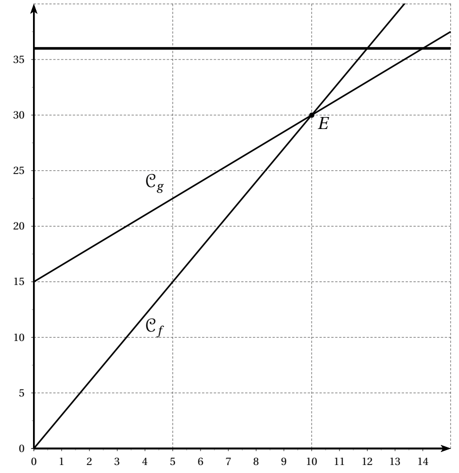
2. **a.** D'après le graphique, $x_E = 10$ et $y_E = 30$.

b. Les deux options sont équivalentes si on loue 10 films dans les 6 mois, on dépensera alors 30 €.

3. Si Nicolas loue 11 films, il dépensera 22 € avec l'option A.

4. D'après le graphique $g(x) = 24$ si $x = 6$. Nicolas pourra donc louer 6 films en 6 mois avec l'option B.

5. Il faut résoudre l'inéquation $g(x) < f(x)$.
$1,5x + 15 < 3x \iff 15 < 1,5x \iff 10 < x$.
L'option B sera plus intéressante que l'option A si on loue plus de 10 films dans les 6 mois.



Partie C

1. Pour 36 €, il louera 12 films avec l'option A et 14 films avec l'option B.

2. **a.** Chaque film coûte 2,5 € soit une dépense de $2,5x$ pour x films, l'abonnement s'élève à 7,50 €. On en déduit alors que le coût avec cet abonnement sera $h(x) = 2,5x + 7,5$.

b. Il faut résoudre l'inéquation $2,5x + 7,5 \leqslant 36$.
$2,5x + 7,5 \leqslant 36 \iff 2,5x \leqslant 28,5 \iff x \leqslant 11,4$.
Avec cette option, il pourra louer au maximum 11 films.

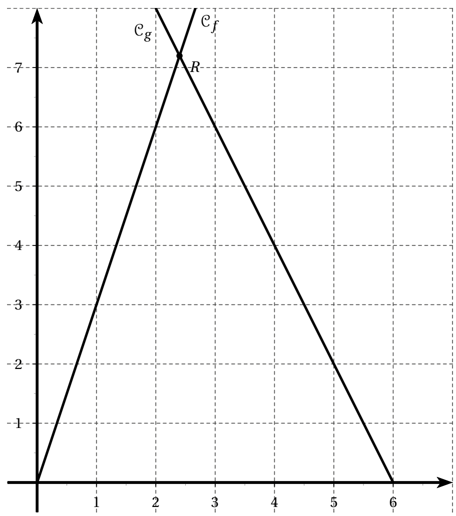
c. D'après les résultats précédents, pour un budget de 36 €, Nicolas devrait prendre l'option B.

EXERCICE 358

1. Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle ABM.
$\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2} \times AB \times BM = 3x$.

2. a. $DN = DC - CN = 6 - x$.
b. Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire du triangle ADN.
$\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2} \times AD \times DN = 2(6-x) = 12 - 2x$.

3. a.



b. Il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
$3x = 12 - 2x \iff 5x = 12 \iff x = 2,4$.
On a alors $f(2,4) = g(2,4) = 7,2$. Les deux droites se coupent au point $R(2,4\ ;\ 7,2)$.

4. a. D'après le résultat précédent, les deux aires seront égales pour $x = 2,4$ cm.
L'aire de chaque triangle est alors égale à $7,2\ \text{cm}^2$.
b. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du quadrilatère $AMCN$.
$\mathcal{A} = 4 \times 6 - 2 \times 7,2 = 9,6\ \text{cm}^2$.

EXERCICE 359

Partie A

1. Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle DEM.
$\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2} \times DE \times DM = 3x$.

2. a. $MC = DC - DM = 7,5 - x$.
b. Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire du triangle BCM.
$\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2} \times BC \times CM = 2(7,5 - x)$.
D'où $\mathcal{A}_2 = 15 - 2x$.

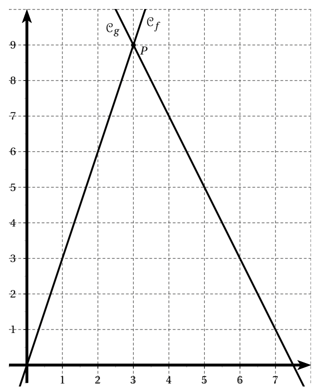
3. Les deux aires sont égales si $3x = 15 - 2x$ donc si $x = 3$ cm.

Partie B

1. Graphique en fin d'exercice.

2. Les deux courbes se coupent au point P d'abscisse 3. Donc pour $x = 3$, les deux aires sont égales.

3. Le point P a pour ordonnée $y = 9$, l'aire est égale à $9\ \text{cm}^2$.

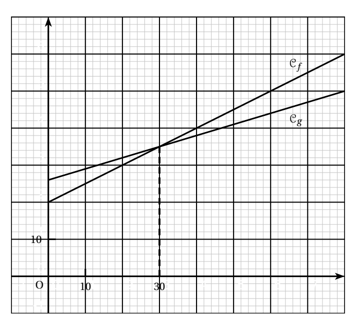


EXERCICE 360

1. a. Pour 1h30 d'utilisation, on ne dépasse pas les forfaits, pour la formule M le prix sera égal à 20 €, pour la formule P le prix sera égal à 26 €.
b. La durée d'utilisation de 2h40 dépasse le forfait de 40 min. Avec le forfait M le prix sera égal à 40 € $(20 + 40 \times 0,5)$, avec le forfait P le prix sera égal à 38 € $(26 + 40 \times 0,3)$.

2. Soit x la durée (en minutes) de dépassement au-delà de 2 h.
a. $P_1 = 20 + 0,5x$.
b. $P_2 = 26 + 0,3x$.

3.



4. **a.** $0,5x+20 = 0,3x+26 \iff 0,2x = 6 \iff x = 30$.
   b. Pour un dépassement de 30 min, le prix à payer sera identique pour les deux formules.
   c. Voir graphique.
5. Il faut résoudre l'inéquation $0,3x+26 < 0,5x+20$.
   $0,3x+26 < 0,5x+20 \iff 6 < 0,2x \iff 30 < x$.
   La formule P sera plus économique pour une durée d'utilisation de plus de 2h30.

EXERCICE 361

1. Soit $\mathcal{A}_T$ l'aire du rectangle $MBCF$.
   $\mathcal{A}_T = MB \times BC = 8 \times 8 = 64\ \text{m}^2$.
   Soit $\mathcal{A}_R$ l'aire du trapèze $AMFE$.
   $\mathcal{A}_R = \dfrac{MF \times (AM+EF)}{2} = \dfrac{8(1+7)}{2} = 32\ \text{m}^2$.
2. **a.** $\mathcal{A}_T = MB \times BC = 8(9-x) = 72-8x$.
   b. $\mathcal{A}_R = \dfrac{MF \times (AM+EF)}{2} = \dfrac{8 \times (x+x+6)}{2} = 8x+24$.
3. Voir calculatrice.
4. **a.** Les deux droites se coupent au point d'abscisse 3 et d'ordonnée 48.
   Si $AM = 3$ m, les deux salles auront une aire égale à $48\ \text{m}^2$.
   b. Il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   $8x+24 = 72-8x \iff 16x = 48 \iff x = 3$.

EXERCICE 362

Partie A

1.

Nombre de kilomètres parcourus	80	160	200
Prix à payer avec le tarif A	$\boxed{4\,000}$	8 000	10 000
Prix à payer avec le tarif B	6 100	$\boxed{7700}$	8 500
Prix à payer avec le tarif C	8 000	8 000	$\boxed{8000}$

2. Voir le tableau précédent.
3. Le tarif C est un forfait à kilométrage illimité, le prix ne dépend donc pas du nombre de kilomètres parcourus. Ainsi $P_C = 8000$.
4. $P_A = 50x$ et $P_B = 20x+4500$.

Partie B

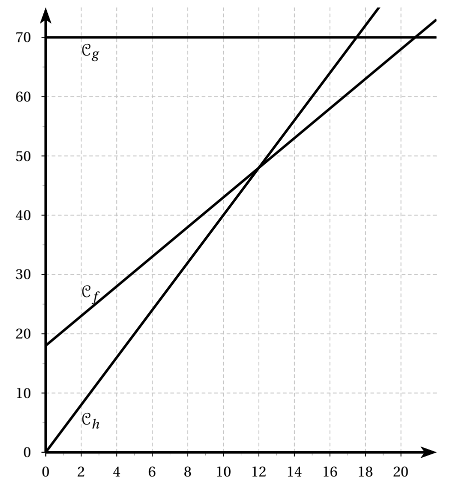
1. Voir calculatrice.
2. $b(100) = 6500$, pour 100 km parcourus, le coût sera de 6500 € avec le tarif B.
3. Il faut résoudre l'équation $a(x) = 6000$.
   $50x = 6000 \iff x = \dfrac{6000}{50} = 120$. On peut donc parcourir 120 km.

EXERCICE 363

1.

	5 films	15 films	25 films
Coût au tarif A	20	60	100
Coût au tarif B	30,5	55,5	80,5
Coût au tarif C	70	70	70

2. **a.** f correspond au tarif B
   g correspond au tarif C
   h correspond au tarif A.
   b.



3. **a.** $4x = 2,5x+18 \iff 1,5x = 18 \iff x = 12$.
   b. Pour 12 films visionnés, le prix sera identique pour les tarifs A et B.
4. **a.** Graphiquement, il s'agit de déterminer à partir de quelle valeur de x on a $g(x) \leqslant f(x)$.
   D'après le graphique, $x = 21$.
   b. $70 \leqslant 2,5x+18 \iff 52 \leqslant 2,5x \iff 20,8 \leqslant x$.
5. Entre 0 et 12 films, le tarif A est le plus intéressant.
   Entre 12 et 20 films, le tarif B est le plus intéressant.
   A partir de 21 films, le tarif C est le plus intéressant.

EXERCICE 364

1. Quand $x = 4$, M. Martin est à 240 km de Petitville.
   Quand $x = 10$, M. Martin est à 600 km de Petitville.

2. Quand $x = 4$, M. Gaspard a parcouru 360 km, il est donc à 540 km de Petitville.
Quand $x = 10$, M. Gaspard a parcouru 900 km, il est donc arrivé à Petitville.

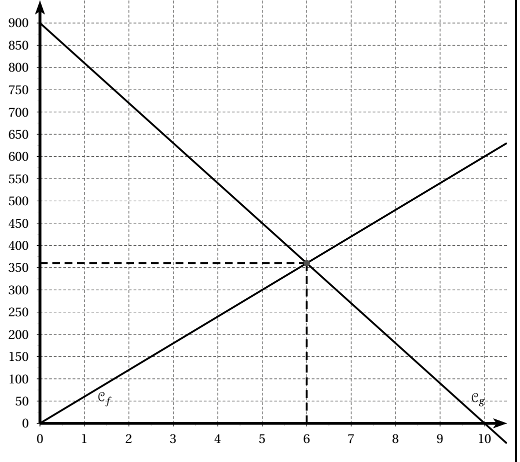
3. $f(x) = 60x$.

4. $g(x) = 900 - 90x$.

5.

x	0	1	4	10
$f(x)$	0	60	240	600
$g(x)$	900	810	540	0

6.



7. Les deux droites se coupent au point de coordonnées (6 ; 350).

a. Les deux personnes se croisent au bout de 6 heures.

b. Les deux personnes seront à 350 km de Petitville.

8. **a.** Il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
$60x = 900 - 90x \iff 150x = 900 \iff x = \dfrac{900}{150} = 6$.
Nous retrouvons le résultat de la question **7.a**.

b. Il faut calculer $f(6)$ ou $g(6)$.
$f(6) = 360$. Nous retrouvons le résultat de la question **7.b**.

EXERCICE 365

f est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $-x$ appartient à $\mathbb{R}$.
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
La fonction « carré » est donc paire.

EXERCICE 366

1. **a.** Soit a et b tels que $0 \leqslant a < b$.
$0 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a^2 < ab$ car $a \geqslant 0$.

b. $0 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant ab < b^2$ car $b > 0$.

c. D'après les résultats précédents : $0 \leqslant a^2 < ab < b^2$.

d. Nous venons de démontrer que :
$0 \leqslant a < b \implies a^2 < b^2$.
La fonction « carré » est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Supposons $a < b < 0$.
$a < b < 0 \implies a^2 > ab$ car $a < 0$
$a < b < 0 \implies ab > b^2$ car $b < 0$
donc $a^2 > ab > b^2$.
Nous avons démontrer que $a < b < 0 \implies a^2 > b^2$.
La fonction « carré » est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

EXERCICE 367

1. $-1,7 < -1,02 < 0$ donc $(-1,7)^2 > (-1,02)^2$.

2. $0 < 2,3 < 2,5$ donc $2,3^2 < 2,5^2$.

3. $(3-\pi)^2 = (\pi-3)^2$ et $0 < \pi - 3 < \pi + 1$
donc $(\pi-3)^2 < (\pi+1)^2$ ainsi $(3-\pi)^2 < (\pi+1)^2$.

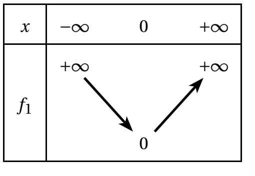
4. $(-2,5)^2 = (2,5)^2$ et $0 < 2,5 < 3$
donc $2,5^2 < 3^2$ ainsi $(-2,5)^2 < 3^2$.

5. $(-3,14)^2 = 3,14^2$ et $0 < 3,14 < \pi$
donc $3,14^2 < \pi^2$ ainsi $(-3,14)^2 < \pi^2$.

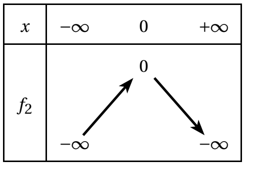
6. $(-0,02)^2 = 0,02^2$ et $0 < 0,01 < 0,02$
donc $0,01^2 < 0,02^2$ ainsi $0,01^2 < (-0,02)^2$.

EXERCICE 368

1. $f_1(x) = 3x^2$, $a = 3 > 0$ donc



2. $f_2(x) = -\pi x^2$, $a = -\pi < 0$ donc



3. $f_3(x) = \sqrt{2}x^2$, $a = \sqrt{2} > 0$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_3	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f_4(x) = 0,25x^2$, $a = 0,25 > 0$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_4	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. $f_5(x) = 9,99x^2$, $a = 9,99 > 0$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_5	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. $f_6(x) = -\sqrt{3}x^2$, $a = -\sqrt{3} < 0$ donc

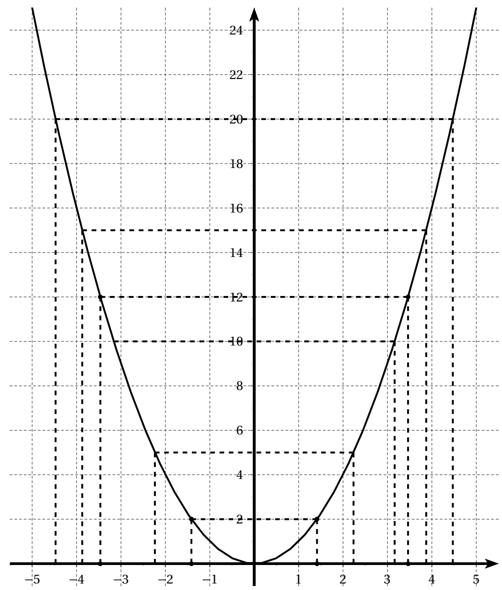
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_6	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

EXERCICE 369

1. Supposons $0 \leqslant a \leqslant 1$.
   a étant positif : $0 \leqslant a \leqslant 1 \implies 0 \leqslant a^2 \leqslant a$.
2. Supposons $a \geqslant 1$.
   a étant positif : $a \geqslant 1 \implies a^2 \geqslant a$.
3. Quel que soit x réel, $x^2 \geqslant 0$ donc si $x < 0$ alors $x < x^2$ c'est-à-dire $f(x) < g(x)$.
   Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^2 < x$ c'est-à-dire $g(x) < f(x)$.
   Si $x > 1$ alors $x^2 > x$ c'est-à-dire $g(x) > f(x)$.
   $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$. sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.
   $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$. sur $]0\,;\,1[$.

EXERCICE 370

1.



2. D'après le graphique :

a. $x = -4$ ou $x = 4$
b. $x = 2$ ou $x = -2$
c. $-3 < x < 3$
d. $x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 4$
e. $-1 \leqslant x \leqslant 1$
f. $x < -2$ ou $x > 2$.

3. D'après le graphique :

a. $x \approx -3,5$ ou $x \approx 3,5$
b. $x \approx 2,2$ ou $x \approx -2,2$
c. $-1,4 < x < 1,4$
d. $x \leqslant -4,5$ ou $x \geqslant 4,5$
e. $-3,2 \leqslant x \leqslant 3,2$
f. $x < -3,9$ ou $x > 3,9$.

EXERCICE 371

1. e, **2. c**, **3.d**, **4. a**, **5.b**.

EXERCICE 372

1. $0,11^2 < 1^2 < 1,010^2 < 1,101^2 < 10,01^2 < 10,1^2$
   $10,1^2 < 11^2 < 11,01^2$.
2. $(-0,7)^2 < (-0,707)^2 < (-0,77)^2 < (-7,007)^2$
   $(-7,007)^2 < (-7,07)^2 < (-7,7)^2 < (-70)^2 < (-70,7)^2$
3. $6,3^2 > (-5,6)^2 > (-4,5)^2 > 4,2^2 > (-3,6)^2 > 3,2^2$
   $3,2^2 > -4,5^2 > -5,6^2$.

EXERCICE 373

1.

x	-3		0		6
f	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	36

2. Sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$, la fonction f admet un minimum égal à 0 en 0 et un maximum égal à 36 en 6.

EXERCICE 374

1.

x	-8		0		2
f	64	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

2. Sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$, la fonction f admet un minimum égal à 0 en 0 et un maximum égal à 64 en -8.

EXERCICE 375

1. $a < b \leqslant 0 \implies a^2 > b^2 \implies -a^2 < -b^2$
$\implies -a^2+2 < -b^2+2.$

Ainsi $a < b \leqslant 0 \implies f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

2. $0 \leqslant a < b \implies a^2 < b^2 \implies -a^2 > -b^2$
$\implies -a^2+2 > -b^2+2.$

Ainsi $a < b \leqslant 0 \implies f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. f est décroissante sur $[2\ ;\ 6]$ donc $f(6) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$. $f(6) = -34$ et $f(-2) = -2$ donc si $2 \leqslant x \leqslant 6$ alors $-34 \leqslant f(x) \leqslant -2$.

EXERCICE 376

1. $a < b \leqslant 3 \implies a-3 < b-3 \leqslant 0 \implies (a-3)^2 > (b-3)^2$.

Ainsi $a < b \leqslant 3 \implies f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$.

2. $3 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a-3 < b-3 \implies (a-3)^2 < (b-3)^2$.

Ainsi $a < b \leqslant 3 \implies f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc croissante sur $[3\ ;\ +\infty[$.

3.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. f est décroissante sur $[-2\ ;\ 1]$ donc
$-2 \leqslant x \leqslant 1 \implies f(-2) \geqslant f(x) \geqslant f(1)$.
$f(-2) = 25$ et $f(1) = 4$ donc $4 \leqslant f(x) \leqslant 25$ lorsque $x \in [-2\ ;\ 1]$.

EXERCICE 377

1. $2 < x \leqslant 6 \implies 1 < x-1 \leqslant 5 \implies 1 < (x-1)^2 \leqslant 25$.

2. $-1 \leqslant x \leqslant 3 \implies 3 \leqslant x+4 \leqslant 7 \implies 9 \leqslant (x+4)^2 \leqslant 49$.

3. $3 \leqslant x < 10 \implies 11 \leqslant 3x+2 < 32$
$\implies 121 \leqslant (3x+2)^2 < 1\,024.$

4. $2 \leqslant x \leqslant 5 \implies -8 \geqslant 2-5x \geqslant -23$
$\implies 64 \leqslant (2-5x)^2 \leqslant 529.$

EXERCICE 378

Dans les quatre cas, nous pouvons utiliser un tableau de variations.

1.

x	-2		-1		3
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	16

Donc $0 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 16$.

2.

x	-8		-4		0
f	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	16

Donc $0 \leqslant (x+4)^2 \leqslant 16$.

3.

x	-4		-3		2
f	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	100

Donc $0 \leqslant (2x+6)^2 < 100$.

4.

x	-1		2		5
f	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	9

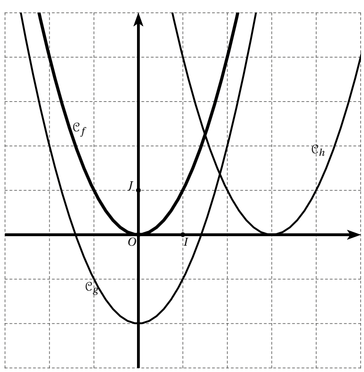
Donc $0 \leqslant (2-x)^2 \leqslant 9$.

EXERCICE 379

1. $f_1(x) = -(x+1)^2 - 3$
   $a = -1 < 0$, la parabole « pointe vers le haut ».
   Le sommet est de coordonnées $(-1\ ;\ -3)$.
2. $f_2(x) = \dfrac{5}{2} + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$
   $a = 2 > 0$, la parabole « pointe vers le bas ».
   Le sommet est de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.
3. $f_3(x) = (x+2)^2 + 4$
   $a = 1 > 0$, la parabole « pointe vers le bas ».
   Le sommet est de coordonnées $(-2\ ;\ 4)$.
4. $f_4(x) = 2 - 3\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$
   $a = -3 < 0$, la parabole « pointe vers le haut ».
   Le sommet est de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\right)$.

EXERCICE 380

1.



2. La courbe $\mathscr{C}_g$ est obtenue par translation de vecteur $-2\overrightarrow{OJ}$.
3. La courbe $\mathscr{C}_h$ est obtenue par translation de vecteur $3\overrightarrow{OI}$.

EXERCICE 381

1. Le point $M \in [AC]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 3$.
2. Dans le triangle ABC, $M \in [AC]$, $N \in [BC]$ et $(MN)//(AB)$.
   En appliquant le théorème de Thalès, on peut écrire $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{MN}{AB}$ d'où $MN = AB \times \dfrac{CM}{CA} = 3 - x$.

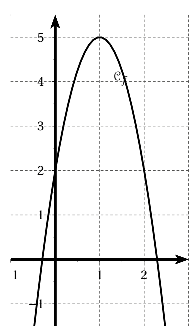
   $A(x) = AM \times AP = (3-x)x = -x^2 + 3x$.
   $A(x) = -\left(x^2 - 3x\right) = -\left(\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right)$
   $A(x) = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$.
3. Pour tout x réel, $-\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0$ donc $A(x) \leqslant \dfrac{9}{4}$.
   L'aire est maximale pour $x = \dfrac{3}{2}$, elle est égale à $\dfrac{9}{4}$.
   On a alors $AM = \dfrac{1}{2}AC$, M est le milieu du segment $[AC]$.
   ☞ $AMNP$ est alors un carré.

EXERCICE 382

1. Pour tout x réel, $-3(x-1)^2 + 5 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 5$
   $= -3x^2 + 6x + 2$.
   On a donc, pour tout x réel, $f(x) = -3(x-1)^2 + 5$.
2. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

3.

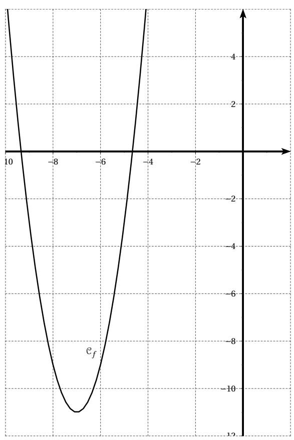


EXERCICE 383

1. Pour tout x réel, $2(x+7)^2-11 = 2\left(x^2+14x+49\right)-11$
$$= 2x^2+28x+87.$$
On a donc, pour tout x réel, $f(x) = 2(x+7)^2-11$.
2. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
f	$-\infty$	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$-\infty$

3.



EXERCICE 384

1. Pour tout x réel, $f(x) = -4\left(x^2-x\right)-9$
$f(x) = -4\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)-9$
$f(x) = -4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1-9 = -4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-8.$
2. Pour tout réel x, $-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant -8$.
La fonction f admet un maximum égal à -8 atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$.
3.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$

EXERCICE 385

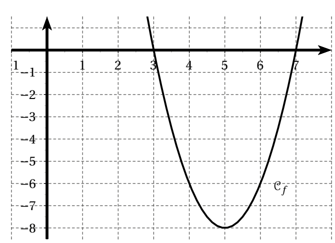
1. M appartient au segment AB donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.
2. Aire du demi-cercle de diamètre $[AB]$: $S_1 = \dfrac{25\pi}{2}$.
Aire du demi-cercle de diamètre $[AM]$:
$S_2 = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{8}x^2.$
Aire du demi-cercle de diamètre $[MB]$:
$S_3 = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{10-x}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{8}(10-x)^2.$
De plus $S(x) = S_1 - S_2 - S_3$ d'où :
$S(x) = \dfrac{\pi}{8}\left(100-x^2-(10-x)^2\right).$
$S(x) = \dfrac{\pi}{4}\left(-x^2-10x\right) = \dfrac{\pi}{4}x(10-x).$
3. **a.** $25-(x-5)^2 = 25-x^2+10x-25 = x(10-x) = f(x)$.
Donc pour tout x réel, $f(x) = 25-(x-5)^2$.
b. D'après le résultat précédent :

x	0		5		10
f	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0

4. $S(x) = \dfrac{\pi}{4}f(x)$ donc S est maximale lorsque f est maximale, c'est-à-dire lorsque $x = 5$. L'aire est alors égale à $\dfrac{25\pi}{4}$.

EXERCICE 386

1. M appartient au segment $[AB]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.
2. $AMIQ$ et $INCP$ sont deux carrés.
3. L'aire du carré $AMIQ$ est égale à x^2.
L'aire du carré $INCP$ est égale à $(10-x)^2$.
Le problème se ramène à résoudre l'inéquation
$x^2+(10-x)^2 \leqslant 58$
Soit encore $2x^2-20x+42 \leqslant 0$.
4. $2(x-5)^2-8 = 2\left(x^2-10x+25\right)-8 = 2x^2-20x+42.$
5.



6. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe dont les ordonnées sont négatives.
D'après le graphique précédent : $3 \leqslant x \leqslant 7$.

EXERCICE 387

1. $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$
$$\begin{aligned}&=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a}\\&=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c\\&=ax^2+bx+c.\end{aligned}$$

2. a. En appliquant la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$.

d'où $x=X-\dfrac{b}{2a}$ et $y=Y-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Ou encore $X=x+\dfrac{b}{2a}$ et $Y=y+\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

b. D'après les résultats précédents :

$Y=y+\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

$Y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=aX^2$.

c. La courbe représentative de la fonction $f(X)=aX^2$ est une parabole de sommet le centre du repère donc Ω.

La fonction est paire dans le repère $\left(\Omega\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, l'axe des ordonnées est axe de symétrie.

Cette droite est d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

EXERCICE 388

1. D'après les résultats de l'exercice précédent : $x_S=-\dfrac{b}{2a}$ d'où $x_N=1-\dfrac{b}{2a}$.
2. $y_S=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ et $y_N=a-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.
3. D'après les résultats précédents : $x_N-y_S=a$
4. Graphiquement, le coefficient a correspond à la différence des ordonnées entre le sommet et le point (sur la parabole) distants d'une unité en abscisse.

EXERCICE 389

1. $\mathcal{C}_1$ est la seule parabole pointée vers le haut, c'est donc la courbe de f.
   En utilisant les résultats de l'exercice **387**, la parabole de g est de sommet de coordonnées $\left(2\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$, c'est donc la courbe $\mathcal{C}$.
2. La courbe $\mathcal{C}_2$ est une parabole « pointée vers le bas », de sommet de coordonnées $(2\,;\,0)$, la fonction h est de la forme $h(x)=a(x-2)^2$.
   Le point d'abscisse 3 est d'ordonnée 1, en utilisant le résultat de l'exercice **388**, on obtient $a=1$.
   Ainsi $h(x)=(x-2)^2$.
   La courbe $\mathcal{C}_4$ est une parabole « pointée vers le bas », de sommet de coordonnées $\left(-1\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$, la fonction k est de la forme $k(x)=a(x+1)^2-\dfrac{3}{2}$.
   $k(0)=-\dfrac{1}{2}$ on en déduit que $a=1$
   Ainsi $h(x)=(x+1)^2-\dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 390

$f_1(x)=-2(x+1)^2+\dfrac{1}{2}$

$f_2(x)=(x-3)^2$

$f_3(x)=-(x-2)^2-\dfrac{1}{2}$

$f_4(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

$f_5(x)=3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$.

EXERCICE 391

1. $f(x)=-3\left(x^2-x\right)+2=-3\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right)+2$

D'où $f(x)=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$.

2. $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2$

$f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}+\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

$f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}x\right)$

$f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)\left(\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}x\right)$

$f(x)=0 \iff \left(\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)=0$

ou $\left(\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}x\right)=0$.

- $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x=0 \iff x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}\right)$
  $\iff x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6}$.
- $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}x=0 \iff x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}\right)$
  $\iff x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{6}$.

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont $\dfrac{3-\sqrt{33}}{6}$ et $\dfrac{3+\sqrt{33}}{6}$.

3. En utilisant les résultats obtenus dans l'exercice **387**, l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$ est d'équation $x = \dfrac{1}{2}$, le sommet de $\mathcal{P}$ est de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{11}{4}\right)$.
4.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{11}{4}$	$\searrow$ $-\infty$

EXERCICE 392

1. $f(x) = -2 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$
   $\iff x = 0$ ou $x = 2$.
2. $f(x) = (x-1)^2 - 3$.
3. D'après la question précédente :
   $f(x) = (x-1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)$.
   $f(x) = 0 \iff x - 1 - \sqrt{3} = 0$ ou $x - 1 + \sqrt{3} = 0$
   $\iff x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 - \sqrt{3}$.
   Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.
4. En utilisant les résultats obtenus dans l'exercice **387**, l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$ est d'équation $x = 1$, le sommet de $\mathcal{P}$ est de coordonnées $(1\ ;\ -3)$.
5.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	3	$\nearrow$ $+\infty$

EXERCICE 393

1. On sait que $B(40) = 900$ d'autre part
   $B(40) = -40^2 + 160 \times 40 + c$
   d'où $c = 900 + 40^2 - 160 \times 40 = -3900$.
2. $B(x) = -\left(x^2 - 160x\right) - 3900 = -\left((x-80) - 80^2\right) - 3900$
   $B(x) = -(x-80)^2 + 2500$.
   On en déduit que la fonction B est croissante sur $[20\ ;\ 80]$ puis décroissante sur $[80\ ;\ 90]$.
3. Le bénéfice maximum est atteint pour $x = 80$, soit un taux d'occupation de 80%, il est égal à 2500 €.

EXERCICE 394

Première courbe : En utilisant les résultats des exercices **387** et **388**, on a $f(x) = a(x-1)^2 - 3$.
De plus $f(2) - f(1) = 2$ donc $a = 2$
D'où $f(x) = 2(x-1)^2 - 3 = 2\left(x^2 - 2x + 1\right) - 3$. Ainsi la première parabole est d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$.

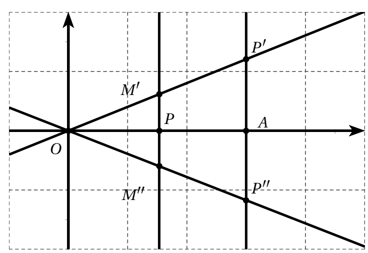
Seconde courbe : En utilisant les résultats des exercices **387** et **388**, on obtient $f(x) = a(x-2)^2 + 3$.
De plus $f(3) - f(2) = -1$ donc $a = -1$. Ainsi la seconde parabole est d'équation $y = -x^2 + 4x - 1$.

EXERCICE 395

Soit x la longueur du côté du premier carré, le premier morceau mesure alors $4x$ et le second $30 - 4x$.
La longueur du côté du second carré sera alors $7{,}5 - x$.
Soit $S(x)$ la somme des aires en fonction de x :
$S(x) = x^2 + (7{,}5 - x)^2 = 2x^2 - 15x + \dfrac{225}{4}$
$S(x) = 2\left(\left(x - \dfrac{15}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{15}{4}\right)^2\right) + \dfrac{225}{4}$.
$S(x) = 2\left(x - \dfrac{15}{4}\right)^2 + \dfrac{675}{16}$.
Le minimum de S est atteint pour $x = \dfrac{15}{4}$ soit 3,75 cm, il faut donc couper la ficelle au milieu.

EXERCICE 396

1.

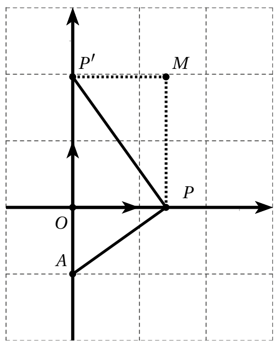


2. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OAP', on obtient $\dfrac{M'P}{P'A} = \dfrac{OP}{OA}$
   donc $M'P = \dfrac{1}{3}x^2$.
   On en déduit que $M'\left(x\ ;\ \dfrac{1}{3}x^2\right)$.
   De manière analogue, on obtient $M''\left(x\ ;\ -\dfrac{1}{3}x^2\right)$.
3. En faisant varier P sur l'axe des abscisses $(x > 0)$, les points M' forment une partie de la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{3}x^2$, les points M'' forment une partie de la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2$.

On complète les deux paraboles par symétrie d'axe (Oy).

EXERCICE 397

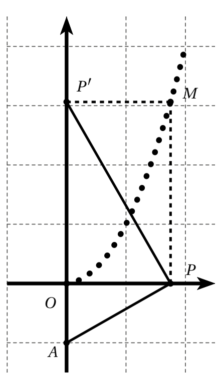
1.



2. L'abscisse de M est égale à l'abscisse de P : $x_M = x$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OAP, rectangle en O, on obtient : $AP^2 = x^2 + 1$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans OPP', rectangle en O, on obtient : $PP'^2 = x^2 + y^2$.
On applique maintenant le théorème de Pythagore dans le triangle APP', rectangle en m. On en déduit alors : $(y+1)^2 = y^2 + 2x^2 + 1$.
Soit après développement et simplification : $y = x^2$.
On en déduit alors que les coordonnées de M sont $\left(x\,;\,x^2\right)$.

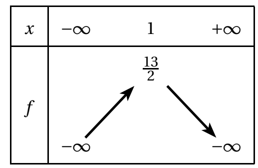
3. Lorsque P décrit la partie positive de l'axe des abscisses, x prend toutes les valeurs réelles positives, donc M appartient à la parabole d'équation $y = x^2$.

4. On fait varier P et pour chaque P on obtient un point M :



EXERCICE 398

1. Par lecture graphique :



2. L'axe de symétrie de la courbe est d'équation $x = 1$.

3. Le point B de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{13}{2}\right)$ est le sommet de la parabole, on en déduit alors que $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{13}{2}$ (propriété démontrée dans l'exercice **387**).

4. $f(0) = 6$ donc $a(0-1)^2 + \dfrac{13}{2} = 6$. On en déduit alors que $a = 6 - \dfrac{13}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

5. a.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
étape 1	0,05	oui	4,625	−0,070	non	4,6	4,625
étape 2	0,025	oui	4,6125	-0,025	non	4,6	4,6125
étape 3	0,0125	oui	4,60625	-0,003	non	4,6	4,60625

b. a et b donnent un encadrement d'amplitude 0,0125 de la solution de l'équation $f(x) = 0$.
Une solution de l'équation appartient à l'intervalle $[4,6\,;\,4,60625]$.

EXERCICE 399

1.

```
def f(x) :
    return 6.5 − 0.5 ∗ (x − 1) ∗ ∗2

def dichotomie(a,b,r) :
    while b − a > r :
        m = (a + b)/2
        if f(m) > 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    print("a = ",a, "b = ",b)
```

2. On obtient $4,60554 < x < 4,60555$.

3. Graphiquement, on voit que la solution est entre -3 et -2, on entre donc $dichotomie(-3,-2,0,01)$.
Le programme affiche alors $a = -2,0078125$ et $b = -2$ ce qui ne correspond pas au résultat attendu.
La condition est prévu pour une fonction croissante,

en effet on recherchait la solution où f passe du négatif au positif.

Or pour la seconde solution la fonction est décroissante. Le programme ne fonctionne plus.

4. **a.** La condition $f(a)f(m) > 0$ est remplie lorsque les points d'abscisses a et m ont des ordonnées de même signe et sont donc du même côté de l'axe des abscisses.

Si $f(a)f(m) > 0$ alors la courbe de f ne coupe pas l'axe entre a et m, la solution est donc entre m et b.

b. On obtient $-2,60555 < x < -2,60554$.

EXERCICE 400

1. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

2. $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b)} = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} > 0.$

3. D'après le résultat précédent, la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 401

1. $\sqrt{x} > 5 \iff x > 25.$

2. $\sqrt{x} \leqslant 2 \iff 0 \leqslant x \leqslant 4$

3. $\sqrt{x} < 3 \iff 0 \leqslant x < 9$

4. $\sqrt{x} \geqslant 7 \iff x \geqslant 49.$

EXERCICE 402

$1 < \sqrt{2} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{8} < \sqrt{10} < \sqrt{15} < \sqrt{17} < \sqrt{24}$

$\sqrt{24} < \sqrt{32} < \sqrt{35} < 6$

EXERCICE 403

• La fonction racine est croissante sur R^+ donc

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \implies 0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant 1.$$

• $\sqrt{a} \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \sqrt{a} \times \sqrt{a} \leqslant 1 \times \sqrt{a}$ donc $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{a}$.

•$a \geqslant 0$ donc $0 \leqslant a \leqslant 1 \implies 0 \leqslant a^2 \leqslant a$.

On en déduit alors que $0 \leqslant a^2 \leqslant a \leqslant \sqrt{a} \leqslant 1$.

EXERCICE 404

• La fonction racine est croissante sur R^+ donc

$$a \geqslant 1 \implies \sqrt{a} \geqslant 1.$$

• $\sqrt{a} \geqslant 0$ donc $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \geqslant 1 \times \sqrt{a}$ donc $a \geqslant \sqrt{a}$.

•$a \geqslant 0$ donc $a \geqslant 1 \implies a^2 \geqslant a$.

On en déduit alors que $1 \leqslant \sqrt{a} \leqslant a \leqslant a^2$.

EXERCICE 405

1. $2 \leqslant x \leqslant 8 \implies \sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{8}$

Soit $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2\sqrt{2}$.

2. $1 < x < 2 \implies \sqrt{1} < \sqrt{x} < \sqrt{2}$

Soit $1 < \sqrt{x} < \sqrt{2}$.

3. $1,44 \leqslant x < 1,69 \implies \sqrt{1,44} \leqslant \sqrt{x} < \sqrt{1,69}$

Soit $1,2 \leqslant \sqrt{x} < 1,3$.

4. $\pi^2 < x \leqslant 1+2\pi+\pi^2 \implies \sqrt{\pi^2} < \sqrt{x} \leqslant \sqrt{1+2\pi+\pi^2}$

On remarque que $1+2\pi+\pi^2 = (\pi+1)^2$.

On en déduit alors que $\pi < \sqrt{x} \leqslant \pi+1$.

EXERCICE 406

x	10^8	10^{20}	10^{60}	10^{200}	10^{500}
$f(x)$	10^4	10^{10}	10^{30}	10^{100}	10^{250}

x	$10^{1\,000}$	$10^{2\,000}$	$10^{4\,000}$	$10^{10^{10}}$
$f(x)$	10^{500}	$10^{1\,000}$	$10^{2\,000}$	10^{10^5}

Nous pouvons rendre $f(x)$ aussi grand que nous le voulons pourvu que x soit assez grand.

$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 407

Nous savons que le point A appartient à la courbe représentative de f donc $f(2) = -2$.

D'autre part $f(2) = k\sqrt{2}$ d'où $k = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Ainsi $f(x) = -\sqrt{2x}$.

EXERCICE 408

Nous savons que le point A appartient à la courbe représentative de f donc $f(6) = 2$.

D'autre part $f(6) = k\sqrt{6}$ d'où $k = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{\sqrt{6x}}{3}$.

EXERCICE 409

Seule la fonction k s'annule en 1 donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de k.

$h(0) = \sqrt{2}$, $f(0) = g(0) = 0$ donc $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de h.

$f(1) = 2$ donc $\mathcal{C}_4$ est la courbe représentative de f et $\mathcal{C}_3$ celle de g.

EXERCICE 410

1. $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $1+\sqrt{x} > 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
   La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.
$$\begin{aligned} 0 \leqslant a < b &\Longrightarrow 0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b} \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant 1+\sqrt{a} < 1+\sqrt{b} \\ &\Longrightarrow 1 \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{a}} > \frac{1}{1+\sqrt{b}} \\ &\Longrightarrow 3 \geqslant \frac{3}{1+\sqrt{a}} > \frac{3}{1+\sqrt{b}} \end{aligned}$$
   Ainsi $0 \leqslant a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$.
   La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 411

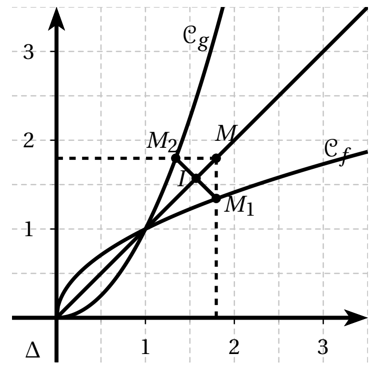
1. Il faut que $x+2 \geqslant 0$ ce qui est réalisé lorsque $x \geqslant -2$.
   La fonction f est donc définie sur $[-2\ ;\ +\infty[$.
2. Supposons $-2 \leqslant a < b$.
$$\begin{aligned} -2 \leqslant a < b &\Longrightarrow 0 \leqslant a+2 < b+2 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \sqrt{a+2} < \sqrt{b+2} \\ &\Longrightarrow 0 \geqslant -3\sqrt{a+2} > -3\sqrt{b+2} \\ &\Longrightarrow 5 \geqslant 5-3\sqrt{a+2} > 5-3\sqrt{b+2} \end{aligned}$$
   Ainsi $-2 \leqslant a < b \Longrightarrow g(a) > g(b)$.
   La fonction f est donc décroissante sur $[-2\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 412

1. Il faut que $5-2x \geqslant 0$ donc $x \leqslant \dfrac{5}{2}$.
   Ainsi f est définie sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$.
2. Supposons $a < b \leqslant \dfrac{5}{2}$.
$$\begin{aligned} a < b \leqslant \frac{5}{2} &\Longrightarrow -2a+5 > -2b+5 \geqslant 5 \\ &\Longrightarrow \sqrt{-2a+5} > \sqrt{-2b+5} \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow \sqrt{-2a+5}+1 > \sqrt{-2b+5}+1 \geqslant 1 \end{aligned}$$
   Ainsi $a < b \leqslant \dfrac{5}{2} \Longrightarrow f(a) > f(b)$
   La fonction f est donc décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$.

EXERCICE 413

1.



2. $M_1\left(x\ ;\ \sqrt{x}\right)$ et $M_2\left(\sqrt{x}\ ;\ x\right)$.
3. $MM_1 = \sqrt{(x-x)^2+\left(\sqrt{x}-x\right)^2} = \left|\sqrt{x}-x\right|$.
   $MM_2 = \sqrt{\left(\sqrt{x}-x\right)^2+(x-x)^2} = \left|\sqrt{x}-x\right|$.
   $MM_1 = MM_2$, le triangle MM_1M_2 est isocèle en M.
4. $x_I = \dfrac{x+\sqrt{x}}{2}$ et $y_I = \dfrac{x+\sqrt{x}}{2}$.
   $x_I = y_I$, donc $I \in \Delta$.
5. Δ est médiatrice du triangle MM_1M_2. Le point M_2 est symétrique de M_1 par rapport à Δ.
   La courbe C_g est symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

EXERCICE 414

1. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ donc $x = 2+X$ et $y = 3+Y$.
2. $y = \sqrt{x-2}+3 \iff Y+3 = \sqrt{2+X-2}+3$
   D'où $Y = \sqrt{X}$.
3. $\mathcal{C}$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

EXERCICE 415

1.

x	0	$+\infty$
f	2 ↗	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

2.

x	3		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

3.

x	-1		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

EXERCICE 416

1. La fonction f est définie sur $[5\,;\,+\infty[$.
Ω est le point de coordonnées $(5\,;\,1)$.

x	5		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

2. La fonction f est définie sur $]-\infty\,;\,4]$.
Ω est le point de coordonnées $(5\,;\,1)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = \sqrt{-X}$ avec $X \leqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{-x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par symétrie d'axe (Oy).

x	$-\infty$		4
f	$+\infty$	$\searrow$	2

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sqrt{-x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

3. La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
Ω est le point de coordonnées $(0\,;\,2)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = -\sqrt{X}$ avec $X \geqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = -\sqrt{x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par symétrie d'axe (Ox).

x	0		$+\infty$
f	2	$\searrow$	$-\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = -\sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

4. La fonction f est définie sur $]-\infty\,;\,2]$.
Ω est le point de coordonnées $(2\,;\,1)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = -\sqrt{-X}$ avec $X \leqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = -\sqrt{-x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par symétrie de centre O.

x	$-\infty$		2
f	$-\infty$	$\nearrow$	1

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = -\sqrt{-x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 417

1. La fonction f est définie sur $[2\,;\,+\infty[$.
Ω est le point de coordonnées $(2\,;\,0)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = 2\sqrt{X}$ avec $X \geqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = 2\sqrt{x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en multipliant par 2 chaque ordonnée.

x	2		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = 2\sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

2. La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Ω est le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = -3\sqrt{X}$ avec $X \geqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = -3\sqrt{x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en multipliant par -3 chaque ordonnée.

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$-\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = -3\sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

3. La fonction f est définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$.
Ω est le point de coordonnées $(-1\ ;\ 2)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = 4\sqrt{X}$ avec $X \geqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = 4\sqrt{x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en multipliant par 4 chaque ordonnée.

x	-1		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = 4\sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

4. La fonction f est définie sur $]-\infty\ ;\ 4]$.
Ω est le point de coordonnées $(4\ ;\ 3)$.
En opérant comme dans l'exercice **414**, on obtient $Y = -2\sqrt{X}$ avec $X \leqslant 0$.
La courbe représentative de la fonction $g(x) = -3\sqrt{x}$ est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en multipliant par -3 chaque ordonnée.

x	$-\infty$		4
f	$-\infty$	$\nearrow$	3

$\mathcal{C}_f$ est déduite de la courbe représentative de la fonction $g(x) = -2\sqrt{x}$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 418

1. **a.** $-x^2-4x+5 = -x-2-5x+x+5 = -x(x+5)+(x+5)$
d'où $-x^2-4x+5 = (x+5)(1-x)$.
Etablissons le tableau de signe de $-x^2-4x+5$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+5)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est donc définie sur $[-5\ ;\ 1]$.
b. $g(x) = -x^2-4x+5 = -(x+2)^2+9$.
On en déduit que la fonction g est croissante sur $[-5\ ;\ -2)$ et décroissante sur $[-2\ ;\ 1]$
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit alors que l est croissante sur $[-5\ ;\ -2]$ et décroissante sur $[-2\ ;\ 1]$.
c. Tableau de variations de f :

x	-5		-2		1
f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

2. **a.** Soit M un point de $\mathcal{C}_f$ ses coordonnées vérifient donc $y = \sqrt{-x^2-4x+5}$.

$$\begin{aligned} y = \sqrt{-x^2-4x+5} &\implies y^2 = -x^2-4x+5 \\ &\implies y^2 = -(x+2)^2+9 \\ &\implies (x+2)^2+y^2 = 3^2 \\ &\implies \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 3 \\ &\implies AM = 3 \end{aligned}$$

donc M appartient au cercle de centre $A(-2\ ;\ 0)$ et de rayon 3.
b. $M \in \mathcal{E} \implies \left((x-2)^2+y^2 = 9 \text{ et } y \geqslant 0\right)$
$\implies \left(y^2 = -(x+2)^2+9 \text{ et } y \geqslant 0\right)$
$\implies y = \sqrt{-(x+2)^2+9} \implies M \in \mathcal{C}_f$.

EXERCICE 419

1. Supposons $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   D'après l'exercice **403** : $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$
   donc $1 \leqslant 5x+1 \leqslant 5\sqrt{x}+1$
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Supposons $x \geqslant 1$.
   D'après l'exercice **404** : $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$
   donc $6 \leqslant 5\sqrt{x}+1 \leqslant 5x+1$
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que $g(x) \geqslant f(x)$.

EXERCICE 420

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ semble être au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.
2. $$x-\sqrt{2x-6} = \frac{\left(x-\sqrt{2x-6}\right)\left(x+\sqrt{2x-6}\right)}{x+\sqrt{2x-6}} = \frac{x^2-2x+6}{x+\sqrt{2x-6}} = \frac{(x-1)^2-1+6}{x+\sqrt{2x-6}} = \frac{(x-1)^2+5}{x+\sqrt{2x-6}}.$$
3. $\dfrac{(x-1)^2+5}{x+\sqrt{2x-6}} > 0$ sur $[3\,;\,+\infty[$.
   Donc pour tout $x \in [3\,;\,+\infty[$, $f(x) > g(x)$.
   La courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

EXERCICE 421

1. $$2x^2+x+1 = 2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+1 = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+1 = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$
   On en déduit que pour tout x réel, $2x^2+x+1>0$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit a et b deux réels distincts.
   $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt{2b^2+b+1}-\sqrt{2a^2+a+1}}{b-a} = \frac{\left(2b^2+b+1\right)-\left(2a^2+a+1\right)}{(b-a)\left(\sqrt{2b^2+b+1}+\sqrt{2a^2+a+1}\right)} = \frac{2(a+b)(b-a)+(b-a)}{(b-a)\left(\sqrt{2b^2+b+1}+\sqrt{2a^2+a+1}\right)} = \frac{(2a+2b+1)(b-a)}{(b-a)\left(\sqrt{2b^2+b+1}+\sqrt{2a^2+a+1}\right)}$$
   $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2a+2b+1}{\left(\sqrt{2b^2+b+1}+\sqrt{2a^2+a+1}\right)}.$$
3. Soit a et b deux réels distincts strictement supérieurs à $-\dfrac{1}{4}$ alors $2a+2b+1>0$.
   De plus $\sqrt{2a^2+a+1}>0$ et $\sqrt{2b^2+b+1}>0$
   On en déduit alors que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ donc f est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 422

1. **a.** Voir calculatrice.
   b. D'après le graphique, les courbes représentatives de f et g coïncident sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right]$.
2. Il faut que $3x-1 \geqslant 0$ et $5x+2 \geqslant 0$.
   On en déduit que $\mathcal{D}_f = \left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right]$.
3. **a.**

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-1)(5x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   b. D'après le tableau de signe précédent,
   $\mathcal{D}_g = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 423

1. Ensemble de définition de f :
   Il faut que $4x+1 \geqslant 0$ et $3-x \geqslant 0$ donc $x \geqslant -\dfrac{1}{4}$ et $x \leqslant 3$.
   Ainsi $\mathcal{D}_f = \left[-\dfrac{1}{4}\,;\,3\right]$.
   Ensemble de définition de g :
   Il faut que $4x+1 \geqslant 0$, $3-x \geqslant 0$ et $5x \neq 2$.
   Donc $\mathcal{D}_f = \left[-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{2}{5}\right[\cup \left]\dfrac{2}{5}\,;\,3\right]$
2. $A = (4x+1)-(3-x) = 5x-2$.
3. Pour $x \in \mathcal{D}_g$,
   $$g(x) = \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3-x}}{5x-2} = \frac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3-x}}$$
   Ainsi pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) = f(x)$.

EXERCICE 424

1. Pour tout $x>0$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$
   $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}{x+\sqrt{x}}$.
   On en déduit alors que $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = x-\sqrt{x}$.
2. L'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$ est $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^\star$

EXERCICE 425

Pour tout x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, le réel $-x$ appartient aussi à $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

$f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{-x}=\dfrac{-1}{-x}+\dfrac{1}{-x}=\dfrac{-1+1}{-x}=0.$

On en déduit alors que $f(-x)=-f(x)$, la fonction f est donc impaire.

EXERCICE 426

1. Supposons a et b réels tels que $0<a<b$.
   $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b}{ab}-\dfrac{a}{ab}=\dfrac{b-a}{ab}.$
2. $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}=-\dfrac{1}{ab}.$
3. a et b étant positifs, on en déduit que $ab>0$ donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}<0.$
   La fonction f est donc décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Si a et b sont négatifs alors $ab>0$
   donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}<0.$
   La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

EXERCICE 427

1. $\dfrac{1}{1000}<\dfrac{1}{100}<\dfrac{1}{50}<\dfrac{1}{10}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{0,2}<\dfrac{1}{0,01}.$
2. $\dfrac{1}{-0,1}<\dfrac{1}{-0,2}<\dfrac{1}{-2}<\dfrac{1}{-3}<\dfrac{1}{-20}<\dfrac{1}{-25}<\dfrac{1}{-50}<\dfrac{1}{-100}.$
3. $\dfrac{1}{-0,2}<\dfrac{1}{-10}<\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{10}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{0,2}<\dfrac{1}{0,01}.$

EXERCICE 428

1-c; **2 - b**; **3 - d**; **4 - a**.

EXERCICE 429

1. $h(a)-h(b)=a-b+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=a-b+\dfrac{a-b}{ab}.$
   On en déduit alors que $\dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}=1+\dfrac{1}{ab}.$
2. Lorsque a et b sont de même signe, le produit ab est strictement positif, on en déduit alors que $\dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}>0$, la fonction h est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. $h(1)=0$ et $h(-1)=0$.
4.

x	$-\infty$	-1	0		1	$+\infty$
			$+\infty$ ‖			$+\infty$
h	$\nearrow$	0	$\nearrow$ ‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$
	$-\infty$		‖	$-\infty$		

5. Le tableau précédent permet d'établir le tableau de signe de la fonction h.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

6. $f(x)-g(x)=0$ ou encore $f(x)=g(x)$ lorsque $x=-1$ ou $x=1$.
   Les courbes représentatives de f et g se coupent aux points d'abscisses -1 et 1.
   $f(x)-g(x)>0$ ou encore $f(x)>g(x)$ lorsque $x\in]-1\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
   La courbe représentative de f est au-dessus de la courbe représentative de g sur $]-1\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
   $f(x)-g(x)<0$ ou encore $f(x)<g(x)$ lorsque $x\in]-\infty\ ;\ -1[\cup]0\ ;\ 1[$.
   La courbe représentative de g est au-dessus de la courbe représentative de f sur $]-\infty\ ;\ -1[\cup]0\ ;\ 1[$.

EXERCICE 430

1.

x	2		10
	$0,5$		
f		$\searrow$	
			$0,1$

2. Sur cet intervalle, f admet un maximum en 2, égal à $0,5$ et un minimum en 10, égal à $0,1$.

EXERCICE 431

1.

x	-5		-1
	$-0,2$		
f		$\searrow$	
			-1

2. Sur cet intervalle, f admet un maximum en -5, égal à $-0,2$ et un minimum en -1, égal à -1.

EXERCICE 432

1.

x	-5		0		10
f	$-0,2$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$ $0,1$

2. Sur cet intervalle, f n'admet ni maximum, ni minimum.

EXERCICE 433

1. $1 \leqslant x \leqslant 20 \iff 1 \geqslant f(x) \geqslant \dfrac{1}{20}$.
donc $f(x) \in \left[\dfrac{1}{20}\ ;\ 1\right]$.

2. $-10 \leqslant x \leqslant -5 \iff -0,1 \geqslant f(x) \geqslant -0,2$.
donc $f(x) \in [-0,2\ ;\ -0,1]$.

3. si $x \in [-2\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ 4]$ alors $f(x) \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

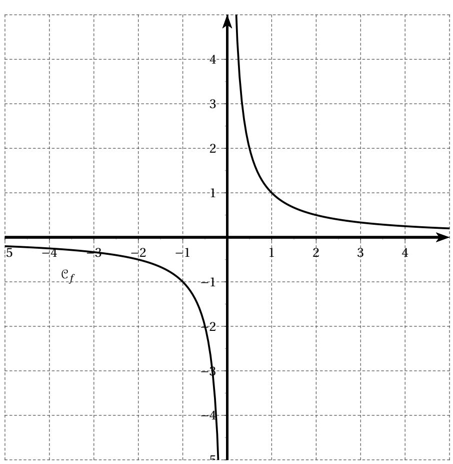
4. $f(x) \in \left[-1\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$.

EXERCICE 434

1.

x	0,1	0,25	0,5	1	2	4	5
$f(x)$	10	4	2	1	0,5	0,25	0,2

2.



3. a. $f(x) = -1 \iff x = -1$.
b. $f(x) = 2 \iff x = 0,5$.
c. $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
d. $f(x) \leqslant -2 \iff x \in [-0,5\ ;\ 0[$.
e. $f(x) > 1 \iff x \in]0\ ;\ 1[$.
f. $f(x) < \dfrac{1}{4} \iff x \in [-5\ ;\ 0[\ \cup\ ]4\ ;\ 5]$.

4. a. $f(x) = -3 \iff x \approx -0,3$.
b. $f(x) = 2,5 \iff x = 0,4$.
c. $f(x) \leqslant -0,8 \iff x \in [-1,25\ ;\ 0[$.
d. $-3 < f(x) < -0,4 \iff x \in [-2,5\ ;\ -0,33[$.

EXERCICE 435

1. $0,2 \leqslant x \leqslant 5 \iff \dfrac{1}{0,2} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{5}$ donc $0,2 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 5$.

2. $x > 4 \iff 0 < \dfrac{1}{x} < 0,25$.

3. $x \leqslant -0,1 \iff 0 > \dfrac{1}{x} \geqslant -10$.

4. $-10 < x < -0,5 \iff -0,1 > \dfrac{1}{x} > -2$.

EXERCICE 436

1. $0,2 \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant 5 \iff 5 \leqslant x \leqslant 0,2$.

2. $\dfrac{1}{x} > 2 \iff 0 < x < 0,5$.

3. $\dfrac{1}{x} \geqslant -0,1 \iff -10 \leqslant x < 0$.

4. $-10 < \dfrac{1}{x} < -0,5 \iff -0,1 > x > -2$.

EXERCICE 437

$1 \leqslant x < 5 \iff 0,2 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$.

1. $0,4 < \dfrac{2}{x} \leqslant 2$ donc $-2,6 < A \leqslant -1$.

2. $-1 \leqslant -\dfrac{1}{x} < -0,2$ donc $4 \leqslant B < 4,8$.

3. $4 \leqslant x+3 < 8 \iff 0,25 \geqslant \dfrac{1}{x+3} > 0,125$
donc $1,125 < C \leqslant 1,25$.

4.
$$\begin{aligned} -10 < -2x \leqslant -2 &\iff -9 < 1-2x \leqslant -1 \\ &\iff -\frac{1}{3} > \frac{3}{1-2x} \geqslant -3 \\ &\iff \frac{1}{3} < -\frac{3}{1-2x} \leqslant 3 \end{aligned}$$
donc $\dfrac{7}{3} < D \leqslant 5$.

EXERCICE 438

1. $1 \leqslant x+3 \leqslant 5$ donc $0,2 \leqslant A \leqslant 1$.

2.
$$\begin{aligned} 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 &\iff 1 \leqslant x^2+1 \leqslant 5 \\ &\iff 1 \geqslant \frac{1}{x^2+1} \geqslant 0,2 \end{aligned}$$

$0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \iff -2 \leqslant -\dfrac{2}{x^2+1} \leqslant -0,4$
donc $0 \leqslant B \leqslant 1,6$.

3. $-3 \leqslant x-1 \leqslant 1 \implies 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 9$

$$\implies 2 \leqslant (x-1)^2+2 \leqslant 11$$
$$\implies \frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \geqslant \frac{3}{11}$$

donc $\dfrac{14}{11} \leqslant C \leqslant \dfrac{5}{2}$.

4. $-4 \leqslant -2x \leqslant 4 \iff 1 \leqslant 5-2x \leqslant 9$

$$\iff 1 \geqslant \frac{1}{5-2x} \geqslant \frac{1}{9}$$
$$\iff -1 \leqslant -\frac{1}{5-2x} \leqslant -\frac{1}{9}$$

donc $0 \leqslant D \leqslant \dfrac{8}{9}$.

EXERCICE 439

Pour répondre à la question, il suffit de lire l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1.

$f_1(x) = \dfrac{2}{x}$, $\qquad f_2(x) = \dfrac{3}{x}$

$f_3(x) = -\dfrac{0,5}{x} = -\dfrac{1}{2x} \qquad f_4(x) = -\dfrac{3}{x}$.

EXERCICE 440

1. **a.** $-0,2 < x < -0,1 \iff -5 > \dfrac{1}{x} > -10$.

b. $x \leqslant -\dfrac{2}{3} \iff -\dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} < 0$.

c. $\dfrac{2}{5} < x \leqslant 5 \iff \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x} < \dfrac{5}{2}$.

d. $x \geqslant 10^{-2} \iff 0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 100$.

2. $\dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{2}{3} \iff x \leqslant -\dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 441

1. A admet un inverse si et seulement si $A \neq 0$ et $x \neq -2$
$A = 0 \iff \dfrac{2}{2+x} = 1 \iff x = 0$.
A admet donc un inverse pour tout x différent de -2 et de 0.

2. Si $x \neq -2$ et $x \neq 0$,
$A = 1 - \dfrac{2}{2+x} = \dfrac{2+x-2}{x+2} = \dfrac{x}{x+2}$.
On en déduit alors que $\dfrac{1}{A} = \dfrac{x+2}{x}$.

EXERCICE 442

1. **a.** $f\left(-10^2\right) = -10^{-2} = -0,01$

b. $f\left(-\dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{3}{5}$

c. $f\left(5 \times 10^{-3}\right) = \dfrac{1}{5} \times 10^3 = 200$.

2. **a.** $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b. $f\left(3\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

c. $f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\dfrac{3}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

EXERCICE 443

1. $f(x) = \dfrac{4x-12+13}{x-3} = 4 + \dfrac{13}{x-3}$.

2. Supposons $3 < a < b$.

$3 < a < b \iff 0 < a-3 < b-3 \iff \dfrac{13}{a-3} > \dfrac{13}{b}$

$\iff f(a) > f(b)$.

donc si $3 < a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc décroissante sur $]3\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 444

1. $f(x) = \dfrac{6x-3+8}{2x-1} = 3 + \dfrac{8}{2x-1}$.

2. On démontre comme précédemment que f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

EXERCICE 445

1. $f(x) = \dfrac{3x-6+1}{3-x} = -3 + \dfrac{1}{3-x}$.

2. On démontre comme précédemment que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3[$ et sur $]3\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-3

EXERCICE 446

1. On remarque que :
$x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+2$.

D'autre part $3x^2+6x+1=3\left(x^2+2x+3\right)-8$

D'où $f(x)=3-\dfrac{8}{(x+1)^2+2}$.

2. Supposons $-1 \leqslant a < b$.

$$\begin{aligned}-1 \leqslant a < b &\iff 2 \leqslant (a+1)^2+2 < (b+1)^2+2\\ &\iff 4 \geqslant \frac{8}{(a+1)^2+2} > \frac{8}{(b+1)^2+2}\\ &\iff -4 \leqslant -\frac{8}{(a+1)^2+2} < -\frac{8}{(b+1)^2+2}\\ &\iff -1 \leqslant 3-\frac{8}{(a+1)^2+2} < 3-\frac{8}{(b+1)^2+2}\end{aligned}$$

donc si $-1 \leqslant a < b$ alors $f(a) < f(b)$

La fonction f est croissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

3. On démontre de manière analogue que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.

4.

x	-10	-10^5	-10^{20}	-10^{99}
$f(x)$	2,904	2,999	3	3

x	10	10^5	10^{20}	10^{99}
$f(x)$	2,935	2,999	3	3

5. D'après les résultats précédents, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

EXERCICE 447

1. On remarque que

$x^2+6x+12=x^2+6x+9+3=(x+3)^2+3$.

D'autre part $5x^2+30x=5\left(x^2+6x+12\right)-60$

D'où $f(x)=5-\dfrac{60}{(x+3)^2+3}$.

2. En procédant comme dans l'exercice précédent, on démontre que a fonction f est croissante sur $[-3\,;\,+\infty[$.

3. On démontre de manière analogue que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$.

4.

x	-10	-10^5	-10^{20}	-10^{99}
$f(x)$	3,85	4,999	5	5

x	10	10^5	10^{20}	10^{99}
$f(x)$	4,65	4,999	5	5

5. D'après les résultats précédents, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	5	$\searrow$	-15	$\nearrow$	5

EXERCICE 448

1. $$\frac{a}{c}+\frac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$$
$$=\frac{ax+\frac{ad}{c}+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=f(x).$$

Ainsi $f(x)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$.

2. **a.** D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ d'où $x=X-\dfrac{d}{c}$ et $y=Y+\dfrac{a}{c}$.

b. En remplaçant dans $f(x)$, x et y par les expressions obtenus à la question précédente, nous obtenons :

$Y+\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{X}$

Soit $f(X)=\dfrac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{X}$.

c. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc une hyperbole de centre Ω.

• Lorsque x est très proche de $-\dfrac{d}{c}$, $f(x)$ devient très grand. La droite d'équation $x=-\dfrac{d}{c}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

• Lorsque x devient très grand, $\dfrac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{X}$ devient très petit, $f(x)$ devient très proche de $\dfrac{a}{c}$. La droite d'équation $y=\dfrac{a}{c}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 449

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{3\right\}$, $f(x)=2+\dfrac{\frac{15}{2}}{x-3}$.

$\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(3\,;\,2)$, d'asymptotes d'équations $x = 3$ et $y = 2$.

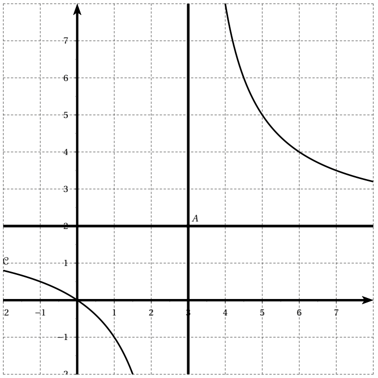
EXERCICE 450

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4\right\}$, $f(x) = -2 + \dfrac{12}{x+4}$.
$\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(-4\ ;\ -2)$, d'asymptotes d'équations $x = -4$ et $y = -2$.

EXERCICE 451

1. • f semble décroissante sur $]3\ ;\ +\infty[$ et sur $]-\infty\ ;\ 3[$,
   • pour les « grandes » valeurs positives et négatives $f(x)$ semble tendre vers 2 ;
   • pour les valeurs voisines de 3, supérieures à 3, $f(x)$ semble prendre de « grandes » valeurs positives ;
   • pour les valeurs voisines de 3, inférieures à 3, $f(x)$ semble prendre de « grandes » valeurs négatives ;

2. Soit H le point de coordonnées $(3\ ;\ 0)$, on applique le théorème de Thalès dans le triangle OMM' :
   $\dfrac{MH}{MO} = \dfrac{AH}{OM'}$ soit $\dfrac{x-3}{x} = \dfrac{2}{f(x)}$
   $\dfrac{x-3}{x} = \dfrac{2}{f(x)} \iff f(x)(x-3) = 2x$
   d'où $f(x) = \dfrac{2x}{x-3} = \dfrac{2(x-3)+6}{x-3} = 2 + \dfrac{6}{x-3}$.
3. **a.** Dans le repère $\left(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$, $\mathcal{C}$ est d'équation $Y = \dfrac{6}{X}$.
   b.



   Nous reptrouvons graphiquement les conjectures de la première question.

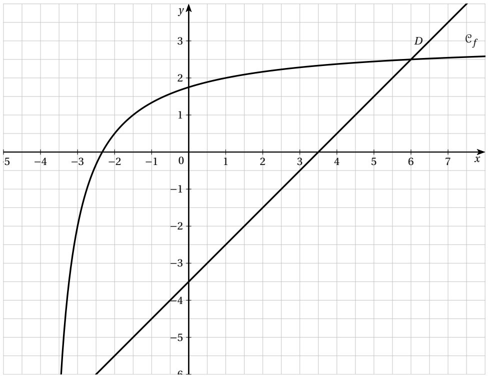
EXERCICE 452

1. $f(0) = 2$ et $f(3) = 0$.
   La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe les axes du repère aux points de coordonnées $(3\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 2)$.
2. $x \in]-3\ ;\ +\infty[$ donc $x+3 > 0$ on en déduit alors que
   $$f(x) \geqslant -\frac{3}{2} \iff 2(6-2x) \geqslant -3(x+4)$$
   $$\iff 12 - 4x \geqslant -3x - 12$$
   $$\iff x \leqslant 24$$
3. **a.** Pour tout $x > -3$,
   $f(x) - x = \dfrac{6-2x-x^2-3x}{x+3} = \dfrac{-x^2-5x+6}{x+3}$
   $x^2 + 5x - 6 = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} - 6 = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{4}$
   d'où $f(x) - x = \dfrac{\frac{49}{4} - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{x+3}$.
   b. $f(x) = x \iff \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{4}$
   $\iff \left(x + \dfrac{5}{2} = \dfrac{7}{2} \text{ ou } x + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{7}{2}\right)$
   $\iff (x = 1 \text{ ou } x = -6)$
   Par hypothèse $x > -3$. La courbe $\mathcal{C}$ et la droite D se coupent au point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.

EXERCICE 453

1. **a.** Pour tout $x \in]-4\ ;\ +\infty[$

   $f(x) = \dfrac{3(x+4)-5}{x+4} = 3 - \dfrac{5}{x+4}$.
   b. f est croissante sur $]-4\ ;\ +\infty[$.
2. $f(0) = \dfrac{7}{4}$
   $f(x) = 0 \iff x = -\dfrac{7}{3}$.
   La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe les axes du repère aux points de coordonnées $\left(-\dfrac{7}{3}\ ;\ 0\right)$ et $\left(0\ ;\ \dfrac{7}{4}\right)$.
3.



4. **a.** Pour tout $x \in]-4\ ;\ +\infty[$

$$g(x)-f(x)=\frac{(x-3,5)(x+4)-3x-7}{x+4}=\frac{x^2-\frac{5}{2}x-21}{x+4}$$
$$=\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-21}{x+4}=\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{361}{16}}{x+4}.$$

b. $x\in\,]-4\,;\,+\infty[$ donc $x+4>0$

Le signe de $g(x)-f(x)$ ne dépend que du signe de $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{361}{16}$.

- $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{361}{16}\leqslant 0 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2\leqslant\frac{361}{16}$

$$\iff -\frac{\sqrt{361}}{4}\leqslant x-\frac{5}{4}\leqslant\frac{\sqrt{361}}{4}$$
$$\iff \frac{5-\sqrt{361}}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5+\sqrt{361}}{4}$$

On en déduit que $g(x)-f(x)\leqslant 0$ lorsque :

$x\in\left]-4\,;\,\frac{5-\sqrt{361}}{4}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{361}}{4}\,;\,+\infty\right[$.

$g(x)-f(x)\geqslant 0$ lorsque $x\in\left[\frac{5-\sqrt{361}}{4}\,;\,\frac{5+\sqrt{361}}{4}\right]$.

On en déduit alors que D est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $\left]-4\,;\,\frac{5-\sqrt{361}}{4}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{361}}{4}\,;\,+\infty\right[$.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D sur $\left[\frac{5-\sqrt{361}}{4}\,;\,\frac{5+\sqrt{361}}{4}\right]$.

EXERCICE 454

Partie A

1. $f(x)=10 \iff 2x=10x-20 \iff x=\frac{5}{2}$.
2. Pour résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$, établissons le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $2x$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	‖	$+$	
signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc $f(x)\geqslant 0 \iff x\leqslant 0$ ou $x>2$.

Partie B

1. Soit P le périmètre et A l'aire du rectangle de dimensions x et y
   $P=2(x+y)$ et $A=xy$.
2. **a.** $P=A \iff 2x+2y=xy \iff 2x=y(x-2)$
   Donc si $x\neq 2$, $y=\frac{2x}{x-2}$.
   b. Supposons $0<x<2$ alors $y<0$ ce qui est impossible pour une longueur.
   Supposons $x>2$ alors $y=\frac{2x-4+4}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}>2$.
   Il n'existe donc pas de rectangle dont l'aire est égale au périmètre et dont un des côtés est inférieur ou égal à 2.
3. D'après la courbe, les couples solutions sont $(3\,;\,6)$, $(4\,;\,4)$, $(6\,;\,3)$

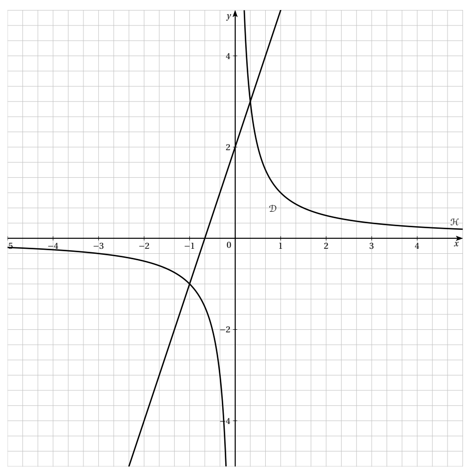
EXERCICE 455

Partie A

Pour tout réel x, $3x^2+2x-1=3\left(x^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$
$$=3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right]$$
$$=3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right].$$

Partie B

1. **a.**



   b. Si $x=0$ alors $y=2$ donc $B(0\,;\,2)$
   Si $y=0$ alors $x=-\frac{2}{3}$ donc $A\left(-\frac{2}{3}\,;\,0\right)$.
2. $f(x)=y \iff 3x^2+2x-1=0$
   Donc d'après la **partie A**
   $$f(x)=y \iff \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$
   $$\iff \left(x+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\text{ ou } x+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\right)$$
   $$\iff \left(x=\frac{1}{3}\text{ ou } x=-1\right)$$
   D'autre part $f(-1)=-1$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)=3$.
   Donc $M(-1\,;\,-1)$ et $N\left(\frac{1}{3}\,;\,3\right)$.

3. Soit I le milieu de $[AB]$,
$x_I = \dfrac{-\frac{1}{3}+0}{2} = -\dfrac{1}{3}$ et $y_I = \dfrac{2+0}{2} = 1$.
Soit J le milieu de $[MN]$,
$x_J = \dfrac{-1+\frac{1}{3}}{2} = -\dfrac{1}{3}$ et $y_J = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
On en déduit alors que $I = J$.
Les segments $[AB]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

EXERCICE 456

1 - a ; **2 - c** ; **3 - c** ; **4 - b**

EXERCICE 457

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$,
$f(-x) = (-x)^3 = -x \times (-x)^2 = -x \times x^2 = -x^3$.
La fonction cube est donc impaire.

EXERCICE 458

1. $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$
d'où $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3-b^3$.
2. Pour a et b réels distincts, $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = a^2+ab+b^2$.
3. Supposons a et b positifs alors a^2+ab+b^2 est positif.
On en déduit alors que $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \geqslant 0$.
Supposons a et b négatifs alors ab positif donc a^2+ab+b^2 positif.
On en déduit alors $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \geqslant 0$.
4. D'après les résultats précédents, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 459

1. Supposons a et b réels tels que $0 \leqslant a < b$.
a. $0 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a^3 < a^2b$ car $a^2 \geqslant 0$.
$0 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant ab^2 < b^3$ car $b^2 \geqslant 0$.
b. On a de plus $a^2b < ab^2$ car $0 \leqslant a < b$, d'où $a^3 < a^2b < ab^2 < b^3$, on en déduit alors que $a^3 < b^3$.
c. $0 \leqslant a < b \implies a^3 < b^3$, la fonction cube est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Supposons que $a < b \leqslant 0$.
$a < b \leqslant 0 \implies a^3 < a^2b \leqslant 0$ car $a^2 \geqslant 0$.
$a < b \leqslant 0 \implies ab^2 < b^3 \leqslant 0$ car $b^2 \geqslant 0$.
De plus $a^2b < ab^2$, on en déduit alors que $a^3 < b^3$.
$a < b \leqslant 0 \implies a^3 < b^3$, la fonction cube est donc croissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

EXERCICE 460

1. $(-\pi)^3 < (1-\pi)^3$
2. $(-1{,}02)^3 < (-1{,}002)^3$
3. $(1+\pi)^3 > (\pi-1)^3$
4. $\left(\sqrt{2}\right)^3 < \left(\sqrt{3}\right)^3$
5. $(3-\pi)^3 < (\pi-3)^3$
6. $(-3)^3 > -\pi^3$.

EXERCICE 461

1. $0 < a \leqslant 1 \implies 0 < a^2 \leqslant a$
$\implies 0 < a^3 \leqslant a^2$
donc $0 < a^3 \leqslant a^2 \leqslant a \leqslant 1$.
D'autre part $0 < a \leqslant 1 \implies 0 < 1 \leqslant \dfrac{1}{a}$
et $0 < a \leqslant 1 \implies 0 < a \leqslant \sqrt{a} \leqslant 1$
Ainsi lorsque $0 < a \leqslant 1$ on a
$$0 < a^3 \leqslant a^2 \leqslant a \leqslant \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{a}$$
2. $a > 1 \implies a^2 > a \implies a^3 > a^2$
donc $1 < a < a^2 < a^3$.
D'autre part $a > 1 \implies \dfrac{1}{a} < 1$
et $a > 1 \implies 1 < \sqrt{a} < a$
Ainsi lorsque $a > 1$ on a $\dfrac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

EXERCICE 462

1. $f\left(10^4\right) = 10^{12}$, $f\left(10^{10}\right) = 10^{30}$
$f\left(10^{50}\right) = 10^{150}$ et $f\left(10^{300}\right) = 10^{900}$
2. $f(x) \geqslant 10^{1500} \iff x \geqslant 10^{500}$.
3. f est impaire, c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$.
On en déduit alors que lorsque x prend de « grandes » valeurs négatives alors $f(x)$ tend vers $-\infty$.

EXERCICE 463

1. $x^3 = 1 \iff x = 1$
2. $x^3 = -27 \iff x = -3$
3. $x^3 = 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3 \iff x = \sqrt{2}$
4. $x^3 = -64 \iff x = -4$.

EXERCICE 464

1. f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ donc
$-8 \leqslant x^3 \leqslant -1 \iff -2 \leqslant x \leqslant -1$.

2. $-8 \leqslant (x-2)^3 \leqslant -1 \implies -2 \leqslant x-2 \leqslant -1$
$\implies 0 \leqslant x \leqslant 1.$
donc $x \in [0\,;\,1]$.

EXERCICE 465

1. $0,11^3 < 1^3 < 1,010^3 < 1,101^3 < 10,01^3 < 10,1^3$
$10,1^3 < 11^3 < 11,01^3$

2. $(-70,7)^3 < (-70)^3 < (-7,7)^3 < (-7,07)^3 < (-7,007)^3$
$(-7,007)^3 < (-0,77)^3 < (-0,707)^3 < (-0,7)^3$

3. $6,3^3 > 4,2^3 > 3,2^3 > (-3,6)^3 > (-4,5)^3 > -4,6^3$
$-4,6^3 > -5,5^3 > (-5,6)^3$

EXERCICE 466

1.

x	-3		0		6
f	-27	$\nearrow$	0	$\nearrow$	216

2. Le maximum de f est 216, atteint pour $x = 6$, le minimum est -27 atteint pour $x = -3$.

EXERCICE 467

1.

x	-3		-1
f	-27	$\nearrow$	-1

2. Le maximum de f est -1, atteint pour $x = -1$, le minimum est -27 atteint pour $x = -3$.

EXERCICE 468

1. Si $x \in [2\,;\,5]$ alors $f(x) \in [8\,;\,125]$

2. $x \in [-5\,;\,-1]$ alors $f(x) \in [-125\,;\,-1]$

3. $x \in [-5\,;\,5]$ alors $f(x) \in [-125\,;\,125]$

4. $x \in \left[-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\right]$ alors $f(x) \in \left[-2\sqrt{2}\,;\,3\sqrt{3}\right]$.

EXERCICE 469

1. $f(x) \in [1\,;\,27]$ alors $x \in [1\,;\,3]$

2. $x \in [-8\,;\,0]$ alors $x \in [-2\,;\,0]$

3. $x \in [-64\,;\,64]$ alors $x \in [-4\,;\,4]$

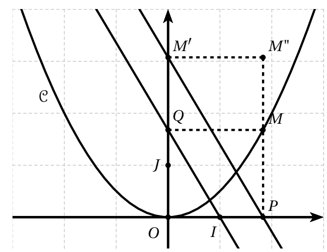
4. $x \in \left[-2\sqrt{2}\,;\,5\sqrt{5}\right]$ alors $x \in \left[-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{5}\right]$.

EXERCICE 470

$\mathcal{C}_4$ est la courbe de f, $\mathcal{C}_3$ est la courbe de g
$\mathcal{C}_2$ est la courbe de h, $\mathcal{C}_5$ est la courbe de k
$\mathcal{C}_1$ est la courbe de $\ell(x) = (x-2)^3 - 2$.

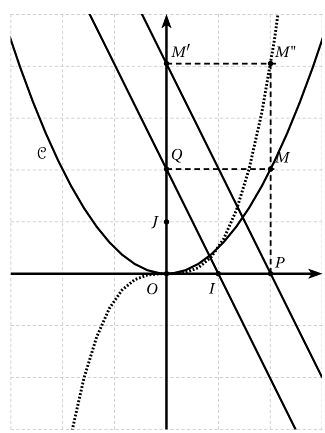
EXERCICE 471

1.



2. Dans le repère $(O;\, I,\, J)$, on a $M\left(x\,;\,\dfrac{1}{2}x^2\right)$
$P(x\,;\,0)$ et $Q\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}x^2\right)$.
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OPM', on obtient $OM' = OQ \times \dfrac{OP}{OI} = \dfrac{1}{2}x^3$.
M' appartient à l'axe des ordonnées, donc $M'\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}x^3\right)$.
On en déduit alors les coordonnées de $M"\left(x\,;\,\dfrac{1}{2}x^3\right)$.

3. En construisant la figure sur Geogebra et en faisant varier les positions de M, nous obtenons la courbe décrite par $M"$ (en pointillés sur le graphique).



EXERCICE 472

1. $f(x) = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2$.

2. $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

3. Quel que soit x réel, $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $f(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Exercice 473

1. $f(x) = x^3 - x$
2. $f(x) = (x-1)\left(x^2+x+1-1\right) = x(x-1)(x+1)$.
3.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4. D'après le tableau précédent, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses lorsque $x \in]-1\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$,
$\mathscr{C}_f$ est sous l'axe des abscisses lorsque
$x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,1[$.

Exercice 474

1. $f(x) = \left(x^3\right)^2 - 2x^3 + 1 - 2 = \left(x^3-1\right)^2 - 2$.
2. Soient a et b deux réels distincts.
   • Supposons $1 \leqslant a < b$.
   La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
   $$\begin{aligned} 1 \leqslant a < b \implies 1 \leqslant a^3 < b^3 &\implies 0 \leqslant a^3 - 1 < b^3 - 1 \\ &\implies 0 \leqslant \left(a^3-1\right)^2 < \left(b^3-1\right)^2 \\ &\implies -2 \leqslant \left(a^3-1\right)^2 - 2 < \left(b^3-1\right)^2 - 2 \end{aligned}$$
   Ainsi $1 \leqslant a < b \implies f(a) < f(b)$
   La fonction f est donc strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
   • Supposons $a < b \leqslant 1$.
   La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
   $$\begin{aligned} a < b \leqslant 1 \implies a^3 < b^3 \leqslant 1 &\implies a^3 - 1 < b^3 - 1 \leqslant 0 \\ &\implies \left(a^3-1\right)^2 > \left(b^3-1\right)^2 \geqslant 0 \\ &\implies \left(a^3-1\right)^2 - 2 > \left(b^3-1\right)^2 - 2 \geqslant -2 \end{aligned}$$
   Ainsi $a < b \leqslant 1 \implies f(a) > f(b)$
   La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$.
3.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 475

1. $$\begin{aligned} (x-1)^3 = (x-1)(x-1)^2 &= (x-1)\left(x^2-2x+1\right) \\ &= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = f(x) \end{aligned}$$
   Ainsi $f(x) = (x-1)^3$.
2. Soient a et b deux réels distincts.
   • Supposons $a < b$.
   $a < b \implies a - 1 < b - 1$
   $\implies (a-1)^3 < (b-1)^3$ car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   Ainsi $a < b \implies f(a) < f(b)$, la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 476

1. $$\begin{aligned} (x+1)^3 + 3 &= (x+1)(x+1)^2 + 3 \\ &= (x+1)\left(x^2+2x+1\right) + 3 \\ &= x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 + 3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 4 = f(x) \end{aligned}$$
   Ainsi $f(x) = (x+1)^3 + 3$.
2. Soient a et b deux réels distincts tels que $a < b$.
   $a < b \implies a + 1 < b + 1 \implies (a+1)^3 < (b+1)^3$ (car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)
   $(a+1)^3 < (b+1)^3 \implies (a+1)^3 + 3 < (b+1)^3 + 3$
   Ainsi $a < b \implies f(a) < f(b)$, la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit Ω le point de coordonnées $(-1\,;\,3)$, $\mathscr{C}$ est déduite de la courbe de $g(x) = x^3$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.

   Revoir, si nécessaire, la méthode vue à l'exercice **414**.

EXERCICE 477

1. $$\begin{aligned}(x-2)^3+2 &= (x-2)(x-2)^2+2\\ &= (x-2)\left(x^2-4x+4\right)+2\\ &= x^3-4x^2+4x-2x^2+8x-8+2\\ &= x^3-6x^2+12x-6 = f(x)\end{aligned}$$
   Ainsi $f(x) = (x-2)^3+2$.
2. Soient a et b deux réels distincts tels que $a < b$.
   $a < b \implies a-2 < b-2 \implies (a-2)^3 < (b-2)^3$ (car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)
   $(a-2)^3 < (b-2)^3 \implies (a-2)^3+2 < (b-2)^3+2$
   Ainsi $a < b \implies f(a) < f(b)$, la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$	$\nearrow$ 2 $\nearrow$	$+\infty$

4. Soit Ω le point de coordonnées $(2\,;\,2)$, $\mathscr{C}$ est déduite de la courbe de $g(x) = x^3$ par translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.

   Revoir, si nécessaire, la méthode vue à l'exercice **414**.

EXERCICE 478

1. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.
   Le volume sera maximal si on utilise les 5 m^3 de métal, on cherche donc x tel que $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 5$
   Soit encore $r^3 = \dfrac{15}{4\pi}$.
2. $\dfrac{15}{4\pi} = 1{,}194$ au millième près.
3. En utilisant la calculatrice : $1{,}060 < r < 1{,}061$.
4. Nous en déduisons alors que $r = 1{,}06$ m au centimètre près.

EXERCICE 479

1. En utilisant la calculatrice, nous obtenons
   $40^3 = 64\,000$ et $50^3 = 125\,000$ donc $40 < d < 50$.
2. En utilisant la calculatrice, nous obtenons
   $42^3 = 74\,088$ et $50^3 = 79\,507$ donc $42 < d < 43$.
3. $42 < d < 43 \iff 36 < d-6 < 37$, l'altitude du satellite est donc entre 36 et 37 milliers de kilomètres.

EXERCICE 480

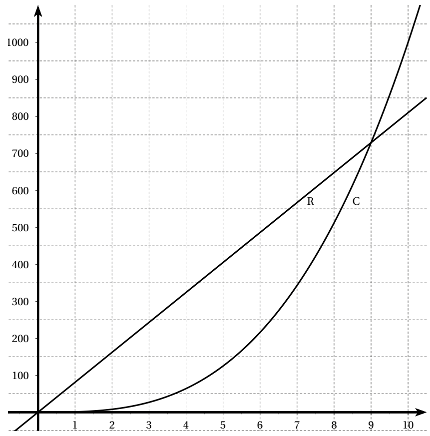
1. $5 = C(0)$, la constante correspond aux frais fixes (dépenses effectuées quelle que soit la production).
2. $$\begin{aligned}(x-3)^3+x+32 &= (x-3)(x-3)^2+x+32\\ &= (x-3)\left(x^2-6x+9\right)+x+32\\ &= x^3-6x^2+9x-3x^2+18x-27+x+32\\ &= x^3-9x^2+28x+5 = f(x)\end{aligned}$$
   Supposons a et b réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 8$
   alors $-3 \leqslant a-3 < b-3 \leqslant 5$ la fonction cube étant croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
   $$-27 \leqslant (a-3)^3 < (b-3)^3 \leqslant 125$$
   De plus $(a < b)$ et $(a-3)^3 < (b-3)^3$ donc
   $(a-3)^3+a+32 < (b-3)^3+a+32 < (b-3)^3+b+32$
   Ainsi $0 \leqslant a < b \leqslant 8 \implies C(a) < C(b)$, la fonction C est donc strictement croissante sur $[0\,;\,8]$.
3. Pour $x \neq 0$, $C_M(x) = x^2-9x+28+\dfrac{5}{x}$.
4. $C(3) = 35$ et $C_M(3) = \dfrac{35}{3}$.
5. En utilisant la calculatrice nous obtenons un minimum de $C_M(x)$ pour $x \approx 4{,}6$.
   Le coût moyen sera minimum pour une production de 4,6 tonnes.

EXERCICE 481

1. $C(5) = 125$, $R(5) = 405$ et $B(5) = 280 > 0$, une production de 5 kg est donc rentable.
2. $B(10) = 810 - 10^3 = -190$, une production de 10 kg n'est donc pas renable.
3.

x	1	2	3	4	5
$C(x)$	1	8	27	64	125
$R(x)$	81	162	243	324	405

x	6	7	8	9	10
$C(x)$	216	343	512	729	1000
$R(x)$	486	567	648	729	810



4. $R(x) = 400 \iff x = \dfrac{400}{81} = 4,9$ kg à 0,1 kg près. On a alors $B(4,9) = 279,251$ soit 279 € à l'euro près.
5. $C(x) \geqslant 500 \iff x \geqslant 7,9$ soit 7,9 kg à 0,1 kg près.
6. Les deux courbes se coupent pour $x = 0$ et $x = 9$, si $x < 9$, la droite R est au-dessus de C, le bénéfice sera donc positif pour une production comprise dans l'intervalle $[0\,;\,9]$.
   $B(x) = 81x - x^3 = x\left(9^2 - x^2\right) = x(9-x)(9+x)$.
   $x \in [0\,;\,10]$, le signe de $B(x)$ ne dépend donc que du signe de $9 - x$.
   Ainsi $B(x) \geqslant 0 \iff 9 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 9$.
7. Le bénéfice sera maximale lorsque l'écart entre la droite R et la courbe C sera le plus grand soit graphiquement pour $x \approx 5$.
8.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(x)$	80	154	216	260	280	270	224	136	0	190

9. En utilisant la calculatrice, nous obtenons une production optimale pour $x = 5,2$ à 0,1 près.
10. Pour une production de 5,2 kg, $B(5,9) \approx 280,59$ soit un bénéfice mensuel de 8 417 €.

EXERCICE 482

Partie A

1. Graphiquement :
   $R(1) \approx 30$, $C(1) \approx 70$ et $B(1) = R(1) - C(1) \approx -40$
   $R(5) \approx 140$, $C(5) \approx 110$ et $B(5) = R(5) - C(5) \approx 30$.
2. Il faut fabriquer et vendre entre 4 et 10 milliers d'objets pour que la production soit rentable (partie du graphique où la droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts).
3. Le bénéfice est maximal lorsque la droite est des recettes est au-dessus de la courbe des coût et l'écart entre les deux est le plus grand, soit pour $x \approx 7,5$.

Partie B

1. $B(x) = R(x) - C(x) = 28x - x^3 + 13,5x^2 - 61x - 20$
   D'où $B(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 33x - 20$.
2. Voir calculatrice.
3. **a.**

x	0		1,5		7,5		10,5
B	-20	↘	-42	↗	70	↘	-37

b. Le bénéfice est maximal pour 7,5 milliers d'objets fabriqués et vendus. Le bénéfice sera alors d'environ 70 milliers d'euros.

c. Les résultats sont en accord avec ceux trouvés dans la partie A.

4. **a.**

x	0		4		10		10,5
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. La production sera rentable si $B(x) > 0$ donc $x \in]4\,;\,10[$.

c. $-0,5\,(x-10)\,(x-4)(2x+1)$

$$\begin{aligned} &= -0,5\left(x^2 - 14x + 40\right)(2x+1) \\ &= -x^3 + 14x^2 - 40x - 0,5x^2 + 7x - 20 \\ &= -x^3 + 13,5x^2 - 33x - 20 \end{aligned}$$

Ainsi $B(x) = -0,5(x - 10 - (x-4)(2x+1)$.

• Tableau de signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		$-0,5$		4		10		$+\infty$
signe de $-0,5(2x+1)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
signe de $x-10$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

• D'après le tableau précédent, $B(x)$ est positif lorsque $x < -0,5$ ou $4 < x < 10$.

• x doit être positif, nous retrouvons donc les résultats obtenus précédemment.

d. $B(x) \geqslant 40 \iff 5,5 \leqslant x \leqslant 9,2$.

Le bénéfice sera supérieur à 40 milliers d'euros pour un nombre d'objets fabriqués et vendus compris entre 5,5 et 9,2 milliers.

e. $B(x) = 40$ admet deux solutions dans l'intervalle $[0~;~10]$. En utilisant la calculatrice, nous obtenons : $5,47 < x_1 < 5,48$ et $9,2 < x_2 < 9,21$

Exercice 483

1. $P(x) = (x-t)\left(x^2 - ux - vx + uv\right)$
$= x^3 - ux^2 - vx^2 + uvx - tx^2 + utx + vtx - uvt$
$= x^3 - (u+v+t)x^2 + (uv+ut+vt)x - uvt$

En identifiant les deux expressions de $P(x)$, nous en déduisons que :

$a = -(u+v+t)$, $b = uv+ut+vt$ et $c = -uvt$.

2. Si P admet trois racines entières alors P peut s'écrire sous la forme factorisée $P(x) = (x-t)(x-u)(x-v)$ avec u, v et t entiers.

On a alors $\begin{cases} u+v+t = 0 \\ ut+uv+vt = m \\ -uvt = 6 \end{cases}$.

Un seul triplet vérifie les première et troisième équations : $(1;~2~;-3)$, alors $m = -7$

Vérification : $(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6$.

Exercice 484

Partie A

1. $V_1 = EF \times EH \times BF = 60x$.

2. $V_2 = \dfrac{1}{3} AD \times AB \times SO = \dfrac{1}{3} \times 60 \times (12-x) = 240 - 20x$.

3. $O \in [SI]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 12$.

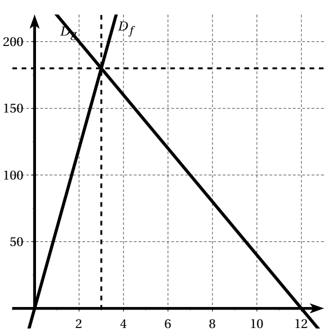
4. $V_1 = V_2 \iff 60x = 240 - 20x \iff x = \dfrac{240}{80} = 3$.

On a alors $V_1 = V_2 = 180~\text{cm}^3$.

5. $V_2 \leqslant 200 \iff 240 - 20x \leqslant 200 \iff x \geqslant 2$.

Partie B

1.



2. Les deux volumes sont égaux au point d'intersection des deux droites.

Exercice 485

1. a. $f(3) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

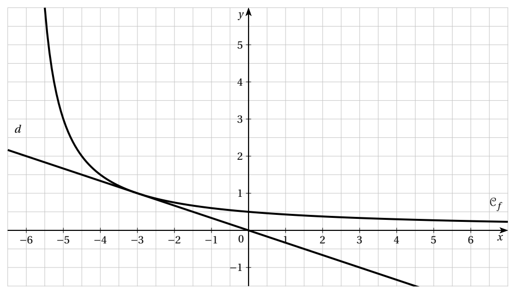
b. $f(x) = 3 \iff x = -5$.

2. $-6 < a < b \implies 0 < a+6 < b+6 \implies \dfrac{3}{a+6} > \dfrac{3}{b+6}$.

donc $-6 < a < b \implies f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc décroissante sur $]-6~;~+\infty[$.

3. a.



b. $f(x) - \left(-\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{3}{x+6} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{9+6x+x^2}{3(x+6)}$

D'où $f(x) - \left(-\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{(x+3)^2}{3(x+6)} > 0$ sur $]-6~;~+\infty[$.

c. D'après le résultat précédent, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de d sur $]-6~;~+\infty[$.

4. $x_A = -6$ donc $y_A = -\dfrac{-6}{3} = 2$.

5. a. d' est parallèle à d, les deux droites ont donc le même coefficient directeur.

d' est donc de la forme $y = -\dfrac{1}{3}x + b$.

$B \in d'$ donc $3 = \dfrac{5}{3} + b$ on en déduit que $b = \dfrac{4}{3}$.

d' est d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

b. $-\dfrac{1}{3} \times 3 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$ donc $C \in d'$.

$f(3) = \dfrac{1}{3}$ donc $C \in \mathcal{C}_f$.

C est donc un point d'intersection de d' et $\mathcal{C}_f$.

6. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soit x et y les cordonnées du point D.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-x\\ \frac{1}{3}-y\end{pmatrix}$

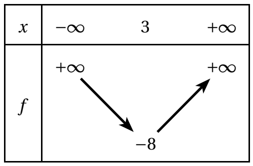
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff 3 - x = 1$ et $\dfrac{1}{3} - y = 1$

On en déduit que $x = 2$ et $y = -\dfrac{2}{3}$ ainsi $D\left(2~;~-\dfrac{2}{3}\right)$.

EXERCICE 486

1. a. $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4} + 9 + 1 = \dfrac{49}{4} \neq 12$ donc $A \notin \mathcal{C}_f$.

b. $f(x) = (x-3)^2 - 8$, on en déduit le tableau de variations de f :

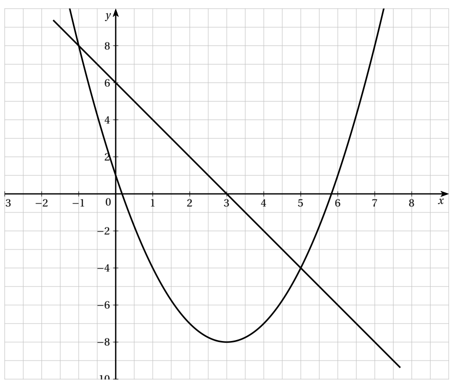


2. a. g est de la forme $g(x) = ax + b$

$a = \dfrac{g(6) - g(-2)}{6 - (-2)} = -2.$

$b = g(6) + 12 = 6$ ainsi $g(x) = -2x + 6$.

b.



3. a. $f(x) - g(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5$

D'où $f(x) - g(x) = (x-2)^2 - 9$.

b. $f(x) - g(x) = 0 \iff x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$

$\iff x = 5$ ou $x = -1$.

$g(5) = -4$ et $g(-1) = 8$.

$\mathcal{C}_f$ et D se coupent aux points de coordonnées $(5\,;\,-4)$ et $(-1\,;\,8)$.

c. $f(x) - g(x) < 0 \iff (x-2)^2 < 9$

$\iff -3 < x - 2 < 3$

$\iff -1 < x < 5$

On en déduit que $f(x) - g(x) > 0$ si

$x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]5\,;\,+\infty[$.

d. D'après les résultats précédents :

• la droite D est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ si $x \in]-1\,;\,5[$;

• la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite D si $x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]5\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 487

1. Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est

$a = \dfrac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = -3.$

donc $g(x) = -3x + b$.

$g(2) = -4$ et $g(2) = -6 + b$ on en déduit que $b = 2$.

Ainsi $g(x) = -3x + 2$.

2. a. $f(x) - g(x) = 2x^2 - x - 3 = 2\left(x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}\right)$

$= 2\left(\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{2}\right)$

$= 2\left(\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{16}\right)$

b. $f(x) - g(x) < 0 \iff \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 < \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$

$\iff -\dfrac{5}{4} < x - \dfrac{1}{4} < \dfrac{5}{4}$

$\iff -1 < x < \dfrac{3}{2}$.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{D}$ sur $\left]-1\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent aux points d'abscisses -1 et $\dfrac{3}{2}$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty\,;\,-1[\cup\left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE 488

1. b) - 2. c) - 3.c) - 4. b) - 5. a)

EXERCICE 489

1. Il faut que $x + 1 \neq 0$, f est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$.

2. $f(0) = 4$, la courbe C_f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,4)$.

$f(x) = 0 \iff x = 2$, la courbe C_f coute l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2\,;\,0)$.

3. a. $f(x) = \dfrac{-2x - 2 + 6}{x + 1} = -2 + \dfrac{6}{x+1}$.

b. Supposons $a < b < -1$.

$a < b < -1 \implies a + 1 < b + 1 < 0 \implies \dfrac{6}{a+1} > \dfrac{6}{b+1}$

$\implies -2 + \dfrac{6}{x+1} > -2 + \dfrac{6}{x+1}$

Ainsi $a < b < -1 \implies f(a) > f(b)$, la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$.

c. D'après le résultat précédent,

si $x \in [-1201\,;\,-1001]$ alors $f(x) \in \left[-\dfrac{1003}{500}\,;\,-\dfrac{401}{200}\right]$

ou encore $f(x) \in [-2{,}006\,;\,-2{,}005]$.

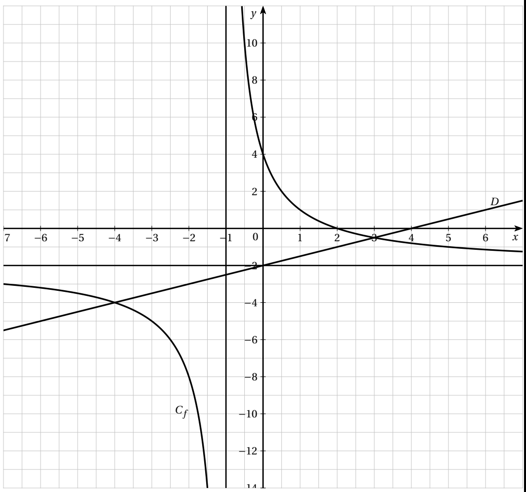
4. a. g est de la forme $g(x) = ax + b$.

$a = \dfrac{g(-8) - g(6)}{-8 - 6} = \dfrac{-7}{-14} = \dfrac{1}{2}$.

$b = g(6) - \dfrac{1}{2} \times 6 = 1 - 3 = -2$

Ainsi $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$.

b.



5. **a.** Pour $x \neq -1$, $f(x) - g(x) = \dfrac{2(4-2x)-(x+1)(x-4)}{2(x+1)}$

$f(x) - g(x) = \dfrac{8-4x-x^2-x+4x+4}{2x+2} = \dfrac{-x^2-x+12}{2x+2}$

D'autre part :

$$\begin{aligned} -x^2-x+12 &= -x^2-4x+3x+12 \\ &= -x(x+4)+3(x+4) \\ &= (3-x)(x+4) \end{aligned}$$

d'où $f(x) - g(x) = \dfrac{(3-x)(x+4)}{2x+2}$.

b. $f(x) - g(x) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -4$.

$g(3) = -\dfrac{1}{2}$ et $g(-4) = -4$

Les points d'intersection de C_f et D sont de coordonnées $\left(3\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ et $(-4\ ;\ -4)$.

c. Etablissons le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
signe de $3-x$		+		+		+	0	−	
signe de $x+4$		−	0	+		+		+	
signe de $2x+2$		−		−	0	+		+	
signe de $f(x)-g(x)$		+	0	−	‖	+	0	−	

La courbe C_f est au-dessus de la droite D si $x \in]-\infty\ ;\ -4[\cup]-1\ ;\ 3[$.

La droite D est au-dessus de la courbe C_f si $x \in]-4\ ;\ -1[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

Exercice 490

Partie A

1.

2. Par lecture graphique $E(8\ ;\ 4)$.

Partie B

1. $f(9) = \dfrac{41}{10} = 4,1$ et $g(9) = 3,5$

L'offre est supérieure à la demande, il y aura un excédent de $0,6$ million d'objets.

2. On recherche x tel que $f(x) \geqslant 3,5$

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 3,5 &\iff 5x-4 \geqslant 3,5x+3,5 \text{ car } x \geqslant 1 \\ &\iff 1,5x \geqslant 7,5 \\ &\iff x \geqslant 5. \end{aligned}$$

Le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 3,5 millions d'articles lorsque le prix de vente sera supérieur à 5 €.

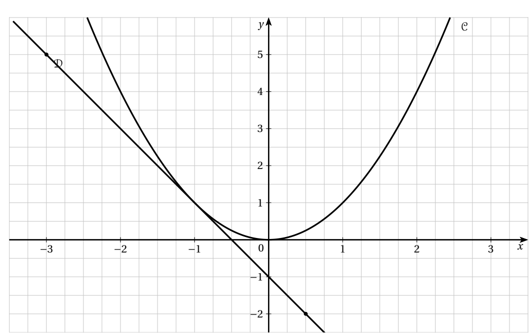
3. $f(x) = g(x) \iff x = 8$ de plus $f(8) = 4$.

Le prix d'équilibre est égal à 8 €, la quantité associée sera alors égale à 4 millions d'articles.

Exercice 491

Partie A

1.



2. f est de la forme $f(x) = ax + b$.
$a = \dfrac{f(-3) - f(0,5)}{-3 - 0,5} = \dfrac{7}{-3,5} = -2$
$b = f(-3) - (-3) \times (-2) = -1$
Ainsi $f(x) = -2x - 1$.

3. $f(x) \leqslant 0 \iff -2x \leqslant 1 \iff x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

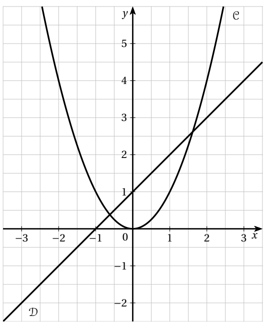
Partie B

1. $g(x) - f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

2. D'après le résultat précédent, $g(x) - f(x) \geqslant 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est donc toujours au-dessus de $\mathcal{D}$.

EXERCICE 492

1.



2. $f(x) = 0 \iff x^2 = x + 1$ d'après le graphique précédent, la droite coupe la parabole en deux points

3. Voir graphique.
Les deux courbes se coupent entre les points d'abscisses $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{3}$. On en déduit alors que $\dfrac{3}{2} < \alpha < \dfrac{5}{3}$.

4. **a.** D'après le graphique sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la droite est au-dessus de la parabole donc $f(x) < 0$ sur $[0 ; \alpha[$ et la droite est sous la parabole donc $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$. D'où l'équivalence sur $[0 ; +\infty[$:
$x < \alpha \iff f(x) < 0$.

b. $\dfrac{3}{2} + 1 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ donc $f\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$
$\dfrac{5}{3} + 1 < \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$ donc $f\left(\dfrac{5}{3}\right) < 0$
D'où $\dfrac{3}{2} < \alpha < \dfrac{5}{3}$.

c. En utilisant la table de la calculatrice avec les réglages :
• « $début = \dfrac{3}{2}$, $fin = \dfrac{5}{3}$ et $pas = 0,01$ », nous obtenons :
$f(1,61) < 0$ et $f(1,62) > 0$ donc $1,61 < \alpha < 1,62$
• « $début = 1,61$, $fin = 1,62$ et $pas = 0,001$ », nous obtenons :
$f(1,618) < 0$ et $f(1,619) > 0$ donc $1,618 < \alpha < 1,619$
• « $début = 1,618$, $fin = 1,619$ et $pas = 0,0001$ », nous obtenons :
$f(1,6180) < 0$ et $f(1,6181) > 0$
donc $1,6180 < \alpha < 1,6181$.

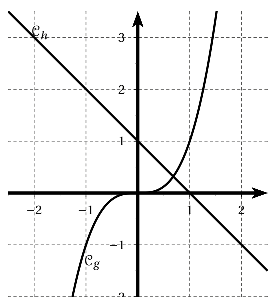
5. **a.** $1,618 < \alpha < 1,6181$ donc $1 - \alpha < 0$, d'autre part
$$\begin{aligned} f(1-\alpha) &= (1-\alpha)^2 - (1-\alpha) - 1 \\ &= 1 - 2\alpha + \alpha^2 - 1 + \alpha - 1 \\ &= \alpha^2 - \alpha - 1 = f(\alpha) = 0 \end{aligned}$$
donc $1 - \alpha$ est la solution négative de l'équation $f(x) = 0$.

b. D'après **4.b**, $1 - \dfrac{3}{2} > 1 - \alpha > 1 - \dfrac{5}{3}$
donc $-\dfrac{2}{3} < \beta < -\dfrac{1}{2}$.

c. D'après **4.c**, $-0,6181 < \beta < -0,6180$.

EXERCICE 493

Soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$ et $h(x) = -x + 1$.
Nous commençons par tracer les courbes représentatives de g et h :



La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, les deux courbes ne se coupent qu'une fois. Le point d'intersection a une abscisse comprise entre 0 et 1.
L'équation $g(x) - h(x) = x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution et cette solution appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$.

EXERCICE 494

1. • $0 < a \leqslant 1 \implies 0 < a^2 \leqslant a \implies 0 < a^3 \leqslant a^2$
donc $0 < a^3 \leqslant a^2 \leqslant a \leqslant 1$.

D'autre part $0 < a \leqslant 1 \implies 0 < 1 \leqslant \dfrac{1}{a}$

et $0 < a \leqslant 1 \implies 0 < a \leqslant \sqrt{a} \leqslant 1$

Ainsi lorsque $0 < a \leqslant 1$ on a

$$0 < a^3 \leqslant a^2 \leqslant a \leqslant \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{a}$$

• $a > 1 \implies a^2 > a \implies a^3 > a^2$

donc $1 < a < a^2 < a^3$.

D'autre part $a > 1 \implies \dfrac{1}{a} < 1$

et $a > 1 \implies 1 < \sqrt{a} < a$

Ainsi lorsque $a > 1$ on a $\dfrac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

2. • $-1 \leqslant a < 0$,donc $0 < a^2 \leqslant 1$

et $a^3 - a = a\left(a^2 - 1\right) > 0$

donc $-1 \leqslant a \leqslant a^3 \leqslant a^2$.

D'autre part $-1 \leqslant a < 0 \implies \dfrac{1}{a} \leqslant -1$

Ainsi lorsque $-1 \leqslant a < 0$ on a

$$\frac{1}{a} \leqslant a \leqslant a^3 \leqslant a^2$$

• $a < -1$ alors $a^2 > 1$

$a^3 - a = a\left(a^2 - 1\right) < 0$ car $a < 0$ et $a^2 - 1 > 0$

donc $a^3 < a < -1$.

D'autre part $a < -1 \implies -1 < \dfrac{1}{a} < 0$

et a^2 est toujours positif. Ainsi lorsque $a < -1$ on a $a^3 < a < \dfrac{1}{a} < a^2$.

3. On en déduit que :

• Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$, $\mathcal{C}_p > \mathcal{C}_h > \mathcal{C}_f > \mathcal{C}_c$

• Sur l'intervalle $]-1\,;\,-0[$, $\mathcal{C}_p > \mathcal{C}_c > \mathcal{C}_f > \mathcal{C}_h$

• Sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, $\mathcal{C}_h > \mathcal{C}_r > \mathcal{C}_f > \mathcal{C}_c < \mathcal{C}_p$

• Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, $\mathcal{C}_c > \mathcal{C}_p > \mathcal{C}_f > \mathcal{C}_f r > \mathcal{C}_h$

EXERCICE 495

1. f est une fonction polynôme donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(3) = 3^2 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$, l'image de 3 par f est 3 lui-même.

3. $f\left(\sqrt{2}+1\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right)$

$= 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} - 2 = 1$.

4. $f(x) = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

Les antécédents de 0 par f sont donc 0 et 2.

5. $f(x) = 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$

$\iff (x-1)^2 - 1 - 3 = 0$

$\iff (x-1)^2 - 4 = 0$

$f(x) = 3 \iff (x-1)^2 - 2^2 = 0$

$\iff (x-1-2)(x-1+2) = 0$

$\iff (x-3)(x+1) = 0$

$\iff (x = 3$ ou $x = -1)$

Les antécédents de 3 par f sont donc 3 et -1.

6. On recherche a réel tel que $f(a) = a$.

On sait déjà que 3 est solution. Y a-t-il d'autres solutions ?

$f(a) = a \iff a^2 - 3a = 0$

$\iff a(a-3) = 0$

$\iff (a = 0$ ou $a = 3)$.

Seuls 0 et 3 sont égaux à leur image par f.

7. $g(x) = f(x+1) + 1 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$

$= x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 1 = x^2$.

8. $h(x) = f\Big(f(x)\Big) = f\left(x^2 - 2x\right)$

$= \left(x^2 - 2x\right)^2 - 2\left(x^2 - 2x\right)$

$= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x^2 + 4x$

$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$.

EXERCICE 496

1. Il faut que $2 - x \neq 0$ donc $x \neq 2$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \Big\{2\Big\}$.

2. $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$= \dfrac{4\sqrt{2}+4-2-\sqrt{2}}{4-2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}+1$.

3. $f(x) = 2 \iff 2x - 1 = 4 - 2x \iff x = \dfrac{5}{4}$.

Le seul antécédent de 2 par f est $\dfrac{5}{4}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2\,;\,\dfrac{5}{4}\right\}$,

$f\Big(f(x)\Big) = f\left(\dfrac{2x-1}{2-x}\right) = \dfrac{2\frac{2x-1}{2-x} - 1}{2 - \frac{2x-1}{2-x}}$

$= \dfrac{2(2x-1) - (2-x)}{2(2-x) - (2x-1)} = \dfrac{5x-4}{5-4x}$.

5. $f(x) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Seul $\dfrac{1}{2}$ est antécédent de 0 par f.

6. On recherche a tel que $f(a) = a$.

$f(a) = a \implies 2a - 1 = 2a - a^2$

$\implies a^2 = 1$

$\implies (a = 1$ ou $a = -1)$

Seuls 1 et -1 sont égaux à leur image.

7. Pour x réel différent de -2, il existe un réel y tel que $y = \dfrac{2x-1}{2-x}$.

Supposons $y = -2$ alors $\dfrac{2x-1}{2-x} = -2$

donc $2x - 1 = -4 + 2x \implies -1 = -4$ ce qui est faux, on en déduit alors que quel que soit x réel différent de -2, $y \neq -2$.

$$\begin{aligned} y = \frac{2x-1}{2-x} &\implies 2y - xy = 2x - 1 \\ &\implies 2x + xy = 2y + 1 \\ &\implies x(2+y) = 2y + 1 \\ &\implies x = \frac{2y+1}{y+2} \text{ car } y \neq -2 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \neq -2$, il existe un unique x, c'est-à-dire que tout réel différent de -2 admet un unique antécédent par f.

EXERCICE 497

1. $f(-2) = \dfrac{1}{-2} + 2 = \dfrac{3}{2}$.

2.
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$, f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

4. $f(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{x} \iff x^2 = 1$

Les antécédents de 0 par f sont donc 1 et -1.

5. Il faut pour cela calculer $f\left(f(x)\right)$.

Pour x réel différent de 0, 1 et -1,

$f\left(f(x)\right) = f\left(\dfrac{1}{x} - x\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x} - x} - \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

$f\left(f(x)\right) = \dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{1}{x} + x$.

EXERCICE 498

1. f est définie pour tout $x \neq -1$, soit $\mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$.

2. **a.** Soit a et b deux réels tels que $a < b < -1$.

$a < b < -1 \implies a + 1 < b + 1 < 0 \implies \dfrac{3}{a+1} > \dfrac{3}{b+1}$

Ainsi $a < b < -1 \implies f(a) > f(b)$, la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$.

b. Soit a et b deux réels tels que $-1 < a < b$.

$-1 < a < b \implies 0 < a + 1 < b + 1 \implies \dfrac{3}{a+1} > \dfrac{3}{b+1}$

Ainsi $-1 < a < b \implies f(a) > f(b)$, la fonction f est donc décroissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

c. On déduit des questions précédentes le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

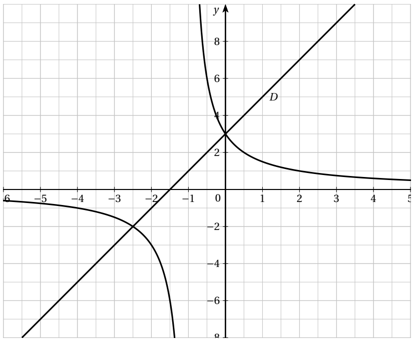
3. **a.** g est de la forme $g(x) = ax + b$.

$a = \dfrac{g(-5) - g(3)}{-5-3} = \dfrac{-16}{-8} = 2$.

$b = g(3) - 3a = 9 - 6 = 3$

D'où $g(x) = 2x + 3$.

b.



4. Pour $x \neq -1$, $\dfrac{3}{x+1} \leqslant 2x + 3 \iff \dfrac{3}{x+1} - (2x+3) \leqslant 0$

$\iff \dfrac{3 - (x+1)(2x+3)}{x+1} \leqslant 0$

$\iff \dfrac{-2x^2 - 5x}{x+1} \leqslant 0 \iff \dfrac{-x(5x+2)}{x+1} \leqslant 0.$

Etablissons le tableau de signes de cette dernière expression :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		0		$+\infty$
signe de $-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{-x(5x+2)}{x+1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{5}{2}\,;\,-1\right[\cup [0\,;\,+\infty[$.

Graphiquement, cet ensemble correspond aux x pour lesquels la courbe de f est sous la droite D.

EXERCICE 499

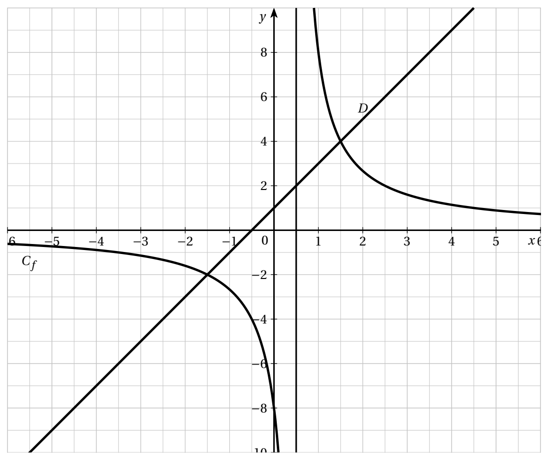
1. Pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2x-2+7}{x-1} = 2 + \dfrac{7}{x-1}$.
   $x > -1$ donc $\dfrac{7}{x-1} > 0$ ce qui implique donc $f(x) > 2$.
2. **a.** $IN = x-1$ et $MN = f(x) - 2 = \dfrac{7}{x-1}$.
   b. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $INMP$.
   $\mathcal{A} = IN \times MN = (x-1) \times \dfrac{7}{x-1} = 7$
   L'aire $\mathcal{A}$ ne dépend pas de x, elle est donc constante.
3. **a.** $INMP$ est un carré si et seulement si $IN = MN$.
   $IN = MN \iff x-1 = \dfrac{7}{x-1} \iff \dfrac{(x-1)^2-7}{x-1} = 0.$
   b. $\dfrac{(x-1)^2-7}{x-1} = 0 \iff (x-1)^2 = 7$
   $$\iff (x-1 = \sqrt{7} \text{ ou } x-1 = -\sqrt{7})$$
   $$\iff (x = 1+\sqrt{7} \text{ ou } x = 1-\sqrt{7})$$
   Nous remarquons que $1-\sqrt{7} < 1$ cette solution ne convient pas.
   Seule la solution $x = 1+\sqrt{7}$ convient.
   $f\left(1+\sqrt{7}\right) = 2 + \dfrac{7}{\sqrt{7}} = 2+\sqrt{7}$.
   Le point M est donc de coordonnées $\left(1+\sqrt{7}\,;\,2+\sqrt{7}\right)$.

EXERCICE 500

1. $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$ et $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 2$.
2. $f(x) = -2 \iff 8 = -4x+2 \iff x = -\dfrac{3}{2}$
   L'abscisse du point A est donc $-\dfrac{3}{2}$.
3. **a.** g est de la forme $g(x) = ax+b$.
   $a = \dfrac{g(-4)-g(3)}{-4-3} = \dfrac{-14}{-7} = 2$
   $b = g(3) - 3a = 1$
   Ainsi $g(x) = 2x+1$.
   b. Le graphique est en fin d'exercice.
4. **a.** Pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{2}$,
   $f(x) - g(x) = \dfrac{8-(2x+1)(2x-1)}{2x-1} = \dfrac{9-4x^2}{2x-1}$.
   b.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $3-2x$		+		+		+	0	−	
signe de $2x+3$		−	0	+		+		+	
signe de $2x-1$		−		−	0	+		+	
signe de $\frac{(3+2x)(3-2x)}{2x-1}$		+	0	−	‖	+	0	−	

c. $f(x) - g(x) > 0$, donc C_f est au-dessus de D sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$.
$f(x) - g(x) < 0$ donc D est au-dessus de C_f sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.
$f(x) = g(x)$ donc C_f et D se coupent pour $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \dfrac{3}{2}$.



EXERCICE 501

Partie A

1. $f(2,5) = 30$ et $g(2,5) = 85$.
   Pour un prix de 2,50 €, la demande est très supérieure à l'offre.
2. A partir de 11,50 €, le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 75 000.
   Dans ce cas, l'offre sera très supérieure à la demande, 25 000 articles ne trouveront pas preneur.
3. Le prix d'équilibre est égal à 7,50 €, la quantité associée est égale à 65 000 articles.

Partie B

1. La fonction g est de la forme $g(x) = ax+b$.
   $a = \dfrac{g(10)-g(5)}{10-5} = -4$
   $b = g(5) - 5a = 95$ ainsi $g(x) = -4x+95$.
2. $g(p) = 0 \iff p = \dfrac{95}{4} = 23,75$ soit un prix de 23,75 €.

Partie C

1. $$\begin{aligned} 1<a<b &\Longrightarrow 7<2a+5<2b+5 \\ &\Longrightarrow 100>\frac{700}{2a+5}>\frac{700}{2b+5} \\ &\Longrightarrow -100<-\frac{700}{2a+5}<-\frac{700}{2b+5} \\ &\Longrightarrow 0<100-\frac{700}{2a+5}<100-\frac{700}{2b+5} \end{aligned}$$

Ainsi $1<a<b \Longrightarrow f(a)<f(b)$.

La fonction f est donc croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. Pour tout $x \geqslant 1$, $-\dfrac{700}{2x+5}<0$ donc $f(x)\leqslant 100$.

Selon ce modèle, il n'est pas possible que l'offre des producteurs soit de 100 milliers d'articles.

Partie D

1. $$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= 100-\frac{700}{2x+5}+4x-95 = 4x+5-\frac{700}{2x+5} \\ &= \frac{(4x+5)(2x+5)-700}{2x+5} \\ &= \frac{8x^2+30x-675}{2x+5} \end{aligned}$$

D'autre part $(2x-15)(4x+45)=8x^2+90x-60x-675$

On en déduit alors que

$f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-15)(4x+45)}{2x+5}$.

2. $$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\Longleftrightarrow (2x-15=0 \text{ ou } 4x+45=0) \\ &\Longleftrightarrow (x=7,5 \text{ ou } x=-11,25) \end{aligned}$$

La seconde solution est négative, ce qui est impossible.

Le prix d'équilibre est donc égal à 7,50 €.

$g(7,5)=65$, 65 000 articles seront échangés au prix d'équilibre.

Exercice 502

Partie A

1. a. Pour $t\in[1\ ;\ 15]$, $f(t)=\dfrac{1615t}{t^2}-\dfrac{595}{t}=\dfrac{1615t-595}{t^2}$.

b. Supposons $1\leqslant a<b\leqslant 15$

$$\begin{aligned} f(a)-f(b) &= \frac{1615a-595}{a^2}-\frac{1615b-595}{b^2} \\ &= \frac{1615ab(b-a)+595\left(a^2-b^2\right)}{a^2b^2} \\ &= \frac{1615ab(b-a)+595\,(a-b)\,(a+b)}{a^2b^2} \\ &= \frac{1615ab(b-a)+595\,(a-b)\,(a+b)}{a^2b^2} \\ &= \frac{\Big(595(a+b)-1615ab\Big)\,(a-b)}{a^2b^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=85\dfrac{7a+7b-19ab}{a^2b^2}$

Le signe de $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ ne dépend que du signe de $7a+7b-19ab$. Par hypothèse $1\leqslant a<b\leqslant 15$ donc $7a+7b<14b$ et $b\leqslant ab<b^2$ donc $-19ab\leqslant -19b$

On en déduit alors que $7a+7b-19ab<-5b<0$ car b est strictement positif.

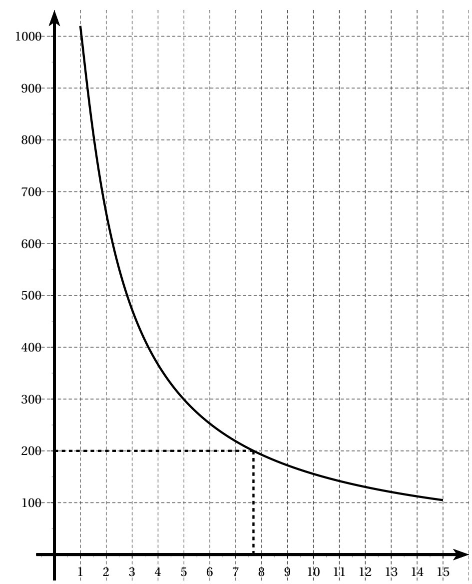
La fonction f est donc décroissante sur $[1\ ;\ 15]$.

c.

x	1	15
f	1020 ↘	105

2.

t	1	2	3	4	5	8	10	12	15
$f(t)$	1020	659	472	367	299	193	156	130	105



Partie B

1. a. Graphiquement $f(3,5)\approx 410$, il reste donc environ 410 mg de médicament dans le sang au bout de 3h30 min.

b. $f(3,5)=\dfrac{2890}{7}\approx 412,86$.

2. Le médicament devient inefficace au bout d'environ 7h30.

EXERCICE 503

1. Voir calculatrice.

2. D'après la calculatrice :

x	6		7		9
f			$3,38$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$1,43$				$0,02$

3. Le maximum de $f(x)$ est atteint pour $x=7$, le pH du duodénum doit être égal à 7.

EXERCICE 504

La parabole d'équation $y=2(x-3)(x-5)$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 3 et 5.

La parabole a donc pour axe de symétrie la droite d'équation $x=4$.

La droite d'équation $y=k$ coupe la parabole en A et B tels que $AB=6$ alors par symétrie, $x_A=4-3=1$ et $x_B=4+3=7$.

On a donc $A(1\,;\,k)$ et $B(7\,;\,k)$.

A et B appartiennent à la parabole,

on a donc $k=2(7-3)(7-5)=16$.

EXERCICE 505

• $f(x)=5-(x-2)^2$, la parabole $\mathcal{P}$ est donc de sommet $S(2\,;\,5)$.

• Déterminons les coordonnées des points A et B :

$f(x)=y \implies -x^2+5x=0 \implies x(5-x)=0$

$\implies (x=0 \text{ ou } x=5)$.

$f(x)=1$ et $f(5)=-4$.

On a donc $A(0\,;\,1)$ et $B(5\,;\,-4)$.

On obtient alors $AS^2=(2-0)^2+(1-5)^2=20$

$BS^2=(5-2)^2+(-4-5)^2=90$

$AB^2=(5-0)^2+(-4-1)^2=50$

donc $AS^2+BS^2-AB^2=60$.

EXERCICE 506

f est une fonction affine donc de la forme $f(x)=ax+b$.

$a=\dfrac{f(-2)-f(1)}{-2-1}=-1$ et $b=f(1)-a=-1$

Ainsi $f(x)=-x-1$.

On a alors $f\left(f(0)\right)=f(-1)=0$.

EXERCICE 507

f est une fonction affine donc de la forme $f(x)=ax+b$.

$f(2)=-f(1)$ on en déduit alors que $f(1,5)=0$.

$a=\dfrac{f(-2)-f(1,5)}{-2-1,5}=\dfrac{1}{-3,5}=-\dfrac{2}{7}$

$b=f(-2)+2a=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$.

Ainsi $f(x)=-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{3}{7}$.

EXERCICE 508

f est une fonction affine donc de la forme $f(x)=ax+b$.

$f\left(f(x)\right)=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$.

D'après l'énoncé $f\left(f(x)\right)=2x+1$ on en déduit donc que $a^2=2$ et $ab+b=1$.

• $a^2=2$ donc $a=\sqrt{2}$ ou $a=-\sqrt{2}$.

• $b=\dfrac{1}{a+1}$

Si $a=\sqrt{2}$ alors $b=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$.

Si $a=-\sqrt{2}$ alors $b=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=-1-\sqrt{2}$.

• Si $f(x)=\sqrt{2}x-1+\sqrt{2}$ alors $f(1)=2\sqrt{2}-1$

Si $f(x)=-\sqrt{2}x-1-\sqrt{2}$ alors $f(1)=-2\sqrt{2}-1$.

EXERCICE 509

1. $f(2)=3$

2. $g(2)=4$

3. $h(2)=4$

4. $f\left(g(2)\right)=f(4)=5$

5. $f(h(2))=f(4)=5$

6. $g\left(f(2)\right)=g(3)=6$

7. $f\Big(g(h(2))\Big)=f\left(g(4)\right)=f(8)=9$

8. $f(x)=x+1$

9. $g(x)=2x$

10. $h(x)=x^2$

11. $f\left(g(x)\right)=f(2x)=2x+1$

12. $f(h(x))=f\left(x^2\right)=x^2+1$

13. $g\left(f(x)\right)=g(x+1)=2(x+1)$

14. $g(h(x))=g\left(x^2\right)=2x^2$

15. $f\left(f(x)\right)=f(x+1)=x+2$

16. $g\left(g(x)\right)=g(2x)=4x$

17. $h(h(x))=h\left(x^2\right)=\left(x^2\right)^2=x^4$

18. $f\left(g(h(x))\right)=f\left(g\left(x^2\right)\right)=f\left(2x^2\right)=2x^2+1$

19. $f\left(h\left(g(x)\right)\right)=f(h(2x))=f\left(4x^2\right)=4x^2+1$

20. $h\big(g\big(f(x)\big)\big) = h\big(g(x+1)\big) = h(2x+2) = (2x+2)^2$

EXERCICE 510

1. $f(0) = 1$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{1}{3}$, $f(3) = \dfrac{1}{4}$

On a donc $A(0\ ;\ 1)$, $B\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$

$C\left(2\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$ et $D\left(3\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$.

$AB = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$BC = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{37}}{6}$

$CD = \sqrt{(3-2)^2 + \left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{145}}{12}$

$AB + BC + CD = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{37}}{6} + \dfrac{\sqrt{145}}{12} \approx 3,135$

2. **a.** La def $f(x)$ permet de calculer l'image de la fonction pour x donné.

b. p correspond à l'écart entre les abscisses des points choisis.

c. « L=L+sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2) ».

3. Avec $n = 3$, nous retrouvons le résultat précédent.

Avec $n = 10$, $L \approx 3,148$

Avec $n = 100$, $L \approx 3,150$.

4.

```
def longueur(a, b, n) :
    L = 0
    p = (b - a)/n
    x1 = a
    x2 = x1 + p
    for i in range(n) :
        y1 = f(x1)
        y2 = f(x2)
        L = L + sqrt((x1 - x2) ** 2 + (y1 - y2) ** 2)
        x1 = x2
        x2 = x2 + p
    print(L)
```

5. La longueur de la courbe sur [1 ; 5] est égale à 4,0199 à 10^{-4} près.

La longueur de la courbe sur [0 ; 10] est égale à 10,1527 à 10^{-4} près.

EXERCICE 511

Dans le programme de l'exercice précédent, il suffit de changer la def $f(x)$:

```
def f(x) :
    return x ** 2
```

On obtient en prenant $n = 1000$, $L = 51,7485$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 512

1. $f(-x) = x^2 - 4x - 3$ n'est égal ni à $f(x)$, ni à $-f(x)$.

2. $g(x) = \dfrac{x^2+4x-3+x^2-4x-3}{2} = x^2 - 3$

$g(-x) = x^2 - 3 = g(x)$, la fonction g est paire.

3. $h(x) = \dfrac{x^2+4x-3-x^2+4x+3}{2} = 4x$.

$h(-x) = -4x = -h(x)$, la fonction h est impaire.

EXERCICE 513

1. $f(1;3) = 37$ pour la vente de 1 appareil A et 3 appareils B, le bénéfice sera de 37 €

$f(5;5) = 113$ pour la vente de 5 appareils A et 5 appareils B, le bénéfice sera de 113 €

$f(9;4) = 165$ pour la vente de 9 appareils A et 4 appareils B, le bénéfice sera de 165 €

$f(15;0) = 223$ pour la vente de 15 appareils A et 0 appareil B, le bénéfice sera de 223 €

$f(0;10) = 78$ pour la vente de 0 appareil A et 10 appareils B, le bénéfice sera de 78 €

2. On écrit une fonction « benefice » ne prenant aucun paramètre en entrée.

```
def benefice() :
    for x in range(16) :
        for y in range(11) :
            b=15*x+8*y-2
            if b>= 250 :
                print("x= ", x, "y= ",y)
```

Nous obtenons les résultats :

$x=12 \quad y=9$
$x=12 \quad y=10$
$x=13 \quad y=8$
$x=13 \quad y=9$
$x=14 \quad y=9$
$x=14 \quad y=10$
$x=15 \quad y=4$
$x=15 \quad y=5$
$x=15 \quad y=6$
$x=13 \quad y=10$
$x=14 \quad y=6$
$x=14 \quad y=7$
$x=14 \quad y=8$
$x=15 \quad y=7$
$x=15 \quad y=8$
$x=15 \quad y=9$
$x=15 \quad y=10$

EXERCICE 514

$$f\Big(g(x)\Big) = (ax+b)^2-(ax+b)+2$$
$$= a^2x^2+a(2b-1)x+b^2-b+2$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré, nous obtenons :
$a^2=9$, $a(2b-1)=-3$ et $b^2-b=0$
$a^2=9 \iff a=3$ ou $a=-3$.
• Si $a=3$ alors $b=0$
• Si $a=-3$ alors $b=1$
Il reste à vérifier que $f\big(g(3x)\big) = 9x^2-3x+2$ et $f\big(g(-3x+1)\big)=9x^2-3x+2$.
Les deux égalités sont vérifiées, on obtient donc deux solutions : $g(x)=3x$ et $g(x)=-3x+1$.

EXERCICE 515

Pour tout x réel, on a : $x=f(ax+b)=a(bx+a)+b$
soit encore $abx+a^2+b=x$, on en déduit alors que $ab=1$ et $a^2+b=0$.
$a^2+b=0$ donc $b=-a^2$
On en déduit alors que $ab=-a^3=1$
donc $a=-1$ et $b=-1$
ainsi $f(x)=-x-1$.
Il reste à vérifier que f vérifie $f(-x-1)=x$.
$f(-x-1)=-(-x-1)-1=x+1-1=x$
$f(x)=-x-1$ est donc la solution.

EXERCICE 516

• Déterminons $f(x)$:
$$\begin{cases} f(x)+3g(x)=x^2+x+6 \\ 2f(x)+4g(x)=2x^2+4 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 4f(x)+12g(x)=4x^2+4x+24 \\ -6f(x)-12g(x)=-6x^2-12 \end{cases}$$
En ajoutant membre à membre les deux lignes, nous obtenons $-2f(x)=-2x^2+4x+12$
donc $f(x)=x^2-2x-6$

• Déterminons $g(x)$:
$$\begin{cases} f(x)+3g(x)=x^2+x+6 \\ 2f(x)+4g(x)=2x^2+4 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2f(x)+6g(x)=2x^2+2x+12 \\ -2f(x)-4g(x)=-2x^2-4 \end{cases}$$
En ajoutant membre à membre les deux lignes, nous obtenons $2g(x)=2x+8$
donc $g(x)=x+4$.
Il reste à résoudre l'équation $x^2-2x-6=x+4$ ou encore $x^2-3x-10=0$.
$$x^2-3x-10 = x^2-5x+2x-10 = x(x-5)+2(x-5)$$
$$= (x+2)(x-5)$$
On en déduit que $x^2-3x-10=0 \iff x=-2$ ou $x=5$.
Vérification :
$f(5)=9$ et $g(5)=9$
$f(-2)=2$ et $g(-2)=2$
$x=-2$ et $x=5$ sont donc les deux solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.

EXERCICE 517

1. $f(x)=1 \iff 1+x=1-x \iff x=0$.
On a de plus $f(-1)=0$. Il suffit donc d'enlever 0 et -1 de l'ensemble de définition.

2.

x	8	x_1	x_2	x_3
$f(x)$	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{7}{9}$	8

La suite est de période 4.

3. Pour tout x différent de 0 et 1 :
$$f(x)=\frac{1+x}{1-x},\ f\big(f(x)\big)=\frac{1\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=-\frac{1}{x}.$$
On en déduit alors que
$$f\Big(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\Big)=f\left(f\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=x.$$
Donc quel que soit x différent de 0 et 1, la suite est de période 4.

EXERCICE 518

1. Si $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ alors $0<2x\leqslant 1$

Si $\dfrac{1}{2} < x < 1$ alors $1 > 2(1-x) > 0$
On en déduit donc que $f(x) \in]0\ ;\ 1]$.

2. $f^{(4)}\left(\dfrac{3}{11}\right) = f\left(\dfrac{2}{11}\right) = \dfrac{4}{11}$

$f^{(5)}\left(\dfrac{3}{11}\right) = f\left(\dfrac{4}{11}\right) = \dfrac{8}{11}$

$f^{(6)}\left(\dfrac{3}{11}\right) = f\left(\dfrac{8}{11}\right) = 2\left(1-\dfrac{8}{11}\right) = \dfrac{6}{11}$

$f^{(7)}\left(\dfrac{3}{11}\right) = f\left(\dfrac{6}{11}\right) = 2\left(1-\dfrac{6}{11}\right) = \dfrac{10}{11}$.

3. Si $a \in]0\ ;\ 0,5]$
$f(a) = a \iff 2a = a$ d'où $a = 0$ ce qui est impossible.
Si $a \in]0,5\ ;\ 1[$
$f(a) = a \iff 2(1-a) = a$ d'où $a = \dfrac{2}{3}$.

4. On sait que $f^{(4)}(x) = 1$
soit $x,\ y,\ z,\ 1$ la suite des résultats. Il faut procéder à rebours, c'est-à-dire déterminer z, puis y et enfin x.
$f^{(4)}(x) = f(z) = 1$.
• Si $z \in]0\ ;\ 0,5]$ alors $2z = 1$ donc $z = \dfrac{1}{2}$
• Si $z \in]0,5\ ,\ 1[$ alors $f(z) < 1$ d'après la question 1. $z = \dfrac{1}{2}$.
Déterminons y tel que $f(y) = \dfrac{1}{2}$.
• Si $y \in]0\ ;\ 0,5]$ alors $y = \dfrac{1}{4}$
• Si $y \in]0,5\ ,\ 1[$ alors $y = \dfrac{3}{4}$
– Si $y = \dfrac{1}{4}$ alors $f(x) = \dfrac{1}{4}$
• Si $x \in]0\ ;\ 0,5]$ alors $2x = \dfrac{1}{4}$ donc $x = \dfrac{1}{8}$
• Si $x \in]0,5\ ,\ 1[$ alors $2(1-x) = \dfrac{1}{4}$ donc $x = \dfrac{7}{8}$
– Si $y = \dfrac{3}{4}$ alors alors $f(x) = \dfrac{3}{4}$
• Si $x \in]0\ ;\ 0,5]$ alors $2x = \dfrac{3}{4}$ donc $x = \dfrac{3}{8}$
• Si $x \in]0,5\ ,\ 1[$ alors $2(1-x) = \dfrac{3}{4}$ donc $x = \dfrac{5}{8}$
Il reste à vérifier que les quatre résultats obtenus conviennent.
Il y a donc quatre solutions : $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{7}{8}$.

EXERCICE 519

Soit x, y, z et t la suite des résultats. Nous allons procéder à rebours c'est-à-dire déterminer t, puis z, y et enfin x.
• $f(t) = 0 \iff t^2 + 12t + 30 = 0$
On commence par établir la forme canonique du polynôme,
$t^2 + 12t + 30 = (t+6)^2 - 6^2 + 30 = (t+6)^2 - 6$
L'équation devient $\left(t + 6 + \sqrt{6}\right)\left(t + 6 - \sqrt{6}\right) = 0$
On en déduit alors que $t = -6 - \sqrt{6}$ ou $t = -6 + \sqrt{6}$.
• Déterminons z :
–Si $t = -6 - \sqrt{6}$ alors $f(z) = -6 - \sqrt{6}$
donc $z^2 + 12z + 36 + \sqrt{6} = 0$
or $z^2 + 12z + 6 + \sqrt{6} = (z+6)^2 + \sqrt{6} > 0$
l'équation n'a pas de solution réelle.
–Si $t = -6 + \sqrt{6}$ alors $f(z) = -6 + \sqrt{6}$
donc $z^2 + 12z + 36 - \sqrt{6} = 0$
soit encore $(z+6)^2 - \sqrt{6} = 0$
On en déduit alors que $z = -6 + \sqrt{\sqrt{6}}$ ou $z = -6 - \sqrt{\sqrt{6}}$.
• Déterminons y :
–Si $z = -6 - \sqrt{\sqrt{6}}$ alors $f(y) = -6 - \sqrt{\sqrt{6}}$
donc $y^2 + 12y + 36 + \sqrt{\sqrt{6}} = 0$
or $y^2 + 12y + 6 + \sqrt{\sqrt{6}} = (y+6)^2 + \sqrt{\sqrt{6}} > 0$
l'équation n'a pas de solution réelle.
–Si $z = -6 + \sqrt{6}$ alors $f(y) = -6 + \sqrt{\sqrt{6}}$
donc $y^2 + 12y + 36 - \sqrt{\sqrt{6}} = 0$
soit encore $(y+6)^2 - \sqrt{\sqrt{6}} = 0$
On en déduit alors que :
$y = -6 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}$ ou $y = -6 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}$.
• Déterminons x :
En procédant comme précédemment, nous obtenons :
$x = -6 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}}$ ou $x = -6 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}}$.

La plus grande solution de l'équation est donc
$-6 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}}$.

EXERCICE 520

$f(x) = (x-b)^2 - b^2 - 1$
La courbe de f est une parabole « pointée vers le bas » de sommet $S\left(b\ ;\ -b^2 - 1\right)$.
• Si $b < 0$
alors $min(f) = f(0) = -1$ et $Max(f) = f(1) = -2b$
donc $Max(f) - min(f) = 1 - 2b > 1$
• Si $b = 0$
alors $min(f) = f(0) = -1$ et $Max(f) = f(1) = 0$
donc $Max(f) - min(f) = 1$
• Si $0 < b \leqslant 0,5$
alors $min(f) = f(b) = -b^2 - 1 \leqslant -1,25$ et $Max(f) = f(0) = -1$

donc $Max(f) - min(f) \leqslant 0{,}25$

• Si $0{,}5 < b < 1$

alors $min(f) = f(b) = -b^2 - 1$ et $Max(f) = f(1) = -2b$

donc $Max(f) - min(f) = (b-1)^2 \ < 0{,}25$

• Si $b = 1$

alors $min(f) = f(1) = -2$ et $Max(f) = f(0) = -1$

donc $Max(f) - min(f) = 1$

• Si $b > 10$

alors $min(f) = f(b) = -b^2 - 1$ et $Max(f) = f(0) = -1$

donc $Max(f) - min(f) = b^2 > 1$

La différence entre les valeurs maximum et minimum de f ne peut être égale à 1 que dans les cas $b = 0$ ou $b = 1$.

EXERCICE 521

Pour tout $n > 1$, $f(n) = \dfrac{(2n-1)(n+1)}{(2n+1)(n-1)}$

$P = f(2)f(3)f(4)\cdots f(99)f(100)$

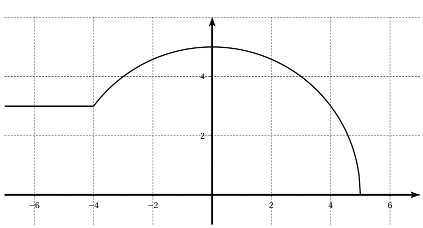
$$P = \frac{3\times 3}{5\times 1} \times \frac{5\times 4}{7\times 2} \times \frac{7\times 5}{9\times 3} \times \cdots \times \frac{197\times 100}{199\times 98} \times \frac{199\times 101}{201\times 99}$$

$$P = \frac{3\times 100\times 101}{1\times 2\times 201}$$

$$P = \frac{3\times 50\times 101}{201} = \frac{5050}{67}.$$

EXERCICE 522

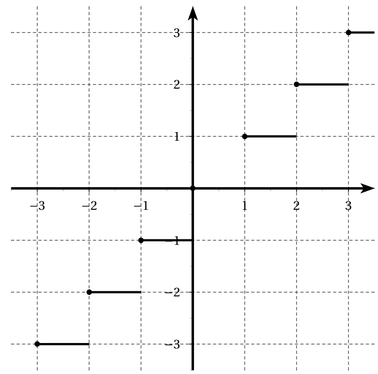
1. Si $x < -4$, $g(x) = \sqrt{25-16} = 3$
Si $-4 \leqslant x \leqslant 5$, $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
Si $x > 5$, $g(x) = 0$.



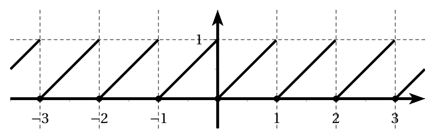
2. La courbe de g est une demi-droite sur $]-\infty\ ;\ -4[$ et sur $]5\ ;\ +\infty[$, un arc de cercle sur $[-4\ ;\ 5]$.

EXERCICE 523

1.



2.



3. Si $0 \leqslant x < 1$ alors $0 \leqslant x^2 < 1$ donc $0\left\lfloor x \right\rfloor = 0$

de plus $\left\lfloor x \right\rfloor = 0$ donc $f(x) = 0$

Si $1 \leqslant x < \sqrt{2}$ alors $1 \leqslant x^2 < 2$ donc $\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 1$

de plus $\left\lfloor x \right\rfloor = 1$ donc $f(x) = 0$

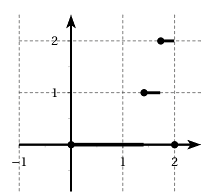
Si $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$ alors $2 \leqslant x^2 < 3$ donc $\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 2$

de plus $\left\lfloor x \right\rfloor = 1$ donc $f(x) = 1$

Si $\sqrt{3} \leqslant < 2$ alors $3 \leqslant x^2 < 4$ donc $\left\lfloor x \right\rfloor = 3$

de plus $\left\lfloor x \right\rfloor = 1$ donc $f(x) = 2$

Si $x = 2$ alors $f(x) = 0$.



EXERCICE 524

Pour x réel non nul, f vérifie :

$\dfrac{1}{x} f(-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$ (1)

En remplaçant x par $-\dfrac{1}{x}$ la relation devient :

$-xf\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(-x) = -\dfrac{1}{x}$

ou encore $-f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=-\frac{1}{x^2}$ (2)

Soit en ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2) :
$\frac{2}{x}f(-x)=x-\frac{1}{x^2}$
soit encore $f(-x)=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$
On en déduit alors que $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 525

Soit y un réel et $x=f(y)$, l'équation devient :
$f(0)=1-f(y)-y$.
Cette relation est vraie pour tout y donc aussi pour $y=0$.
Nous obtenons alors $f(0)=\frac{1}{2}$ et donc pour tout y réel, $f(y)=\frac{1}{2}-y$.

EXERCICE 526

• Si $x=y=0$ alors $f(0)=2f(0)$ donc $f(0)=0$.
• Si $x=y=2$ alors $f(4)=2f(2)+4$
or $f(4)=10$ donc $f(2)=3$
• Si $x=y=1$ alors $f(2)=2f(1)+1$
or $f(2)=3$ donc $f(1)=1$.
• Supposons $x=n\in\mathbb{N}$ et $y=1$ alors
$f(n+1)=f(n)+f(1)+n=f(n)+n+1$.
Soit $S=\big(f(2022)-f(2021)\big)+\big(f(2021)-f(2020)\big)+\cdots$
$\cdots+\big(f(2)-f(1)\big)+\big(f(1)-f(0)\big)$.
D'une part $S=f(2022)-f(0)=f(2022)$.
D'autre part $S=2022+2021+2020+\cdots+2+1$
$=\frac{2022\times 2023}{2}=2\,045\,253$
Nous en déduisons alors que si f existe alors
$f(2022)=2\,045\,253$.

EXERCICE 527

On résout le problème à rebours.
• On cherche z tel que $f(z)=3$. Cela revient à résoudre l'équation $z^2-2z-3=0$.
$z^2-2z-3=(z-1)^2-1^2-3=(z-1)^2-4$
donc $z^2-2z-3=(z-1-2)(z-1+2)=(z-3)(z+1)$
Les solutions sont donc $z=3$ et $z=-1$.
• On cherche y tel que $f(y)=3$ ou $f(y)=-1$.
D'après ce qui précède $f(y)=3$ si $y=3$ ou $y=-1$.
$f(y)=-1 \iff y^2-2y+1=0 \iff (y-1)^2=0$
Cette équation n'admet qu'une solution : $y=1$.
• Le problème revient à chercher x tel que $f(x)=-1$ ou $f(x)=1$ ou $f(x)=3$.
⋆ $f(x)=-1 \iff x=1$
⋆ $f(x)=3 \iff x=3$ ou $x=-1$
⋆ $f(x)=1 \iff x^2-2x-1=0 \iff (x-1)^2-2=0$
$\iff \big(x-1-\sqrt{2}\big)\big(x-1+\sqrt{2}\big)=0$
donc $x=1+\sqrt{2}$ ou $x=1-\sqrt{2}$.
Les solutions de l'équation $f\big(f\big(f(x)\big)\big)=3$ sont -1, $1-\sqrt{2}$, 1, $1+\sqrt{2}$ et 3.

EXERCICE 528

Posons $f(0)=a$ et $f(1)=b$.
Par hypothèse $f(a)=f\big(f(0)\big)=1$
$f(b)=f\big(f(1)\big)=1$, $f\big(f(a)\big)=f(1)=b$.
On a de plus $f\big(f(b)\big)=f(1)=b$ donc $b^2-b+1=b$.
$b^2-b+1=b \iff b^2-2b+1=0 \iff (b-1)^2=0$
donc $b=1$.
On en déduit alors que $a^2-a+1=b=1$.
$a^2-a+1=1 \iff a(a-1)=0$ donc $a=0$ ou $a=1$.
• $f(a)=f\big(f(0)\big)=1$ donc $a\neq 0$.
On en déduit que $f(0)=1$.

EXERCICE 529

Posons $a=f(0)$ et $b=f(1)$.
Pour $x=0$, $y=1$ l'égalité s'écrit $f(a+b)=a+b^2$ (1)
Pour $x=1$, $y=0$ l'égalité s'écrit $f(b+a)=b+2a+a^2$ (2)
En comparant les deux égalités, on obtient :
$b^2+a=a^2+b+2a$
soit encore $(a+b)(a-b+1)=0$.
• Si $a+b=0$ alors d'après (1) : $a=a+b^2$ donc $b=0$.
comme $a+b=0$ donc $a=0$.
Ainsi $f(0)=f(1)=0$.
Pour $x=0$, l'égalité de départ donne pour tout y, $f\big(f(y)\big)=\big(f(y)\big)^2$ (3).
Pour $x=1$, l'égalité de départ donne pour tout y, $f\big(f(y)\big)=2f(y)+\big(f(y)\big)^2$ (4)
En comparant les égalités (3) et (4), on obtient pour tout y, $f(y)=0$.
• $b=a+1$
Pour $x=0$, l'égalité de départ donne pour tout y, $f\big(a+f(y)\big)=a+\big(y\big)^2$.
ou encore pour tout x, $f\big(a+f(x)\big)=a+\big(f(x)\big)^2$ (5)
Pour $y=0$, l'égalité de départ donne pour tout x,

$f\left(f(x)+a\right)=f\left(x^2\right)+2x^2a+a^2$ (6)
En comparant les égalités (5) et (6), on obtient
$f\left(x^2\right)+2ax^2+a^2-a=\left(f(x)\right)^2$ (7)
Pour $x=1$, l'égalité de départ donne pour tout y, $f\left(a+1+f(y)\right)=a+1+2f(y)+\left(f(y)\right)^2$
ou encore pour tout x,
$f\left(a+1+f(x)\right)=a+1+2f(x)+\left(f(x)\right)^2$ (8)
Pour $y=1$, l'égalité de départ, pour tout x, $f\left(f(x)+a+1\right)=f\left(x^2\right)+2x^2(a+1)+(a+1)^2$ (9).
En comparant les égalités (8) et (9), on obtient

$$\begin{aligned} f\left(x^2\right) &= f\left(x^2\right)+2ax^2+2x^2+a^2+2a+1 \\ &= a+1+2f(x)+\left(f(x)\right)^2 \end{aligned}$$

ou encore, pour tout x,
$f\left(x^2\right)+2ax^2+2x^2+a^2+a=2f(x)+\left(f(x)\right)^2$ (10)
En comparant les égalités (7) et (10), on obtient pour tout x, $2x^2+2a=2f(x)$ soit $f(x)=x^2+a$.
En remplaçant dans l'égalité d'origine, on obtient pour tous réels x et y :
$\left(x^2+y^2+2a\right)^2+a=x^4+a+2x^2\left(y^2+a\right)+\left(y^2+a\right)^2$.
Pour $x=y=0$, on a donc $4a^2=a^2$ donc $a=0$.
Finalement, pour tout x réel, $f(x)=x^2$.
Les fonctions possibles sont la fonction nulle et la fonction carré.
Vérification : Si pour tout x, $f(x)=0$ alors
$f\left(f(x)+f(y)\right)=f(0)=0$
$f\left(x^2\right)+2x^2f(y)+\left(f(y)\right)^2=0$.
L'égalité est vérifiée.
Si pour tout x, $f(x)=x^2$ alors
$f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(x^2+y^2\right)=\left(x^2+y^2\right)^2$
$f\left(x^2\right)+2x^2f(y)+\left(f(y)\right)^2=x^4+2x^2y^2+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2$
L'égalité est vérifiée.
Les solutions sont donc la fonction nulle et la fonction carré.

EXERCICE 530

- Pour $x=y=0$ on obtient $f(0)=0$
- Pour $x=1$ et $y=0$, on obtient $f(1)=\left(f(1)\right)^2$

donc $f(1)=0$ ou $f(1)=1$.

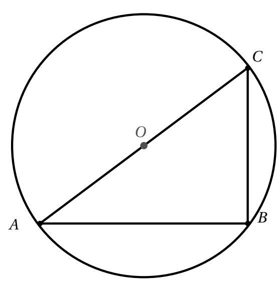
- Pour $y=0$, $x\in\mathbb{N}$, on obtient $f\left(x^2\right)=\left(f(x)\right)^2$.

Supposons $f(1)=0$ alors
$f\left((x+1)^2\right)-f\left(x^2\right)=f(2x+1)f(1)=0$
donc pour tout $x\in\mathbb{N}$, $f(x)=0$.
Supposons $f(1)=1$, alors $\left(f(2)\right)^2-1=f(3)f(1)=f(3)$
$\left(f(3)\right)^2-1=f(4)f(2)=\left(f(2)\right)^3$
soit encore $\left(f(2)\right)^3+1=\left(\left(f(2)\right)^2-1\right)^2$.
Posons $f(2)=a$ alors $a^3+1=\left(a^2-1\right)^2$
soit après simplification et factorisation :
$a^2(a+1)(a-2)=0$
donc $a=-1$ ou $a=0$ ou $a=2$.
$a\in\mathbb{N}$ donc -1 ne convient pas.
si $a=0$ alors f est la fonction nulle (cas déjà traité)
finalement $f(2)=2$
On en déduit alors que $f(3)=3$, $f(4)=4$, …
f est donc la fonction $f(x)=x$.
On vérifie que les fonctions $f(x)=0$ et $f(x)=x$ sont les seules solutions.

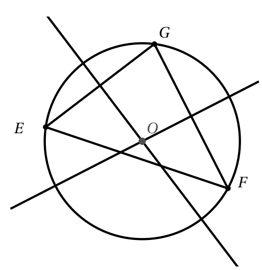
5.3 Géométrie

EXERCICE 531

Le triangle ABC est rectangle en B, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse $[AC]$.



On trace deux médiatrices, le point d'intersection de ces deux droites est le centre du cercle circonscrit au triangle.



EXERCICE 532

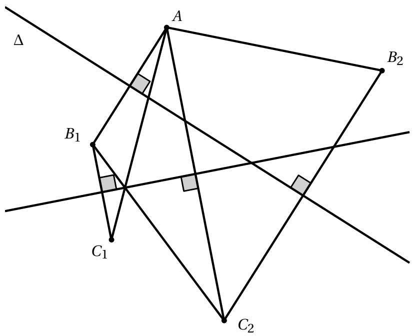
Pour déterminer le centre du cercle, il suffit de placer trois points sur le cercle, on obtient un triangle , on trace alors deux médiatrices.

EXERCICE 533

La droite Δ est la médiatrice du segment $[BC]$, le point C est donc le symétrique de B par rapport à la droite Δ.

EXERCICE 534

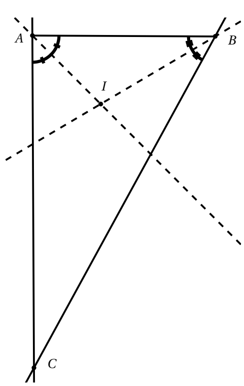
Les triangles AB_1C_1, AB_2C_2 et AB_1C_2 sont solutions.



EXERCICE 535

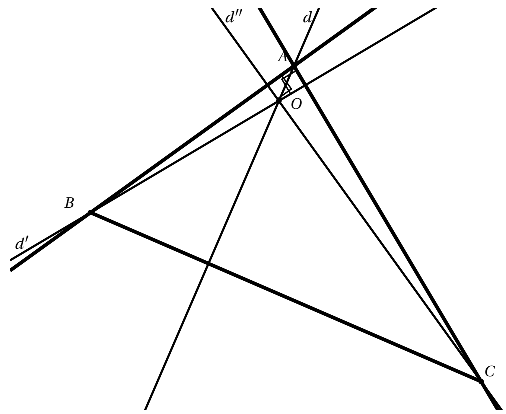
1. Le triangle ABC est rectangle en A, le centre du cercle circonscrit est donc le milieu de l'hypothénuse $[BC]$.
2. On en déduit alors que $OA = OB = OC$.
3. D'après la question précédente, $OA = \dfrac{1}{2}BC = 3$ cm.

EXERCICE 536



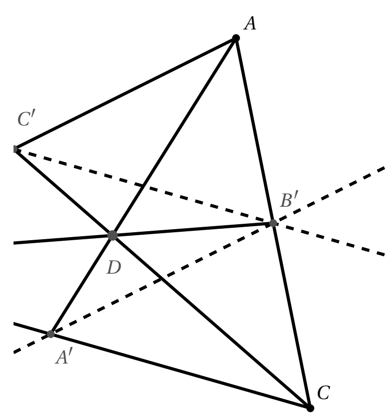
EXERCICE 537

La perpendiculaire à d' passant par A coupe d'' en C.
La perpendiculaire à d'' passant pas A coupe d' en B.



EXERCICE 538

• On place B' le milieu du côté AC.
• On trace la parallèle à (AB) passant par B', elle coupe (BC) en A' (propriété des milieux).
• On trace la parallèle à (BC) passant par B', elle coupe (AB) en C' (propriété des milieux).
• Les droites (AA') et (CC') sont deux médianes du triangle ABC, elles se coupent en D.
• Les trois médianes étant concourantes, on en déduit que (DB') est la médiane issue de B.



EXERCICE 539

1. J est le milieu de $[CD]$, la droite (AJ) est la médiane issue de A dans le triangle ACD.
2. I est le milieu de $[AD]$, la droite (IC) est la médiane issue de C dans le triangle ACD.
   O est le centre du parallélogramme $ABCD$, donc O est le milieu de $[AC]$. La droite (OD) est donc la médiane issue de D dans le triangle ACD.
   Les droites (AJ), $IC)$ et (OD) ou (BD) sont les trois médianes du triangle ACD, les droites (AJ), $IC)$ et (BD) sont donc concourantes.

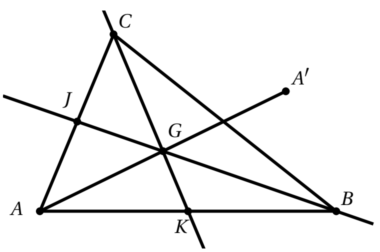
EXERCICE 540

Dans le triangle ACH, $(AH) \perp (IC)$ et $(AJ) \perp (CH)$, les droites (IC) et (AJ) sont donc deux hauteurs du triangle. Les hauteurs (AJ) et (CI) se coupent en B, le point B est donc l'orthocentre. On en déduit alors que (BH) est la hauteur issue de H donc $(BO) \perp (AC)$.

EXERCICE 541

1. **a.** On a $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ donc $a = kb$ et $c = kd$.
   Alors $a - c = kb - kd = k(b - d)$.
   b. Par hypothèse $b \neq d$ donc d'après la question précédente $k = \dfrac{a-c}{b-d}$
   ainsi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d}$.
2. **a.** $aire(ABU) = \dfrac{1}{2} h \times BU$.
   $aire(ACU) = \dfrac{1}{2} h \times UC$.
   b. D'après les résultats précédents,
   $\dfrac{aire(ABU)}{aire(ACU)} = \dfrac{BU}{CU}$.
3. On obtient de même $\dfrac{aire(MBU)}{aire(MCU)} = \dfrac{BU}{CU}$.
4. On a $aire(AMB) = aire(ABU) - aire(MBU)$
   et $aire(AMC) = aire(ACU) - aire(MCU)$
   or $\dfrac{aire(ABU)}{aire(ACU)} = \dfrac{aire(MBU)}{aire(MCU)} = \dfrac{BU}{CU}$
   donc d'après la question **1**,
   $\dfrac{aire(AMB)}{aire(AMC)} = \dfrac{aire(MBU)}{aire(MCU)} = \dfrac{BU}{CU}$.
5. **a.** M appartient à la médiane issue de A dans le triangle ABC, U est donc le milieu de $[BC]$, on a donc $BU = CU$.
   On en déduit alors que $\dfrac{aire(AMB)}{aire(AMC)} = 1$ donc $aire(AMB) = aire(AMC)$.
   b. Si $aire(AMB) = aire(AMC)$ alors $\dfrac{aire(AMB)}{aire(AMC)} = 1$ donc $BU = CU$ or U appartient au segment $[BC]$, U est donc le milieu de $[BC]$, la droite (AU) est donc la médiane issue de A dans le triangle ABC. M appartient à (AU), M appartient donc à la médiane issue de A.
6. **a.** $G \in [AA']$ donc d'après les questions **4** et **5.a**, $\dfrac{aire(ABG)}{aire(ACG)} = 1$ donc $aire(ABG) = aire(ACG)$.
   b. $G \in [BB']$ donc en procédant comme précédemment, on obtient $aire(ABG) = aire(BCG)$.
   c. $aire(ABG) = aire(ACG)$ et
   $aire(ABG) = aire(BCG)$
   donc $aire(ACG) = aire(BCG)$.
   d. $aire(ACG) = aire(BCG)$ donc d'après la question **5.b**, G appartient à la médiane issue de C.
   e. Les trois médianes sont concourantes en G.

EXERCICE 542

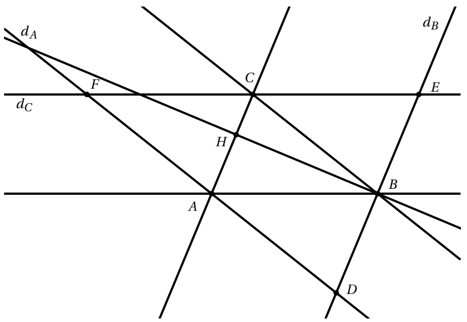


1. Dans le triangle $AA'C$, J est le milieu de $[AC]$ et G est le milieu de $[AA']$ donc d'après la propriété des milieux, (JG) est parallèle à $(A'C)$.
2. En procédant de la même manière dans le triangle $AA'B$, on démontre que (GK) donc (CK) est parallèle à $(A'B)$.
3. D'après les question précédentes, (CA') est parallèle à (BG) et (CG) est parallèle à $(A'B)$, donc $BGCA'$ est un parallélogramme.
4. $BGCA'$ est un parallélogramme, les diagonales (GA') et (BC) se coupent en leur milieu.
   Les points A, G et A' étant alignés, on en déduit alors que (AG) est une médiane du triangle ABC.
5. G appartient aux trois médianes, les médianes d'un triangles sont donc concourantes en G.

EXERCICE 543

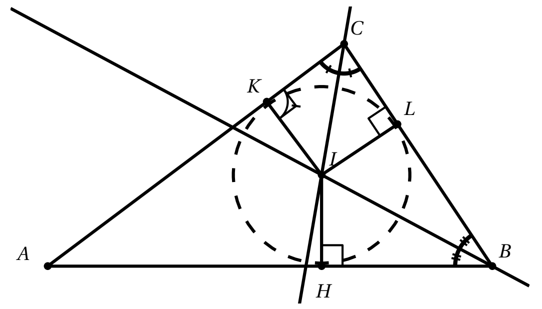
1. O appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc $OA = OB$.
   O appartient à la médiatrice de $[AC]$ donc $OA = OC$.
   On en déduit alors que $OB = OC$.
2. D'après la question précédente $OB = OC$ donc le point O appartient à la médiatrice de $[BC]$.
   On en déduit alors que la droite (OA') est la médiatrice de $[BC]$.
3. O appartient aux trois médiatrices, les médiatrices d'un triangle sont donc concourantes.

EXERCICE 544



1. Par construction $(AC)//(EB)$ et $(CE)//(AB)$ donc $ABEC$ est un parallélogramme.
   Par construction $(AC)//(BD)$ et $(CB)//(AD)$ donc $ACBD$ est un parallélogramme.
   On en déduit alors que $AC = EB$ et $AC = BD$ donc $EB = BD$, les points E, B et D étant alignés, on en déduit que B est le milieu de $[DE]$.
2. $(AC)//(DE)$ et $(BH) \perp (AC)$ donc $(BH) \perp (DE)$.
   Or B est le milieu de $[DE]$ donc (BH) est la médiatrice de $[DE]$.
3. Soit I le pied de la hauteur issue de C et J le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On démontre que C est le milieu de $[EF]$ puis que (CI) est la médiatrice de $[EF]$.
   De même A est le milieu de $[DF]$ et (AJ) est la médiatrice de $[DF]$.
4. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes (voir l'exercice précédent).
   D'autre part les médiatrices du triangle EDF sont les hauteurs du triangle ABC.
   On en déduit alors que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

EXERCICE 545



1. **a.** On a $\widehat{HBL} = \widehat{LBI}$ et $\widehat{BHI} = \widehat{BLI} = 90°$.
   on en déduit alors que $\widehat{BIH} = \widehat{BIL}$.
   De plus les triangles BIH et BIL ont leur hypoténuse commune, on en déduit alors que $IH = IL$.
   b. En procédant de même dans les triangles CLI et CKI, on obtient $IK = IL$.
   c. D'après les questions précédentes $IH = IL$ et $IL = IK$. On en déduit alors que $IH = IK$.
2. **a.** Les triangles AHI et AKI sont rectangles, leur hypoténuse est commune et $IH = IK$, les deux triangles sont donc égaux, on en déduit alors que $\widehat{IAH} = \widehat{IAK}$.
   Donc I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.
   b. La droite (AI) coupe l'angle $\widehat{HAK}$ en deux angles de même mesure, il s'agit donc de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle ABC.
   c. Le point I appartient aux trois bissectrices du triangle. Les bissectrices d'un triangle sont donc concourantes.
   d. Le cercle de centre I passant par L, passe aussi par les points K et H car $IL = IK = IH$.
   De plus le rayon IL est perpendiculaire au côté BC.
   Le cercle est donc tangent au côté BC.
   On procède de même pour les deux autres côtés.
   Le cercle est donc inscrit dans le triangle ABC.

EXERCICE 546

Les droites (AE), $BF)$ et $CG)$ sont les médianes du triangle EFG, elles sont donc concourantes.

EXERCICE 547

Soit Δ la médiatrice du segment $[EF]$.
Par construction, $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[EU]$.
Δ et $\mathcal{D}$ se coupent en I. Le point I est donc le point d'intersection des trois médiatrices du triangle FEU.
Le point G appartient donc à la troisième médiatrice, il appartient de plus côté $[UF]$, G est donc le milieu du segment $[UF]$.

EXERCICE 548

• Dans le triangle ACD, $AE = CE = ED$, le triangle est donc rectangle en D.
• Les points A, D et B sont alignés et $\widehat{ADC} = 90°$ donc $\widehat{BDC} = 90°$
Le triangle BCD est donc rectangle en D.
• D'après le codage $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ la somme des angles d'un triangle étant égale à 180°.
On en déduit que $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.
• Les triangles ACD et BCD sont rectangles, ont l'hypoténuse commune et leurs angles égaux, les deux triangles sont donc égaux.
On en déduit alors que $AC = BC$, le triangle ABC est isocèle en C.

EXERCICE 549

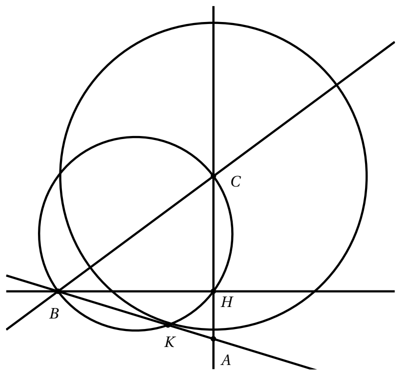
Les droites (AI) et (BD) sont parallèles donc $\widehat{BDA} = \widehat{IAC}$ (angles correspondants) et $\widehat{DBA} = \widehat{BAI}$ (angles alternes internes).
Or $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$ donc $\widehat{BDA} = \widehat{DBA}$, le triangle ABD est donc isocèle en A.
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle BCD, on obtient $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{IB}{IC}$
Le triangle ABD étant isocèle en A, on a $AD = AB$, on en déduit alors que $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{IB}{IC}$.

EXERCICE 550

1. **a.** h est la hauteur issue de A dans le triangle BAU, BU est alors la base.
   On en déduit alors que $aire(BAU) = \dfrac{1}{2} \times BU \times h$.
   b. h est la hauteur issue de A dans le triangle CAU, CU est alors la base.
   On en déduit alors que $aire(CAU) = \dfrac{1}{2} \times CU \times h$.
   c. D'après les résultats précédents,
   $$h = \frac{2 \times aire(BAU)}{BU} = \frac{2 \times aire(CAU)}{CU}$$
   On en déduit alors que $\dfrac{aire(BAU)}{aire(CAU)} = \dfrac{BU}{CU}$.
2. **a.** Soit H_B le projeté orthogonal de U sur (AB) et H_C le projeté orthogonal de U sur (AC).
   Les triangles AUH_B et AUH_C ont deux angles égaux et un côté commun, il sont donc égaux. On en déduit alors que $UH_B = UH_C$.
   b. d est la hauteur issue de U dans le triangle BAU, AB est alors la base.
   On en déduit alors que $aire(BAU) = \dfrac{1}{2} \times AB \times d$.
   c. c est la hauteur issue de U dans le triangle CAU, AC est alors la base.
   On en déduit alors que $aire(CAU) = \dfrac{1}{2} \times AC \times d$.
   d. D'après les résultats précédents,
   $$d = \frac{2 \times aire(BAU)}{AB} = \frac{2 \times aire(CAU)}{AC}$$
   On en déduit alors que $\dfrac{aire(BAU)}{aire(CAU)} = \dfrac{AB}{AC}$.
3. D'après les questions **1.c** et **2.d.** :
   $$\frac{aire(BAU)}{aire(CAU)} = \frac{BU}{CU} \text{ et } \frac{aire(BAU)}{aire(CAU)} = \frac{AB}{AC}$$
   donc $\dfrac{UB}{CU} = \dfrac{AB}{AC}$.
4. Le triangle ABC est isocèle rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore $AC = \sqrt{2}$.
   D'autre part $U \in [BC]$ donc $UC = CB - UB = 1 - UB$.
   La relation de la question précédente s'écrit : $\dfrac{UB}{1 - UB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
   soit $\sqrt{2}UB = 1 - UB$ donc $UB = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

EXERCICE 551

1.



2. K appartient au cercle de centre C et de rayon BH donc $BH = CK$.

Par hypothèse $(BH) \perp (CH)$ et $A \in (CH)$ donc (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Le point K appartient au cercle de diamètre $[BC]$, le triangle BCK est donc rectangle en K, les droites (BK) et (CK) sont donc perpendiculaires. Le point A appartient à la droite (BK) donc (CK) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

3. Le triangle ABC semble isocèle en A.

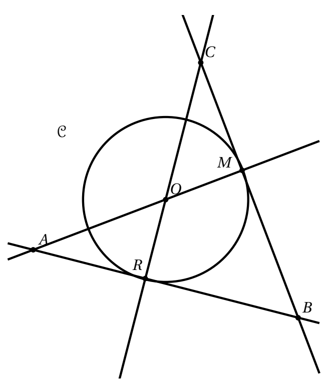
4. **a.** $aire(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AC \times BH = \dfrac{1}{2} \times h \times AC$

et $aire(ABC) = \dfrac{1}{2} \times CK \times AB = \dfrac{1}{2} \times h \times AB$.

b. D'après les résultats précédents $AC = AB$. On en déduit alors que le triangle ABC est isocèle en A.

EXERCICE 552

1.



2. Les triangles BOR et BOM sont rectangles et d'hypoténuse commune $[BO]$, de plus $OM = OR$ car rayons du cercle.

On en déduit alors que $BM = BR$, les deux triangles sont égaux donc $\widehat{OBR} = \widehat{OBM}$.

La droite (BO) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{MBR}$.

3. (AM) est la hauteur issue de A, (CR) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC, ces deux droites se coupent en O. Les hauteurs d'un triangle étant concourantes, la droite (OB) est la hauteur issue de B, donc (OB) est perpendiculaire à (AC).

4. La droite (OB) est bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ et hauteur issue de B dans le triangle ABC, le triangle ABC est donc isocèle en B.

EXERCICE 553

Le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, le triangle ABC est donc rectangle en C.

On en déduit alors que les segments $[AE]$ et $[BF]$ sont perpendiculaires.

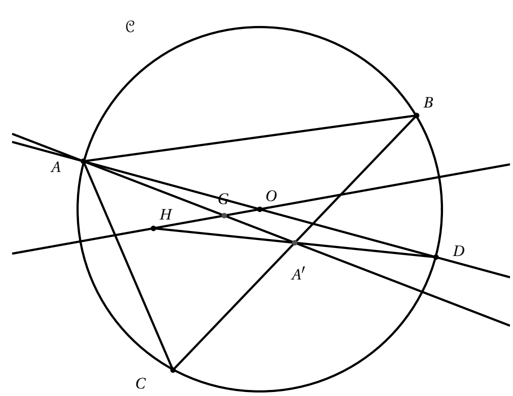
D'autre part E symétrique de A par rapport à C donc C est le milieu du segment $[AE]$.

De manière analogue, on montre que C est le milieu de $[BF]$.

Les diagonales du quadrilatères $ABEF$ se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires, $ABEF$ est donc un losange.

EXERCICE 554

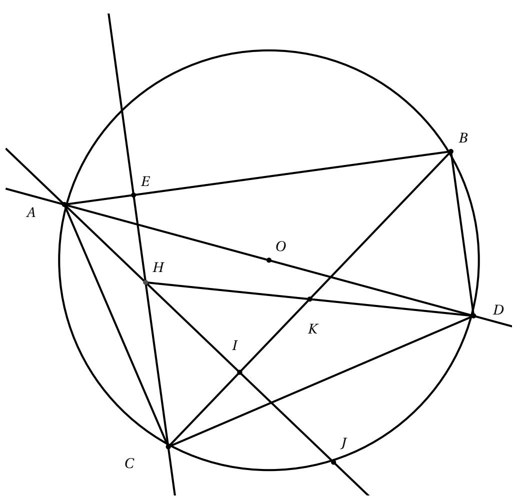
1.



2. **a.** Le point A' est le milieu des diagonales $[BC]$ et $[HD]$, le quadrilatère $BDCH$ est donc un parallélogramme.
b. Le triangle ACD est inscrit dans le cercle de diamètre $[AD]$, il est donc rectangle en C.
On en déduit alors que $(AC) \perp (CD)$ de plus $(CD)//(BF)$ on en déduit donc que $(BH) \perp (AC)$.
De même le triangle ABD est rectangle en B donc $(AB) \perp (BD)$.
De plus $(CH)//(BD)$ donc $(CH) \perp (AB)$.
c. (BH) et (CH) sont deux hauteurs du triangle ABC, H point d'intersection des deux hauteurs et donc l'orthocentre du triangle ABC.
3. **a.** Dans le triangle ACH, O est le milieu de $[AD]$ et A' est le milieu de $[DH]$, les droites (OH) et $(A'A)$ sont deux médianes du triangle ADH. Ces deux droites se coupent en G, le point G est donc le centre de gravité du triangle ADH.
b. La droite (AA') est la médiane issue de A dans le triangle ADH donc $AG = \dfrac{2}{3}AA'$.
c. Dans le triangle ABC, A' est le milieu de $[BC]$ et $AG = \dfrac{2}{3}AA'$ donc G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 555

1.



2. Le triangle ABD est inscrit dans un cercle de diamètre $[AD]$, il est donc rectangle en B.
De même le triangle ACD est rectangle en C.
3. $(AB) \perp (BD)$ et $(BD)//(CE)$ donc $(AB) \perp (CE)$.
La droite (CE) est donc la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
4. **a.** (AI) perpendiculaire à (BC), la droite (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Deux hauteurs du triangle ABC se coupent en H, le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.
b. B est un sommet du triangle et H est l'orthocentre, la droite (BH) est donc la hauteur issue de B dans le triangle ABC, la droite (BH) est donc perpendiculaire à (AC).
c. D'après les questions précédentes $(BH) \perp (AC)$ et $(AC) \perp (CD)$ donc $(BH)//(CD)$.
5. D'après les questions précédentes, $(BH)//(CD)$ et $(CH)//(BD)$, le quadrilatère $BHCD$ est donc un parallélogramme.
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, le point K est donc le milieu du segment $[HD]$.
6. **a.** Le triangle ADJ est inscrit dans le cercle de diamètre $[AD]$, il est donc rectangle en J.
On a $(DJ) \perp (AJ)$ et $(AJ) \perp (CI)$ donc $(CI)//(DJ)$.
b. Dans le triangle HDJ, K est le milieu de $[HD]$ et $(IK)//(DJ)$ donc d'après la propriété des milieux, I est le milieu de $[HJ]$.

EXERCICE 556

1. $O \in [AC]$ et $O \in [BD]$, $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = 2,5$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (DC) et (AB) sont parallèles.
2. Les droites (DC) et (AB) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OA}{OC}$.
On en déduit alors que $AB = CD \times \dfrac{OA}{OC} = 12,5$ cm.

EXERCICE 557

1. Dans le triangle LCT, (AR) et (CT) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{LR}{LT} = \dfrac{LA}{LC}$.
D'où $LR = LT \times \dfrac{LA}{LC} = 7,2$ cm.
2. $\dfrac{LT}{LE} = 3$ et $\dfrac{LC}{LB} = 3$.

$\dfrac{LT}{LE} = \dfrac{LC}{LB}$ et les points C, L, B et T, L, E sont alignés dans le même ordre alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EB) et (CT) sont parallèles.

EXERCICE 558

1. Dans le triangle ACF, $(GB)//(FC)$ donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AG}{AF} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{GB}{FC}$.

On en déduit alors que $AB = AC \times \dfrac{AG}{AF} = 1{,}6$ cm.

$FC = GB \times \dfrac{AF}{AG} = 3{,}75$ cm.

2. $\dfrac{AF}{AE} = 0{,}5$ et $\dfrac{AC}{AD} = 0{,}5$.

$\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$ et les points A, C, D et A, F, E sont alignés dans cet ordre alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FC) et (ED) sont alignées.

EXERCICE 559

1. $A \in [OB]$ donc $OB = OA + AB = 20$ cm.

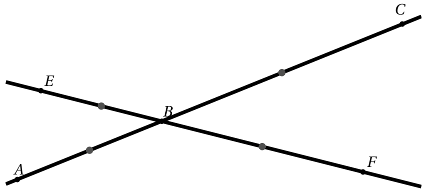
$C \in [OD]$ donc $OD = OC + CD = 12$.

2. $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{8{,}5}{20} = \dfrac{17}{40}$ et $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{5}{12}$.

$\dfrac{OA}{OB} \neq \dfrac{OC}{OD}$ d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 560

1.



2. $\dfrac{BA}{BC} = 0{,}6$ et $\dfrac{BE}{BF} = 0{,}6$.

$\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BE}{BF}$ et A, B, C et E, B, F sont alignés dans le même ordre, on en déduit d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AE) et (FC) sont parallèles.

3. $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{5}{3}$.

$\dfrac{BA}{BC} \neq \dfrac{BF}{BE}$, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (AF) et (EC) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 561

1. Dans le triangle OCD, $(AB)//(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$

d'où $OB = OD \times \dfrac{OA}{OC} = 2$

$CD = AB \times \dfrac{OC}{OA} = 3{,}75$.

2. $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{10}{3}$ et $\dfrac{OD}{OF} = \dfrac{10}{3}$.

$\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{OD}{OF}$ et C, O, E et D, O, F sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

EXERCICE 562

1. $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CB}$ et les points E, C, B et D, C, A sont alignés dans le même ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

2. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{ED}{AB}$ d'où

$ED = AB \times \dfrac{CD}{CA} = 13$.

3. Dans le triangle CDE, $ED^2 = 169$ et

$CE^2 + CD^2 = 25 + 144 = 169$.

$ED^2 = CE^2 + CD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CDE est rectangle en C.

EXERCICE 563

1. Le plus grand côté est BC, si le triangle est rectangle l'hypoténuse sera donc BC.

$BC^2 = 400$ et $AB^2 + AC^2 = 400$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2. Le plus grand côté est AB, si le triangle est rectangle l'hypoténuse sera donc AB.

$AB^2 = 121$ et $AC^2 + BC^2 = 120{,}25$.

$AB^2 \neq AC^2 + BC^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

3. Le plus grand côté est AB, si le triangle est rectangle l'hypoténuse sera donc AB.
   $AB^2 = 169$ et $AC^2 + BC^2 = 169$.
   $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

EXERCICE 564

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ainsi formé, on obtient $20^2 = 12^2 + (20-h)^2$.
D'où $(20-h)^2 = 256$ donc $20-h = 16$ ou $20-h = -16$ donc $h = 4$ ou $h = 36$ or $h < 20$.
On en déduit alors que $h = 4$ pieds.

EXERCICE 565

1. (CD) médiatrice de $[OA]$ donc $(CD) \perp (AO)$
   (BT) tangente à $\mathcal{C}$ en B donc $(BT) \perp (OB)$
   De plus $A \in (OB)$ et $M \in (CD)$ d'où $(CM)//(BT)$.
2. $(CM)//(BT)$ donc d'après le théorème de Thalès $\dfrac{OT}{OC} = \dfrac{OB}{OM}$ d'où $OT = OC \times \dfrac{OB}{OM} = 6$.
3. **a.** (CD) médiatrice de $[OA]$ donc $CO = CA$
   or $CO = OA$ le triangle COA est donc équilatéral.
   b. Le triangle COA est équilatéral donc $\widehat{MOC} = 60°$
   D'où $\widehat{MCO} = 180 - 90 - 60 = 30°$.
   $\widehat{DOT} = 180 - \widehat{MOD} - \widehat{TOB}$
   or $\widehat{TOB} = \widehat{MOC} = 60°$ et $\widehat{MOD} = \widehat{AOC} = 60°$
   donc $\widehat{DOT} = 60°$.

EXERCICE 566

1. **a.** Le périmètre de ABC est égal à 156 m donc
   $AB = 154 - 56 - 65 = 33$ m.
   Le périmètre de ADC est égal à 144 m donc
   $DC = 144 - 65 - 16 = 63$ m.
   b. Soit p le périmètre du champ $ABCD$.
   $p = AD + DC + CB + BA = 168$ m.
2. $AC^2 = 65^2 = 4225$ et $AB^2 + BC^2 = 4225$.
   $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
3. $aire(ABCD) = aire(ABC) + aire(ACD)$
   $aire(ABC) = \dfrac{1}{2} AB \times BC = 924 \text{ m}^2$
   $aire(ACD) = \dfrac{1}{2} AD \times DC = 504 \text{ m}^2$
   On en déduit alors que $aire(ABCD) = 1424 \text{ m}^2$.
4. D'après la question **3**, $p = 168$ m.
   $168 \times 0,85 = 142,8$, Tom va payer 142,80 € pour clôturer son champ.

EXERCICE 567

1. Les droites (AE) et (BD) sont parallèles. Le théorème de Thalès permet d'écrire :
   $\dfrac{DC}{EC} = \dfrac{BD}{AE}$ soit DC $= EC \times \dfrac{BD}{AE} = 4,4$ m.
2. On a $ED = EC - DC = 6 - 4,4 = 1,6$ m.
3. Comme $1,4 < 1,6$ et que la jeune fille a pour taille BD, elle sera entièrement dans la zone grisée, le conducteur ne la verra pas.

EXERCICE 568

En considérant le triangle de sommets : l'œil de Teiki, le sommet du Pinus et le point du Pinus d'altitude 1,60 m, le théorème de Thalès permet d'écrire :
$\dfrac{1,2}{12+1,2} = \dfrac{2-1,6}{h}$, h désignant la hauteur du Pinus moins 1,60 m.
On en déduit que : $h = \dfrac{0,4 \times 13,2}{1,2} = 4,4$ m.
La hauteur du Pinus est donc égale à $h + 1,6 = 6$ m.

EXERCICE 569

Moana a un pas qui fait en moyenne : $\dfrac{100}{111}$. D'après sa fiche Moana a une taille de 1,80 m.
Moana et l'arbre étant verticaux, leurs directions sont parallèles, on a une situation de Thalès. h étant la hauteur du cocotier, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{1,8}{h} = \dfrac{3}{10}$, d'où $3h = 18$ et donc $h = 6$ (m).

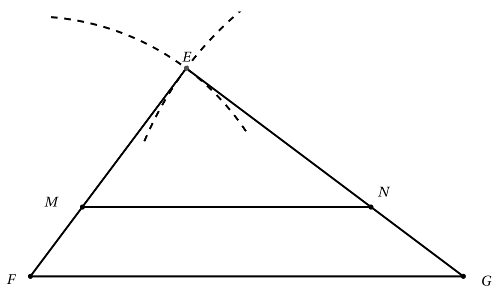
EXERCICE 570

1. Le triangle ABS est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore $AS^2 = AB^2 + BS^2 = 42,25$
   Ainsi $AS = \sqrt{42,25} = 6,5$ cm.
2. Le point M appartient au segment $[AS]$ donc
   $SM = AS - MA = 4,55$.
   Le point N appartient au segment $[BS]$ donc
   $SN = SB - BN = 4,2$.
3. $\dfrac{SM}{SA} = 0,7$ et $\dfrac{SN}{SB} = 0,7$.
   On a $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB}$, les points S, M, A et S, N, B sont ali-

gnés dans cet ordre, on en déduit alors d'après la réciproque du théorème de Thalès que (MN) parallèle à (AB). Autrement dit la traverse $[MN]$ est parallèle au sol.

EXERCICE 571

1. a.



b. $EM = \dfrac{2}{3} \times EF = 3,6$ cm.

c. Dans le triangle EFG, $M \in [EF]$ et $N \in [EG]$ donc d'après le théorème de Thalès $\dfrac{EM}{EF} = \dfrac{EN}{EG}$

donc $EN = EG \times \dfrac{EM}{EF} = 4,8$ cm.

2. a. $FG^2 = 81$ et $EF^2 + EG^2 = 81$.

$FG^2 = EF^2 + EG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en E.

b. $aire(EMN) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} \times EF \times EG = 8,64$ cm^2.

EXERCICE 572

1. Puisque le polygone est régulier les cinq angles au centre ont la même mesure soit $\dfrac{360}{5} = 72°$.

2. a. $OA = OB$ le triangle OAB est donc isocèle. La hauteur $[OM]$ est aussi la médiatrice de $[AB]$ (le théorème de Pythagore appliqué aux triangles OAM et OBM montre que $MA = MB$, donc M et O sont équidistants de A et de B) et la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$. Donc $\widehat{AOM} = 36°$.

b. Dans le triangle OAM rectangle en M, on a $\sin\widehat{AOB} = \dfrac{AM}{AO}$ donc $AM = AO \times \sin\widehat{AOB} \approx 139,89$, soit au mètre près 140 m.

c. Chaque côté mesure donc $2 \times 140 = 180$ et le périmètre est donc égal à $5 \times 280 = 1400$ m.

EXERCICE 573

1. Le coefficient d'agrandissement est égal à : $\dfrac{CB}{OF} = \dfrac{770}{35} = 22$.

2. Les droites (DE) et (AB), étant verticales, sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CB}{OF} = \dfrac{AB}{DE}$ d'où $AB = DE \times \dfrac{CB}{OF} = 4,4$ m.

3. Avec une telle croix la distance CB est égale à la hauteur de l'arbre. Il suffit de se placer de telle sorte que D et E coïncident avec la cime et le pied de l'arbre : la distance à l'arbre donne sa hauteur.

4. On a alors $L = \pi D$ ou $D = \dfrac{L}{\pi} = \dfrac{138}{\pi} \approx 43,92$ soit environ 44 cm au centimètre près.

EXERCICE 574

1. Dans le triangle BOA, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{OC}{OA}$ d'où $OD = OB \times \dfrac{OC}{OA} = 8$.

2. $\dfrac{OA}{OE} = 4$ et $\dfrac{OB}{OF} = 4$.

On a $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OB}{OF}$, les points A, O, E et d'autre part B, O, F sont alignés dans cet ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

EXERCICE 575

1. On a $SL = 1\,075 - 415 = 660$ m.

$JK = 1\,165 - 415 = 750$ m.

2. a. Dans le triangle SIL rectangle en L le théorème de Pythagore s'écrit :

$SI^2 = SL^2 + LI^2 = 660^2 + 880^2 = 1\,210\,000$.

Donc SI $= \sqrt{1\,210\,000} = 1\,100$ m.

b. Dans le triangle SIL rectangle en L,

on a $\tan\widehat{SIL} = \dfrac{SL}{LI} = \dfrac{660}{880} = 0,75$.

La calculatrice donne $\widehat{SIL} \approx 36,87$ soit 37° au degré près.

3. Pour parcourir 1 100 m à la vitesse de 10 km.h^{-1}, on met $t = \dfrac{1,100}{10} = 0,11$ h soit $60 \times 0,11 = 6,6$ min ou encore 6 min + 0,6 min = 6 min 36 s.

4. Dans le triangle IKJ rectangle en K, on a $\sin\widehat{SIL} = \dfrac{JK}{IJ}$, donc IJ $= \dfrac{JK}{\sin\widehat{SIL}} = 1\,250$ m

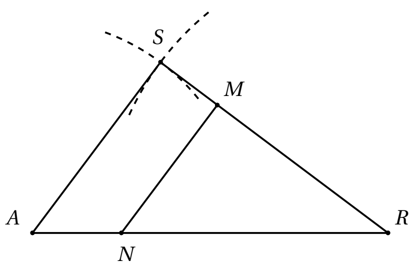
On a donc $SJ = IJ - IS = 1250 - 1100 = 150$ m.

EXERCICE 576

1. $(IJ) \perp (MN)$ et $(NP) \perp (MN)$ donc $(IJ)//(NP)$.
2. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{MJ}{MP} = \dfrac{MI}{MN}$
   donc $MJ = MP \times \dfrac{MI}{MN} = \dfrac{40}{3}$.

EXERCICE 577

1.



2. $AR^2 = 8^2 = 64$
   $AS^2 + RS^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 64$.
   $AR^2 = AS^2 + RS^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RAS est rectangle en S.
3. **a.** Voir figure.
   b. $\dfrac{RN}{RA} = 0,75$ et $\dfrac{RM}{RS} = 0,75$.
   Dans le triangle RAS, $N \in [RA]$, $M \in [RS]$ et $\dfrac{RN}{RA} = \dfrac{RM}{RS}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AS) sont parallèles.
   c. D'après le résultat précédent, le théorème de Thalès permet d'écrire $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{RN}{RA}$
   d'où $MN = SA \times \dfrac{RN}{RA} = 3,6$ cm.

EXERCICE 578

1. On a $RF = FS - RS = 16,5$ m.
2. Dans le triangle rectangle FPR, on a :
   $\tan\widehat{FPR} = \dfrac{FR}{PR} = \dfrac{16,5}{10} = 1,65$.
   La calculatrice donne $\widehat{FPR} \approx 58,78$ soit 59° au degré près.
3. Dans le triangle FPR rectangle en R d'après le théorème de Pythagore : $PF^2 = PR^2 + RF^2 = 372,25$.
   Donc $PF = \sqrt{372,25} \approx 19,29 < 25$, l'échelle est donc assez longue.

EXERCICE 579

Le point A appartient au cercle de centre O, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc,
donc $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 56°$.
Les points A, B, C et I appartiennent au cercle de centre O, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BIC}$ interceptent le même arc, donc $\widehat{BIC} = \widehat{BAC} = 28°$

EXERCICE 580

$\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60°$
$\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 60°$
$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{CMB} = 120°$

EXERCICE 581

- $\widehat{BCA} = \widehat{BCD} = \widehat{BGD} = 20°$
- $\widehat{CBA} = \widehat{CBF} = \widehat{CEF} = 20°$
- $\widehat{BAC} = 180° - \widehat{BCA} - \widehat{CBA} = 140°$

EXERCICE 582

- $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = 75°$
- $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = 25°$
- $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 80°$

EXERCICE 583

Les points B, D, E et F appartiennent au même cercle, les angles $\widehat{EDF}$ et $\widehat{EBF}$ interceptent le même arc donc $\widehat{EBF} = \widehat{EDF} = 20°$.
On en déduit que $\widehat{EBF} = \widehat{BFC}$, ces deux angles sont alternes-internes, on en déduit alors que (BC) et $FC)$ sont parallèles.

EXERCICE 584

Le triangle circonscrit au cercle est isocèle, on en déduit alors que $\alpha = 180 - 2 \times 66 = 48°$.
Les angles α et β interceptent le même arc, β est un angle au centre, donc $\beta = 2\alpha = 96°$.
Le triangle de sommet O est isocèle (deux côtés sont des rayons du cercle), on en déduit alors que $\gamma = 66 - \dfrac{180 - 96}{2} = 24°$.

EXERCICE 585

$\alpha = \dfrac{1}{2} \times 100 = 50°$

$\gamma = \dfrac{180 - 100}{2} = 40°$

$\beta+\gamma=180-110=70°$ d'où $\beta=70-\gamma=30°$.

EXERCICE 586

Dans le triangle ABC rectangle en A :

$\cos 30° = \dfrac{AB}{BC}$ d'où $AB = BC \times \cos 30° = 3\sqrt{3} \approx 5,2$ cm ;

$\sin 30° = \dfrac{AC}{BC}$ d'où $AC = BC \times \sin 30° = 3$ cm.

Dans le triangle ABH rectangle en H :

$\cos 30° = \dfrac{BH}{AB}$ d'où $BH = AB \times \cos 30° = 4,5$ cm ;

$CH = BC - HB = 1,5$ cm ;

$\sin 30° = \dfrac{AH}{AB}$ d'où $AH = AB \times \sin 30° = 1,5\sqrt{3} \approx 2,6$ cm.

EXERCICE 587

Dans le triangle ABH rectangle en H, $\widehat{HAB} = 45°$, le triangle ABH rectangle, isocèle en H :

donc $AH = BH = 8$ cm ;

$\cos 45° = \dfrac{BH}{AB}$ d'où $AB = \dfrac{BH}{\cos 45°} = 8\sqrt{2} \approx 11,3$ cm.

Dans le triangle ABC rectangle en A, $\widehat{ACB} = 45°$, le triangle ABC est donc isocèle rectangle en A.

On en déduit alors que $AC = AB$ et $HC = HB$.

EXERCICE 588

Dans le triangle ABH rectangle en H :

$\tan 52° = \dfrac{AH}{BH}$ d'où $AH = BH \times tan 52° \approx 3,84$ cm ;

$\cos 52° = \dfrac{BH}{AB}$ d'où $AB = \dfrac{BH}{\cos 52°} \approx 4,87$ cm.

Dans le triangle ABC rectangle en A :

$\tan 52° = \dfrac{AC}{AB}$ d'où $AC = AB \times \tan 52° \approx 6,23$ cm ;

$\cos 52° = \dfrac{AB}{BC}$ d'où $BC = \dfrac{AB}{\cos 52°} \approx 7,91$ cm ;

$CH = BC - BH \approx 4,91$ cm.

EXERCICE 589

$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$	AB	BC	AC
65°	25°	3,38 cm	8 cm	7,25 cm
75°	15°	12 cm	46,36 cm	44,78 cm
51,32°	38,68°	5 cm	8 cm	6,24 cm
51,34°	38,66°	4 cm	6,40 cm	5 cm
11,31°	78,69°	10 cm	10,20 cm	2 cm

EXERCICE 590

$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$	AB	BC	AC
22°	68°	9,90 cm	10,68 cm	4 cm
48°	42°	10,71 cm	16 cm	11,89 cm
60°	30°	5 cm	10 cm	8,66 cm
45°	45°	6 cm	8,49 cm	6 cm
25,20°	64,80°	17 cm	18,79 cm	8 cm

EXERCICE 591

Le triangle ABC est rectangle en B, on a donc les relations trigonométriques : $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$ et $\sin\widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$.

D'où $\left(\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(\sin\widehat{A}\right)^2 = \dfrac{AB^2+BC^2}{AC^2}$.

Or d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Ainsi $\left(\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(\sin\widehat{A}\right)^2 = \dfrac{AC^2}{AC^2} = 1$.

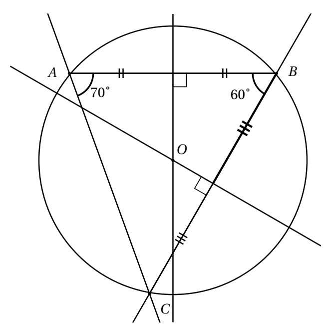
EXERCICE 592

1. $\widehat{BAM} = 25°$.
2. Les points A, B et M appartiennent au cercle, $[AM]$ est un diamètre de ce cercle, le triangle BAM est donc rectangle en B.
3. Dans le triangle ABM, $\cos\widehat{BAM} = \dfrac{AB}{AM}$

   d'où $AM = \dfrac{AB}{\cos\widehat{BAM}} = \dfrac{5}{\cos 25°} = 5,5$ cm à 0,1 près.
4. Les points A, B, C et K appartiennent au cercle (C), les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BKC}$ interceptent le même arc, on en déduit alors que $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = 50°$.

EXERCICE 593

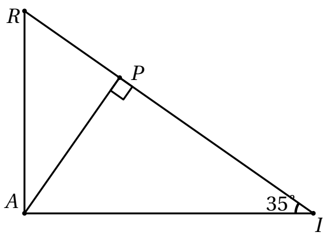
1. et **2.**



3. Le point B appartient au cercle de centre O, les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent le même arc,
donc $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 120°$.

EXERCICE 594

1.



2. **a.** $\tan\widehat{AIR} = \dfrac{AR}{AI}$.
b. $AR = AI \times \tan\widehat{AIR} = 6,5 \times \tan 35° = 4,55$ cm au centième près.

3. Dans le triangle PAI rectangle en P, $\sin\widehat{AIP} = \dfrac{AP}{AI}$
D'où $AP = AI \times \sin\widehat{AIP} = 6,5 \times \sin 35° = 3,73$ cm au centième près.

EXERCICE 595

1. $EURO$ est un losange donc ses diagonales $[OU]$ et $[ER]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu I, ainsi $[EI]$ et $[IU]$ sont perpendiculaires, le triangle EIU est donc rectangle en I.

2. Dans le triangle EIU rectangle en I : $\tan\widehat{IEU} = \dfrac{IU}{IE}$
d'où $IU = EI \times \tan\widehat{EIU} = 5\tan 25° = 2,33$ cm au centième près.

EXERCICE 596

1. Dans le triangle ABD rectangle en B, $\cos\widehat{ADB} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{7}{12}$
d'où $\widehat{ADB} = \arccos\left(\dfrac{7}{12}\right) = 54°$ arrondi au degré.

2. Dans le triangle BCD rectangle en B, $\sin\widehat{BCD} = \dfrac{BD}{CD}$
d'où $CD = \dfrac{BD}{\sin\widehat{BCD}} = \dfrac{7}{\sin 50°} = 9,1$ cm arrondi au dixième.

EXERCICE 597

• Les points A, B, M et M' appartiennent au même cercle, les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AM'B}$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux.

• Les points A, B, N et N' appartiennent au même cercle, les angles $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AN'B}$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux.

• D'autre part dans le triangle BMN,
$\widehat{MBN} = 180° - \widehat{BMA} - \widehat{BNA}$.
Dans le triangle $BM'N'$,
$\widehat{M'BN'} = 180° - \widehat{BM'A} - \widehat{BN'A}$.
Donc d'après la question précédente :
$\widehat{MBN} = 180° - \widehat{BM'A} - \widehat{BN'A} = \widehat{M'BN'}$.

EXERCICE 598

1. Le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = BH^2 + AH^2$
donc $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 15^2 - 9^2 = 144$
d'où $AH = 12$ cm.

2. Dans le triangle ABH rectangle en H,
$\cos\widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{9}{15} = 0,6$
d'où $\widehat{ABH} = \arccos(0,6) = 53°$ arrondi au degré.

3. Les droites (MN) et (BC) sont perpendiculaires à la droite (AH), elles sont donc parallèles.
Nous pouvons appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABH : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MD}{BH}$
donc $MD = BH \times \dfrac{AM}{AB} = 5,4$ cm.

4. $BC^2 = 25^2 = 625$
D'autre part $AB^2 + AC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$.
Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

EXERCICE 599

Dans le triangle BOA rectangle en B : $\tan\widehat{BOA} = \dfrac{AB}{OB}$
donc $AB = OB \times \tan\widehat{BOA} = 66,31$m arrondi au centième.
On en déduit alors que $AC = AB + BC = 68$ m, il s'agit de Notre-Dame de Paris.

EXERCICE 600

1. $MN^2 = 64$ et $ML^2 + LN^2 = 64$.
$ML^2 + LN^2 = MN^2$ donc d'après la réciproque du

théorème de Pythagore, le triangle LMN est rectangle en L.

2. Dans le triangle LMN rectangle en L :
$\cos N = \dfrac{LN}{MN} = 0,8$
donc $\widehat{LNM} = \arccos(0,8) \approx 36,87 = 37°$ au degré près.

3. Dans le rectangle LKN rectangle en K, $\sin N = \dfrac{KL}{LN}$
d'où $KN = LN \times \sin N = 3,84$ cm (en prenant $\widehat{LNM} = 36,87°$).

4. Le triangle RSN est rectangle en R, donc $\sin N = \dfrac{RS}{SN}$
d'où $RS = SN \times \sin N = 1,2$ cm.

EXERCICE 601

1. $Aire(EST) = \dfrac{1}{2} ES \times TH$
d'où $TH = \dfrac{2 \times Aire(EST)}{ES} = 7$ cm.

2. Dans le triangle ETH, rectangle en H,
$\sin \widehat{TES} = \dfrac{TH}{ET} = \dfrac{7}{12}$.
D'où $\widehat{TES} = \arcsin\left(\dfrac{7}{12}\right) = 36°$ arrondi au degré près.

3. Le triangle EST est isocèle en E
donc $\widehat{EST} = \dfrac{180° - \widehat{TES}}{2} = 72°$ arrondi au degré près.

EXERCICE 602

1. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$, le triangle ABC est donc rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore,
$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 23,04$ d'où $AC = 4,8$ cm.

2. $\sin \widehat{CAB} = \dfrac{CB}{AB} = 0,6$ d'où $\widehat{CAB} = \arcsin(0,6) = 37°$
$\widehat{COB} = 2\widehat{CAB} = 74°$ valeurs arrondies à l'unité.

3. Dans le triangle ABC, les droites (BC) et (EF) sont parallèles, le théorème de Thalès permet donc d'écrire : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$.
D'où $AF = AC \times \dfrac{AE}{AB} = 3,6$ cm
et $EF = BC \times \dfrac{AE}{AB} = 2,7$ cm.

EXERCICE 603

1. Dans le triangle ABC rectangle en B,
$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{3}$,
d'où $\widehat{BAC} = \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right) = 53°$ arrondi au degré près.

2. Le triangle ABC est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36$
donc $AC = 6$ cm.
$AC^2 + CD^2 = 100$ et $AD^2 = 100$,
on a donc $AD^2 = AC^2 + CD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est rectangle en C.

3. $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = 0,6$, le triangle ABC est une réduction du triangle ACD, réduction de coefficient 0,6.

EXERCICE 604

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle RNT rectangle en R, on en déduit alors que $RT^2 = NT^2 - RN^2 = 23,04$ donc $RT = 4,8$ cm.

2. $RB = RT - BT = 3,2$ cm
$\dfrac{RA}{RN} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{RB}{RT} = \dfrac{3,2}{4,8} = \dfrac{2}{3}$.
$A \in [RN]$, $B \in [RT]$ et $\dfrac{RA}{RB} = \dfrac{RB}{RT}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et $NT)$ sont parallèles.

3. $\tan \widehat{RNT} = \dfrac{RT}{RN} = \dfrac{4,8}{9}$
donc $\widehat{RNT} = \arctan\left(\dfrac{4,8}{9}\right) = 28°$ au degré près.

EXERCICE 605

1. (AT) tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T, le triangle AOT est donc rectangle en T. On a donc $\tan(29°) = \dfrac{OT}{AT}$
d'où $OT = AT \times \tan(29°) = 5$ cm au millimètre près.

2. Dans le triangle OBT rectangle en T, $\tan(30°) = \dfrac{OT}{BT}$
d'où $BT = \dfrac{OT}{\tan(30°)} = 8,7$ cm au millimètre près.

EXERCICE 606

1. Dans le triangle ABC rectangle en C, $\cos \widehat{B} = \dfrac{BC}{AB}$
donc $BC = AB \times \cos \widehat{B} = 74,71$ m au cm près.

2. $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$ donc $AC = AB \times \sin \widehat{B} = 6,53$ cm (troncature au cm).

EXERCICE 607

1. Le point M appartient au cercle de diamètre $[BC]$, le triangle BMC est donc rectangle en M.
Pour la même raison, le triangle BNC est rectangle

en N.
Le triangle ABC est isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{CBA}$ ou encore $\widehat{MBC} = \widehat{BCN}$.
La somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, on en déduit que $\widehat{CBN} = \widehat{BCM}$.

2. Les angles $\widehat{BCM}$ et $\widehat{BNM}$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux.
3. D'après les questions précédentes, $\widehat{CBN} = \widehat{BNM}$, ces deux angles sont donc alternes internes, on en déduit alors que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

EXERCICE 608

$A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$, $C(1;\ -1)$, $D(-2;\ -1)$ et $E(-2;\ 3)$.

EXERCICE 609

$A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$, $C(2;\ -1)$, $D(-2;\ -1)$ et $E(-2;\ 3)$.

EXERCICE 610

$A(0{,}5;\ 1)$, $B(1;\ 0{,}5)$, $C(0{,}5;\ -0{,}5)$, $D(-1;\ -0{,}5)$ et $E(-1;\ 1{,}5)$.

EXERCICE 611

$A(0;\ 2)$, $B(1;\ 1)$, $C(3;\ -1)$, $D(1;\ -1)$ et $E(-3;\ 3)$.

EXERCICE 612

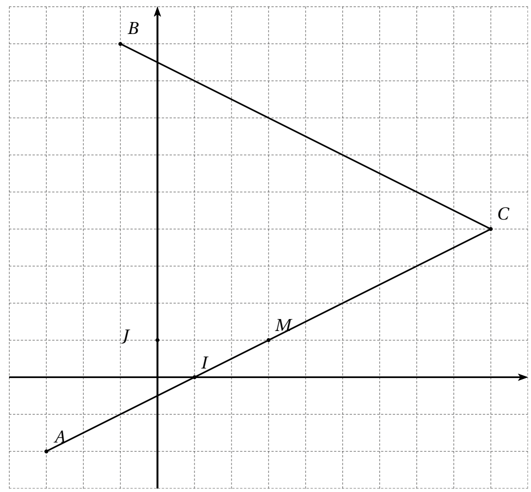
1. Dans le repère $(A; B, D)$:
$A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 1)$, $D(0;\ 1)$, $O(0{,}5;\ 0{,}5)$, $E(1;\ 0{,}25)$ et $F(0{,}75;\ 1)$.
2. Dans le repère $(O; B, C)$:
$A(0;\ -1)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$, $D(-1;\ 0)$, $O(0;\ 0)$, $E(0{,}75;\ 0{,}25)$ et $F(-0{,}25;\ 0{,}75)$.

EXERCICE 613

1. Dans le repère $(A; B, D)$:
$A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 1)$, $D(0;\ 1)$, $O(0{,}5;\ 0{,}5)$, $E(1;\ 0{,}25)$ et $F(0{,}75;\ 1)$.
2. Dans le repère $(O; C, D)$:
$A(-1;\ 0)$, $B(0;\ -1)$, $C(1;\ 0)$, $D(0;\ 1)$, $O(0;\ 0)$, $E(0{,}25;\ -0{,}75)$ et $F(0{,}75;\ 0{,}25)$.

EXERCICE 614

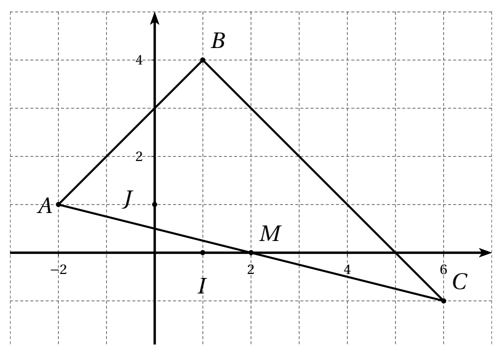
1.



2. $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 3$ et $y_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 1$, ainsi M est de coordonnées $(3;\ 1)$.
3. $BC = \sqrt{\left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{10^2 + 5^2}$
$BC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

EXERCICE 615

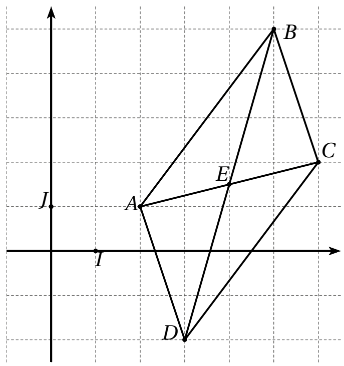
1.



2. $AB = \sqrt{(1+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{3}$
$AC = \sqrt{(6+2)^1 + (-1-1)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$
$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
3. D'après les résultats précédents, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
4. $x_M = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ et $y_M = \dfrac{1-1}{2} = 0$, les coordonnées du point M sont donc $(2;\ 0)$.

EXERCICE 616

1.



2. $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$ cm.

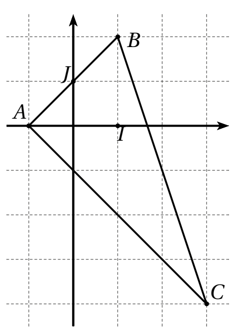
3. Voir figure précédente.

4. D'après la figure $D(3;\ -2)$.

5. Le centre du parallélogramme est aussi le milieu de la diagonale $[AC]$. Notons E ce point.
$x_E = \dfrac{2+6}{2} = 4$ et $y_E = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$, ainsi $E(4;\ 1{,}5)$.

EXERCICE 617

1.

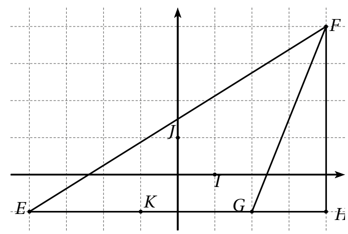


2. $AB = \sqrt{(1+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$
$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{32}$
$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40}$.

3. D'après les résultats précédents, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est donc rectangle en A.

EXERCICE 618

1.

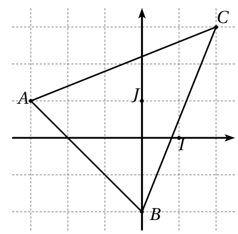


2. $x_K = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $y_K = \dfrac{-1-1}{2} = -1$ donc $K(-1\ ;\ -1)$.

3. $EG = \sqrt{(2+4)^2 + (-1+1)^2} = 6$ cm, on en déduit alors :
$aire(EFG) = \dfrac{EG \times FH}{2} = 15\ \text{cm}^2$.

EXERCICE 619

1.

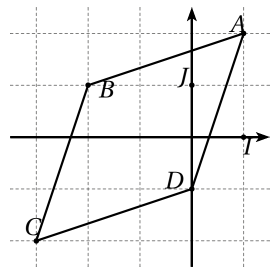


2. $AC = \sqrt{(2+3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$;
$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{29}$.

3. D'après les résultats précédents, $AC = BC$, le triangle ABC est donc isocèle en C.

EXERCICE 620

1.

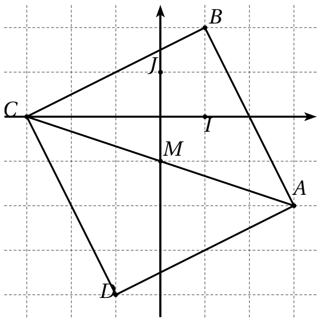


2. $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$;
$BC = \sqrt{(-3+2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$.

3. $AD = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$;
$CD = \sqrt{(0+3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{10}$.
4. D'après les résultats précédents :
$AB = BC = CD = AD$, $ABCD$ est donc un losange.

EXERCICE 621

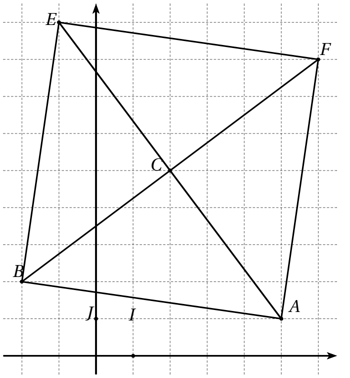
1.



2. $AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
3. **a.** $BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
$BC = AB$, le triangle ABC est isocèle en B.
b. $AC = \sqrt{(-3-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$;
d'après les résultats précédents, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B, il est donc isocèle rectangle en B.
4. $x_M = \dfrac{3-3}{2} = 0$ et $y_M = \dfrac{-2+0}{2} = -1$ donc $M(0\ ;\ -1)$.
5. Soit x et y les coordonnées de D, M est le milieu du segment $[BD]$ donc $\dfrac{1+x}{2} = 0$ et $\dfrac{2+y}{2} = -1$ on en déduit alors que $x = -1$ et $y = -4$, donc $D(-1\ ;\ -4)$.
6. M est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, $ABCD$ est donc un parallélogramme.
7. Le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés adjacents de même longueur et un angle droit, c'est donc un carré.

EXERCICE 622

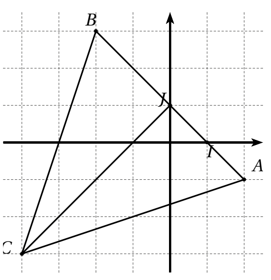
1.



2. **a.** $AB = \sqrt{(-2-5)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$BC = \sqrt{(2+2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{25} = 5$.
b. D'après les résultats précédents, $BC = AC$ et $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est isocèle rectangle en C.
3. **a.** Voir graphique.
b. Par construction, C est le milieu des diagonales $[AE]$ et $[BF]$, $ABEF$ est donc un parallélogramme, ayant deux côtés adjacents de même longueur et un angle droit, $ABEF$ est donc un carré.

EXERCICE 623

1.

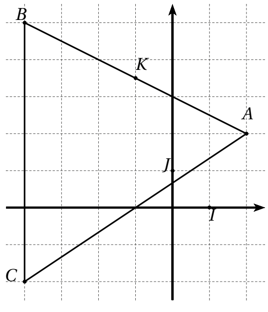


2. **a.** $AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$BC = \sqrt{(-4+2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
b. $AC = BC$, le triangle ABC est isocèle en C.
3. $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0$ et $\dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, J est donc le milieu de $[AB]$.
4. J est le milieu du côté $[AB]$, (CJ) est donc la médiane issue du sommet C, le triangle ABC étant isocèle en

C, on en déduit que la médiane (CJ) et aussi médiatrice du segment $[AB]$.

EXERCICE 624

1.



2. a. $AC = \sqrt{(-4-2)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{52}$

b. $BC = \sqrt{(-4+4)^2+(5+2)^2} = \sqrt{49}$.

c. $AC \neq BC$, le triangle ABC est n'est pas isocèle en C.

3. a. $\dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $\dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2+5}{2} = 3{,}5$, donc $K(-1\ ;\ 3{,}5)$.

b. K est le milieu du côté $[AB]$, (CJ) est donc la médiane issue du sommet C, le triangle ABC n'étant pas isocèle en C, on en déduit que (CJ) n'est pas médiatrice du segment $[AB]$.

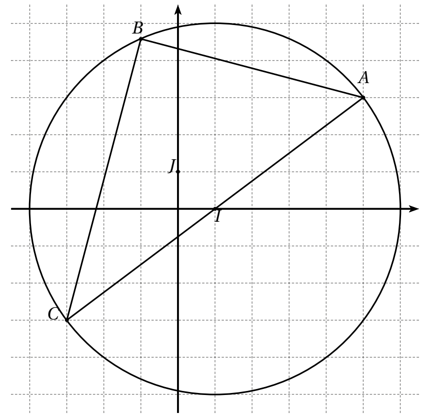
EXERCICE 625

1. $A(3\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ 2)$, $C(-6\ ;\ -3)$ et $D(-1\ ;\ -3)$.
2. $BC = \sqrt{(-6+2)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{41}$.
3. $E(-1{,}5\ ;\ -0{,}5)$.
4. Déterminons les coordonnées du segment $[AC]$: $\dfrac{x_A+x_C}{2} = -1{,}5$ et $\dfrac{y_A+y_C}{2} = -0{,}5$, il s'agit des coordonnées du point E.

   E est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE 626

1. a.



b. $IA = \sqrt{(5-1)^2+(3-0)^2} = 5$ cm.

2. a. $IB = \sqrt{(-1-1)^2+21} = 5$ cm.

$IA = IB = 5$ cm, les points A et I sont donc sur le cercle de centre I et de rayon 5 cm.

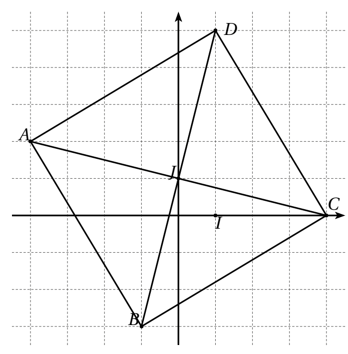
b. Voir la figure.

3. a. Voir la figure.

b. Par construction, le point C appartient au cercle de centre I et de rayon 5 et $[AC]$ est un diamètre du cercle, le point B appartenant aussi au cercle, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 627

1.

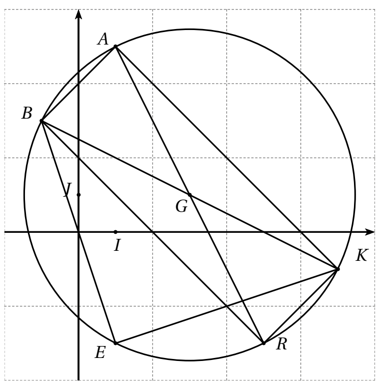


2. $AB\sqrt{34}$, $BC = \sqrt{34}$ et $AC = \sqrt{68}$.
3. D'après les résultats précédents : $AB = BC$ et $AC^2 = AB^2+BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

4. On vérifie par le calcul que J est le milieu de $[AC]$, $ABCD$ est un parallélogramme si J est aussi le milieu de $[BD]$.
On a alors $\dfrac{x_D - 1}{2} = 0$ et $\dfrac{y_D - 3}{2} = 1$ d'où $x_D = 1$ et $y_D = 5$.
5. $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés adjacents de même longueur, $ABCD$ est donc un carré.

EXERCICE 628

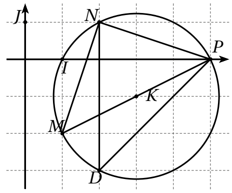
1.



2. $x_G = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ et $y_G = \dfrac{3-1}{2} = 1$.
3. Par lecture graphique : $R(5\,;\,-3)$.
4. $BK = \sqrt{(7+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm.
5. Les diagonales du quadrilatère $ABRK$ ont même longueur et se coupent en leur milieu, $ABRK$ est donc un rectangle.
6. $GB = \dfrac{1}{2}BK = 2\sqrt{5}$.
7. $GE = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
$GE = GB$, le point E appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.
8. Le triangle BKE est inscrit dans $\mathcal{C}$ et $[BK]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, on en déduit que le triangle BKE est rectangle en E.

EXERCICE 629

1.



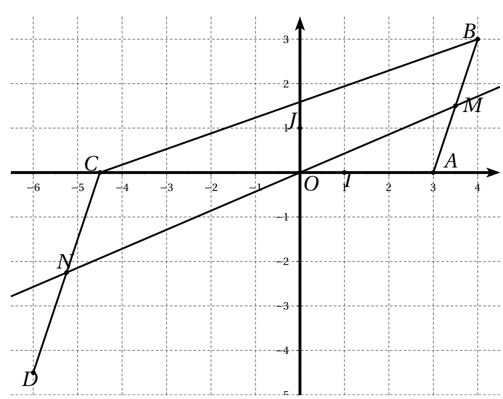
2. $MN = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$ cm
$NP = \sqrt{(5-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$ cm
$MP = \sqrt{(5-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm.
3. D'après les résultats précédents, $MN = NP$ et $MP^2 = MN^2 + NP^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle et isocèle en N.
4. **a.** Le triangle MNP est rectangle donc le centre du cercle circonscrit K est le milieu du l'hypoténuse $[MP]$ donc $K(3\,;\,-1)$.
b. $r = \dfrac{1}{2}MP = \sqrt{5}$ cm.
5. Le triangle MNP est isocèle rectangle en N donc $\widehat{NMP} = 45°$.
Les points M, N, P et D appartiennent au cercle (Γ) et les angles $\widehat{NDP}$ et $\widehat{NMP}$ interceptent le même arc ils sont donc égaux, ainsi $\widehat{NDP} = \widehat{NMP} = 45°$.

EXERCICE 630

1. $AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
2. $AC^2 = BC^2 + AB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
3. $aire(ABC) = \dfrac{1}{2}AB \times BC = 30\ \text{cm}^2$.
4. **a.** Le triangle ABC est rectangle en B, le cercle circonscrit au triangle ABC est donc de centre le milieu de l'hypoténuse $[AC]$ et de rayon $r = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$.
b. $x_K = \dfrac{6-4}{2} = 1$ et $y_K = \dfrac{5+0}{2} = 2{,}5$.

EXERCICE 631

1.



2. $AC = 7{,}5$ cm et $OC = 4{,}5$ cm
$OB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ cm
$OD = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm.
3. $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{5}{7{,}5} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{3}{4{,}5} = \dfrac{2}{3}$.
Les points d'une part A, O et C, d'autre part B, O et D sont alignés dans cet ordre et $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OA}{OC}$, on en déduit d'après la réciproque du théorème de Thalès que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
4. $x_M = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$ et $y_M = \dfrac{0+3}{2} = 1{,}5$, soit $M(3{,}5\ ;\ 1{,}5)$.
5. Dans le premier cas, on utilise les triangles OAM et OCN en configuration papillon.
Dans le deuxième cas, on utilise les triangles OAB et OCD en configuration papillon.
6. Des égalités précédentes, on déduit $\dfrac{CN}{AM} = \dfrac{CD}{AB}$
d'autre part $AB = 2AM$ on en déduit alors que
$CN = \dfrac{1}{2}CD$.
Le point N est le milieu du segment $[CD]$.

EXERCICE 632
$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

EXERCICE 633
$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0{,}5\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

EXERCICE 634
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 635
1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG}$
2. $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AT}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ impossible
4. $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA}$
5. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{GT} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FT}$.

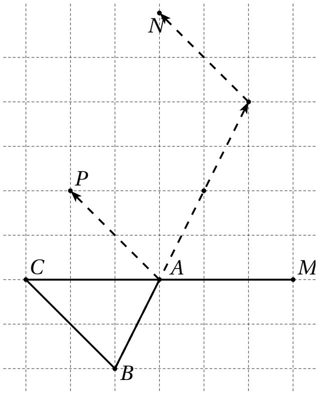
EXERCICE 636
1. $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{II} = \overrightarrow{0}$
3. $\overrightarrow{u_3} = 2\overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{0}$

EXERCICE 637
1. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HI}$.
2. $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$,
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{IF}$.

EXERCICE 638
1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$
2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LJ}$
3. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$
6. $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SR}$.

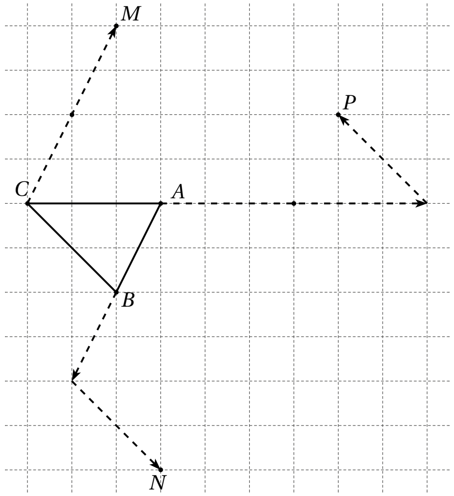
EXERCICE 639
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AN}$
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND}$
$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$

EXERCICE 640
1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$
d'où $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$
d'où $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.



EXERCICE 641
1. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$
d'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
d'où $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
3. $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AC}$
d'où $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.



EXERCICE 642

1. $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. $\vec{u} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$
d'où $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
5. $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB}$
d'où $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
6. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA}$
d'où $\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 643

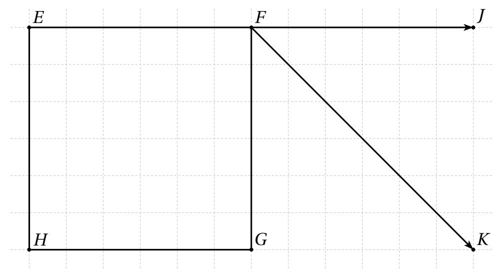
1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$.
2. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{82}$
$\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{52}$.

EXERCICE 644

1. $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-8\\-7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}-1\\-12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$.
2. $\left\|\overrightarrow{GE}\right\| = \sqrt{113}$
$\left\|\overrightarrow{GF}\right\| = \sqrt{145}$
$\left\|\overrightarrow{FE}\right\| = \sqrt{74}$.

EXERCICE 645

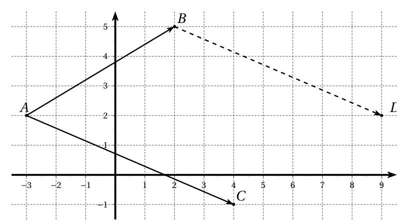
1.



2. F est le milieu de $[EJ]$ ou encore J est le symétrique de E par rapport à F.
3. $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FJ}$, $FJKG$ est un parallélogramme.

EXERCICE 646

1.



2. $ABDC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 647

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\begin{cases} x-3=-4 \\ y-4=8 \end{cases}$

On en déduit alors que $x=-1$ et $y=12$.

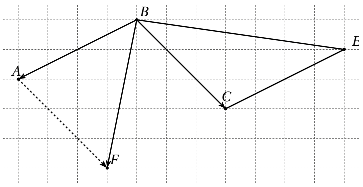
2. On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\begin{cases} 2(x-3)=-2 \\ 2(y-4)=5 \end{cases}$

On en déduit alors que $x=2$ et $y=6{,}5$.

EXERCICE 648

1.



2.a. Voir figure.

b. $ABCF$ est un parallélogramme.

3. $ABEC$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.

$ABCF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}$

On en déduit alors que $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE}$, C est le milieu de $[EF]$.

EXERCICE 649

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE 650

1. Supposons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.
2. Supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
3. Supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
4. Il y a équivalence entre les égalités $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 651

1. $A(-2\,;\,-2)$, $B(2\,;\,-4)$ et $C(3\,;\,3)$.
2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. D'après le résultat précédent, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, le quadrilatère $ABDC$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE 652

1. **a.** $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

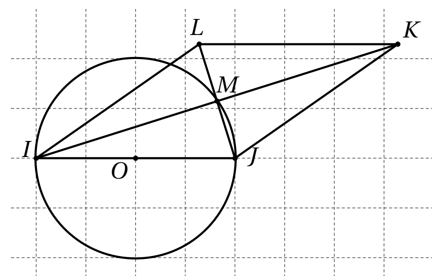
   b. D'après le résultat précédent $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$, le quadrilatère $OABC$ est donc un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$ et
   $\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.
   $OABC$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueurs, $OABC$ est donc un losange.

EXERCICE 653

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
   $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,
   $3\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. D'après les résultats précédents, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ est donc un parallélogramme.
3. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
   $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
4. $ABCD$ est un parallélogramme ayant deux côtés adjacents de même longueur, $ABCD$ est donc un losange.

EXERCICE 654

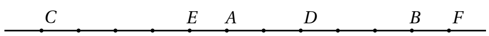
1.



2. Les points I, J et M appartiennent au cercle de diamètre $[IJ]$, le triangle IJM est donc rectangle en M, soit encore $\widehat{IMJ} = 90°$.
3. Voir figure.
4. Voir figure.

5. $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JK}$, le quadrilatère $IJKL$ est donc un parallélogramme. De plus les diagonales $[LJ]$ et $[IK]$ sont perpendiculaires, $IJKL$ est donc un losange.

EXERCICE 655



EXERCICE 656

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{DY} + \overrightarrow{YC}\\ &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{DY} - \overrightarrow{CY}\\ &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{DY}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JY} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

I milieu de $[XD]$ donc $\overrightarrow{XI} = -\overrightarrow{DI}$

J milieu de $[YC]$ donc $\overrightarrow{JY} = -\overrightarrow{JC}$

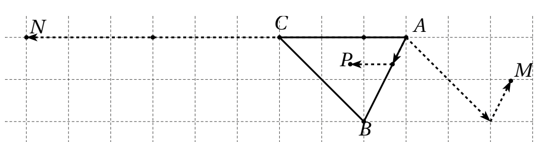
On en déduit alors que $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

EXERCICE 657

1. On applique la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{MB}$:
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$
donc $2\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$
d'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

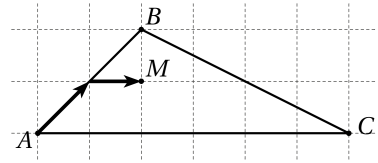
2. On applique la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{NC}$:
$\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$
donc $-\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AC}$
d'où $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.

3. On applique la relation de Chasles aux vecteurs $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$:
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$
donc $3\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
d'où $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



EXERCICE 658

On applique la relation de Chasles aux vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$:
$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$
donc $6\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
d'où $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.



EXERCICE 659

Soit $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point G. On a alors $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-2-x\\5-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-3-x\\-4-y\end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases}1-x-2-x-3-x=0\\2-y+5-y-4-y=0\end{cases}$

On en déduit alors que $x = -\frac{4}{3}$ et $y = 1$, donc $G\left(-\frac{4}{3}\ ;\ 1\right)$

☞ Nous venons de déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 660

1. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, les deux vecteurs sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont pas colinéaires.
3. $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{KL}$, les deux vecteurs sont colinéaires.
4. $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires.
5. $\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$, les deux vecteurs sont colinéaires.
6. $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires.

EXERCICE 661

1. $\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{v}$
2. $\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{v}$
3. $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$
4. $\overrightarrow{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{v}$
5. $\overrightarrow{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{v}$
6. $\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{v}$

EXERCICE 662

$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{v}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 663

$\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{u}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 664

1. $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$
3. $\overrightarrow{v} = -7\overrightarrow{u}$
4. $\overrightarrow{u} = -\sqrt{2}\overrightarrow{u}$
5. $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{u}$
6. $\overrightarrow{v} = -2{,}1\overrightarrow{u}$

EXERCICE 665

1. $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2,$

les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}=3\times3-1\times1=8,$

les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3. $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}\sqrt{2}&1\\2&\sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})-2\times1=0,$

les deux vecteurs sont colinéaires.

4. $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}7&3\\-5&-2\end{vmatrix}=7\times(-2)-(-5)\times3=1,$

les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

5. $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}0,3&-1\\5,1&-17\end{vmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=0,3\times(-17)-5,1\times(-1)=0$, les deux vecteurs sont colinéaires.

6. $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}5&-2\\-3,5&1,4\end{vmatrix}$

$$=5\times1,4-(-3,2)\times(-2)=0,$$

les deux vecteurs sont colinéaires.

EXERCICE 666

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$.

2. $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}3&-6\\2&-4\end{vmatrix}=3\times(-4)-(-6)\times2=0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 667

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$.

$\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}\frac{7}{2}&6\\\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}-6\times\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{IJ}\ ;\ \overrightarrow{JK}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{7}{2}&-7\\-\frac{3}{2}&-3\end{vmatrix}$

$$=-\frac{7}{2}\times(-3)-(-7)\times\left(\frac{3}{2}\right)=0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires, les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 668

1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires, les points B, C et E sont donc alignés.

2. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, les droites (AD) et $BC)$ sont donc parallèles.

EXERCICE 669

D'après l'énoncé, $\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}=\frac{7}{3}\overrightarrow{AQ}$ ou encore $\overrightarrow{AP}=\frac{28}{3}\overrightarrow{AQ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont colinéaires, les points A, P et Q sont donc alignés.

EXERCICE 670

D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AP}=-2\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-2\overrightarrow{AQ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont colinéaires, les points A, P et Q sont donc alignés.

EXERCICE 671

1. Graphique en fin d'exercice.

2. $ABDC$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

d'autre part $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x+4\\y+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

On en déduit alors que $x+4=4$ et $y+3=-2$, les coordonnées du point D sont donc $x=0$ et $y=-5$.

3. I est le milieu de la diagonale $[AC]$ donc $x_I=-\frac{1}{2}$ et $y_I=-1$.

4. **a.** $6\overrightarrow{BM}=4\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}+7\overrightarrow{CB}$ donc

$6\overrightarrow{BM}=-4\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$

d'où $\overrightarrow{BM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

b. Voir la figure.

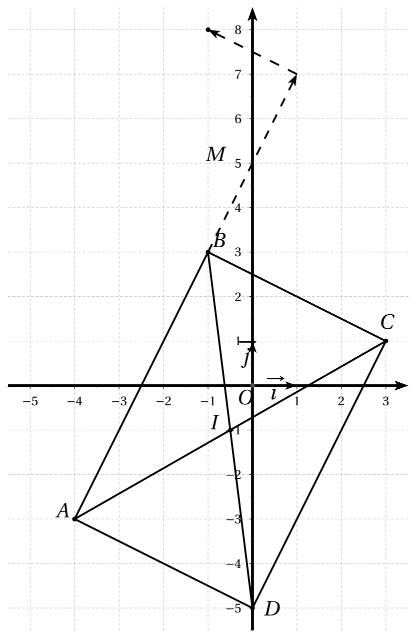
c. Soit x et y les coordonnées de $\overrightarrow{BM}$,

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\begin{cases} x+1=2-2 \\ y-3=4+1 \end{cases}$ donc $x=-1$ et $y=8$.

5. $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}-1\\13\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{DI}\ ;\ \overrightarrow{DM}\right) = -\frac{13}{2}+4 = -\frac{5}{2} \neq 0$, les points D, I et M ne sont pas alignés.



Exercice 672

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\5-y_D\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\begin{cases} 6=1-x_D \\ -4=5-y_D \end{cases}$

On en déduit que $x_D=-5$ et $y_D=9$.

2. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-3\\y_E+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\begin{cases} x_E-3=2 \\ y_E+1=1 \end{cases}$

On en déduit que $x_E=5$ et $y_E=0$.

3. $ABCF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}x_F-1\\y_F-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$ si et seulement si $\begin{cases} x_F-1=-6 \\ y_F-5=4 \end{cases}$

On en déduit que $x_F=-5$ et $y_F=9$.

Exercice 673

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D+2\\y_D-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\begin{cases} -3=x_D+2 \\ -4=y_D-5 \end{cases}$

On en déduit que $x_D=-5$ et $y_D=1$.

2. $ABCE$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E+2\\y_E-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ si et seulement si $\begin{cases} x_E+2=3 \\ y_E-5=4 \end{cases}$

On en déduit que $x_E=1$ et $y_E=9$.

3. $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F-1\\y_F-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x_F+2\\y_F+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}x_F+2\\y_F-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\begin{cases} 3x_F+3=0 \\ 3y_F-7=0 \end{cases}$

On en déduit que $x_F=-1$ et $y_F=\frac{7}{3}$.

Exercice 674

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ avec x et y d'une part, x' et y' d'autre part, non simultanément nuls.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

On en déduit alors que $\begin{cases} x'=\lambda x \\ y'=\lambda y \end{cases}$ donc :

- Si $x=0$ alors par hypothèse $y\neq 0$ on en déduit que $x'=0$ et $\frac{y'}{y}=\lambda$.
- Si $y=0$ alors par hypothèse $x\neq 0$ on en déduit que $y'=0$ et $\frac{x'}{x}=\lambda$.
- Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$ alors $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$ on en déduit alors que $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\lambda$.

Réciproquement supposons que $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$ on pose alors

$\lambda = \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ donc $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$ donc $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 675

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ avec x et y d'une part, x' et y' d'autre part, non simultanément nuls.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

On en déduit alors que :

$$\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right) = \begin{vmatrix} x & \lambda x \\ y & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda xy - \lambda xy = 0.$$

Réciproquement si $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right) = 0$ alors $xy' - x'y = 0$ on en déduit que :

• Si $x = y = 0$ alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ il est donc colinéaire à tous les vecteurs donc à $\overrightarrow{v}$.

• Si $x = 0$ comme par hypothèse $y \neq 0$ alors $x' = 0$ et donc $y' \neq 0$.

• Si $y = 0$ comme par hypothèse $x \neq 0$ alors $y' = 0$ et donc $x' \neq 0$.

• Si $x' = 0$ comme par hypothèse $y' \neq 0$ alors $x = 0$ et donc $y \neq 0$.

• Si $y' = 0$ comme par hypothèse $x' \neq 0$ alors $y = 0$ et donc $x \neq 0$.

Dans ces quatre cas, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

• Si x, y, x' et y' sont tous non nuls alors $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$ donc d'après le résultat de l'exercice précédent, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 676

• Supposons les droites (AB) et $CD)$ parallèles, ces deux droites ont donc un vecteur directeur commun, notons le $\overrightarrow{u}$.

Les points A et B appartiennent à la droite (AB), il existe donc un réel $a \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{u}$.

Les points C et D appartiennent à la droite (CD), il existe donc un réel $b \neq 0$ tel que $\overrightarrow{CD} = b\overrightarrow{u}$.

On en déduit alors que $a\overrightarrow{CD} = b\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{CD} = \dfrac{b}{a}\overrightarrow{AB}$, les vecteurs sont donc colinéaires.

• Supposons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires. Il existe donc un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{CD}$, vecteur directeur de la droite (CD) est donc aussi vecteur directeur de la droite (AB), les deux droites ont un même vecteur directeur, elles sont donc parallèles.

EXERCICE 677

• Supposons A, B et C alignés, deux à deux distincts, alors le point C appartient à la droite (AB) on en déduit alors qu'il existe un réel λ non nul tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

• Réciproquement, supposons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, on a donc $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec λ réel non nul, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), il est aussi un vecteur directeur de la droite (AC), les droites (AB) et (AC) sont donc parallèles, elles ont le point A en commun. Les droites (AB) et (AC) sont donc confondues, les points A, B et C appartiennent à la même droite, ils sont donc alignés.

EXERCICE 678

1.
```
def coord(A , B) :
    x=B[0]-A[0]
    y=B[1]-A[1]
    return [x , y]
```

2.
```
def determinant(A , B , C) :
    V1=coord(A , B)
    V2=coord(A , C)
    det=V1[0]*V2[1]-V[1[1]*V2[0]
    return det
```

3.
```
def aligne(A , B , C) :
    D=determinant(A , B , C)
    if D=0 :
        print("Les points A, B et C sont alignés")
    else :
        print("Les points A, B et C ne sont pas alignés")
```

EXERCICE 679

1.
```
def coord(A , B) :
    x=B[0]-A[0]
    y=B[1]-A[1]
    return [x , y]
```

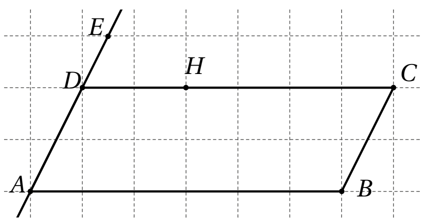
2.
```
def determinant(A , B , C ,D) :
    V1=coord(A , B)
    V2=coord(C , D)
```

det=V1[0]*V2[1]-V[1[1]*V2[0]
return det

3. def colinearite(A , B , C , D) :
D=determinant(A , B , C ,D)
if D=0 :
print("Les vecteurs AB et CD sont colinéaires")
else :
print("Les vecteurs AB et CD ne sont pas colinéaires")

EXERCICE 680

1.



2. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$.

3. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$
$= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

4. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$
$= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$
$= \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

5. $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BH}$, les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, les points E, H et B sont donc alignés.

EXERCICE 681

1. $\vec{u} = -4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$
$\vec{v} = -5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

2. $\vec{u} = 2\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

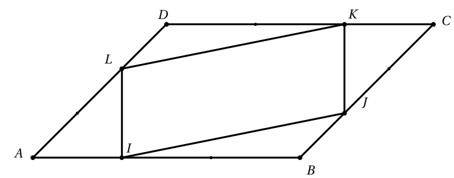
EXERCICE 682

1. En appliquant la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{MN}$, nous obtenons :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$
$= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$
$= 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.

2. En appliquant la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{NP}$, nous obtenons :
$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}$
$= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC}$
$= 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$
$= 2\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{AB}$
Les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

EXERCICE 683

1.



2. Les points A, B et D ne sont pas alignés, $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est donc un repère du plan.

3. $I\left(\frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(1 ; \frac{1}{3}\right)$, $K\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$, et $L\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$,

4. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

5. D'après le résultat précédent, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, on en déduit que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

EXERCICE 684

1. a. Les droites (IJ) et (BK) sont parallèles, on peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABK, on obtient $\frac{AI}{AK} = \frac{AJ}{AB}$
donc $AI = \frac{AJ}{AB} \times AK = \frac{2}{3}AK$.
Les points A, I et K sont alignés dans cet ordre, on en déduit alors que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.

b. On a $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ soit en appliquant la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IK}$ d'où $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IK}$.
D'autre part I est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$
On en déduit alors que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.

c. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$ donc K est le milieu du segment $[IC]$.

2. Il suffit d'appliquer le théorème des milieux dans le triangle ICD.

EXERCICE 685

Les points A, B et D ne sont pas alignés, $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$ défini donc un repère du plan.

Dans ce repère, on a $H(1\ ;\ -a)$, $G(1+a\ ;\ 1)$, $F(0\ ;\ 1+a)$ et $E(-a\ ;\ 0)$.

On en déduit alors $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}1+a\\-a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}1+a\\-a\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont égaux, le quadrilatère $AFGH$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE 686

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans un triangle équilatéral de côté 1, on démontre que la longueur des hauteurs est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit alors les coordonnées des points : $E\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et $D(0\ ;\ 1)$.

D'où $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

$\det\left(\overrightarrow{DF}\ ;\ \overrightarrow{ED}\right)=0$, les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires, les points E, D et F sont alignés.

EXERCICE 687

Méthode 1 : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$, le quadrilatère $ABDC$ est donc un parallélogramme.

$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BC}$, le quadrilatère $AEBC$ est donc un parallélogramme, on en déduit alors que $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, les points E, B et D sont donc alignés.

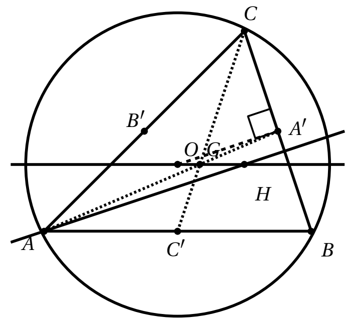
Méthode 2 : On applique la relation de Chasles dans le vecteur $\overrightarrow{ED}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\\&=2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, les points E, B et D sont donc alignés.

EXERCICE 688

1. a.



b. $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}\end{aligned}$$

or A' milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B}=-\overrightarrow{A'C}$

On en déduit alors que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

c. (OA') est perpendiculaire à (BC) et (OA') est parallèle à (AH) donc (AH) est perpendiculaire à (BC).

d. La droite (AH) passe par le sommet A et est perpendiculaire au côté $[BC]$, (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

e. On obtient de la même manière :

$\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{OB'}$, la droite (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC

$\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{OC'}$, la droite (CH) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

f. Les trois hauteurs sont concourantes en H.

2. a. • Démontrons que $\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{B'G}$.

Soit N le symétrique de G par rapport à B' et M le symétrique de G par rapport à A'.

B' est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[GN]$ donc $ANCG$ est un parallélogramme.

A' est le milieu des diagonales $[GM]$ et $[BC]$ donc $BMCG$ est un parallélogramme.

$ANCG$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CM}$

$BMCG$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{CM}$

On en déduit alors que $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{NG}$ or B' milieu de $[NG]$ donc $\overrightarrow{NG}=2\overrightarrow{B'G}$

Ainsi $\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{B'G}$.

• Utilisons la relation de Chasles dans $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GC}$:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'C}$

or B' milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{B'A} = -\overrightarrow{B'C}$ d'où $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Ainsi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

En appliquant la relation de Chasles :

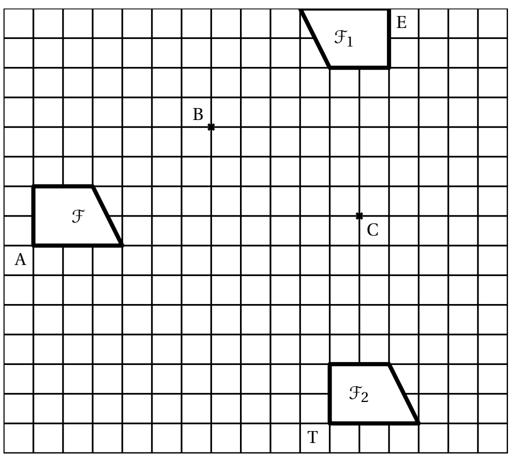
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$

or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires, les points O, G et H sont donc alignés.

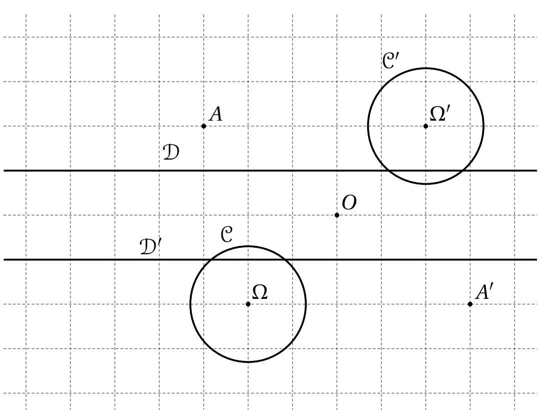
EXERCICE 689

1. **a.** et **b.**



2. On passe de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}_2$ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 690

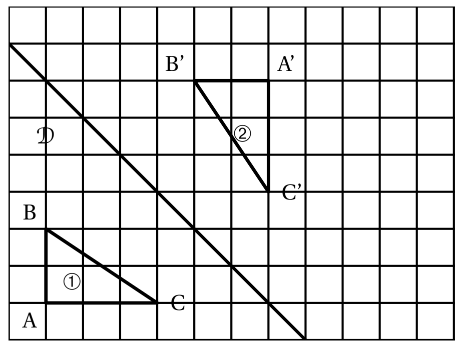


On commence par déterminer O le centre de la symétrie, milieu du segment $[AA']$.

Pour déterminer l'image de $\mathcal{D}$, il suffit de construire l'image de deux points de la droite.

Pour déterminer l'image de $\mathcal{C}$, il suffit de construire l'image du centre Ω et celle d'un point de $\mathcal{C}$.

EXERCICE 691

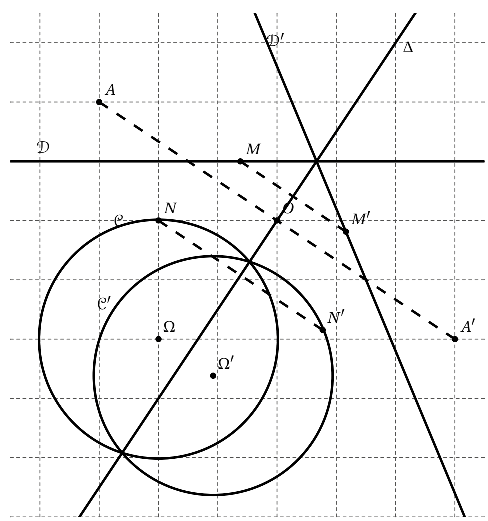


EXERCICE 692

On commence par déterminer l'axe de symétrie Δ, médiatrice du segment $[AA']$.

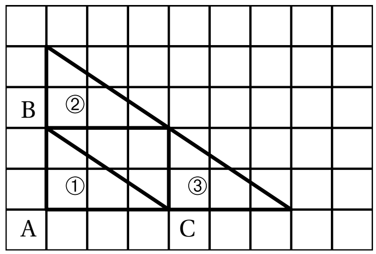
Pour déterminer l'image de $\mathcal{D}$, il suffit de construire l'image d'un point de la droite, car le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ est image de lui-même.

Pour déterminer l'image de $\mathcal{C}$, il suffit de construire l'image du centre Ω et celle d'un point de $\mathcal{C}$.



Exercice 693

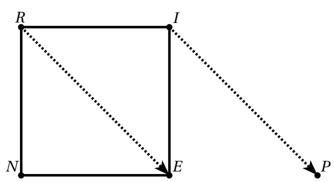
1. a et **b.**



2. La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ permet de passer directement de la figure ① à la figure ③.

Exercice 694

1.

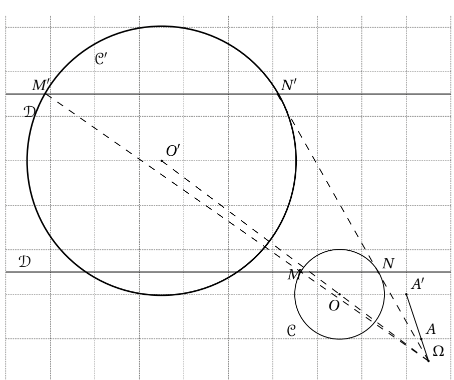


2. $\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{RI}$

$\overrightarrow{NR} + \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{NE}$

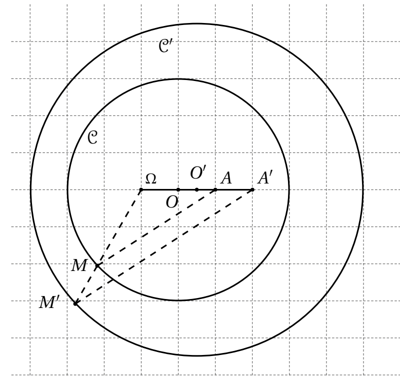
$\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RI} = \overrightarrow{RE}$.

Exercice 695

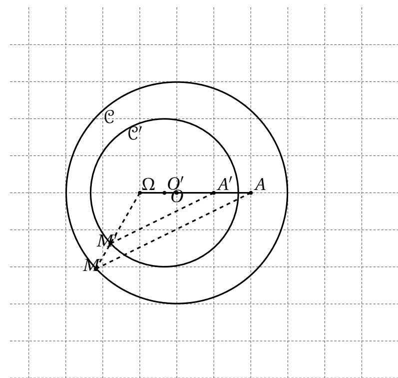


Exercice 696

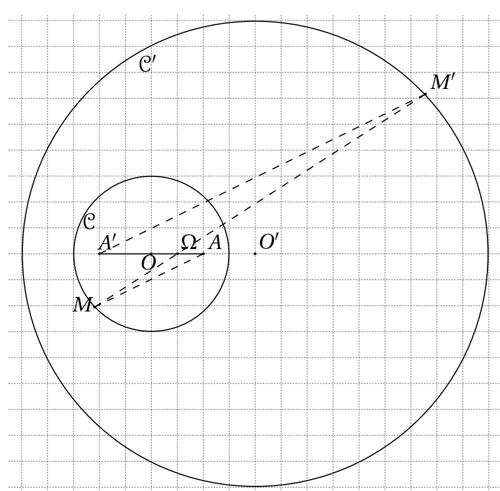
Cas 1 : $2\overrightarrow{\Omega A'} = 3\overrightarrow{\Omega A}$ donc $k = \dfrac{\Omega A'}{\Omega A} = \dfrac{3}{2}$



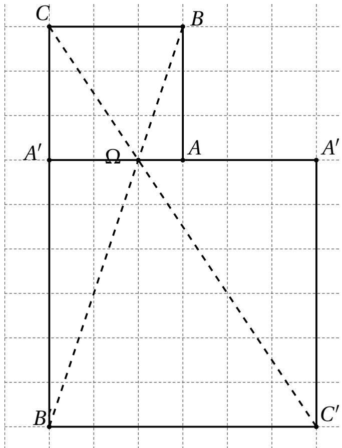
Cas 2 : $3\overrightarrow{\Omega A'} = 2\overrightarrow{\Omega A}$ donc $k = \dfrac{2}{3}$



Cas 3 : $\overrightarrow{\Omega A'} = -3\overrightarrow{\Omega M}$ donc $k = -3$.

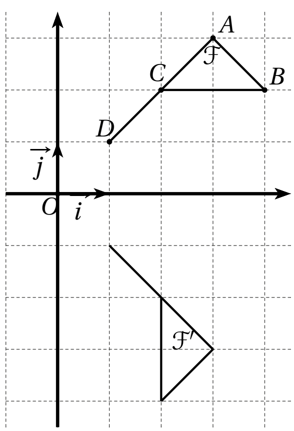


Cas 4 : $\overrightarrow{\Omega A'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ donc $k = -2$.

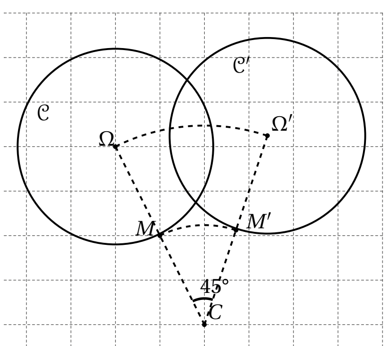


EXERCICE 697

1. 2. et **3.**



EXERCICE 698

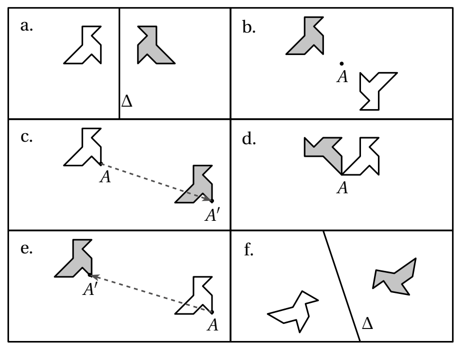


EXERCICE 699

1. Notons s la symétrie d'axe (OD). On a alors $s(O) = O$, $s(D) = D$, $s(M) = C$ et $s(B) = N$.
Le quadrilatère $ODMB$ devient le quadrilatère $ODCN$.

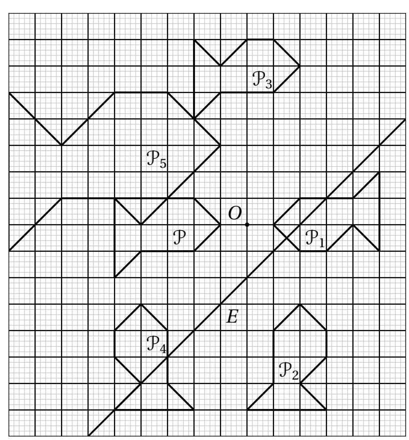
2. Notons t la translation de vecteur $\overrightarrow{AN}$. On a alors $t(N) = C$, $t(O) = D$ et $t(B) = M$.
Le triangle NOB devient le triangle CDM.

EXERCICE 700



a. Symétrie d'axe Δ.
b. Symétrie de centre A.
c. Translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
d. Rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
e. Translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
f. Symétrie d'axe Δ.

EXERCICE 701

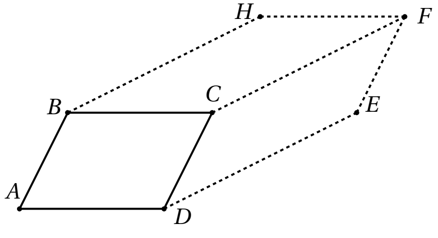


EXERCICE 702

1. T devient L.
2. T devient U.
3. T devient G.
4. U devient H.

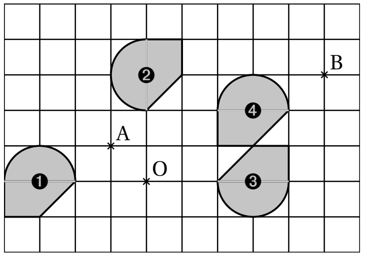
EXERCICE 703

1.

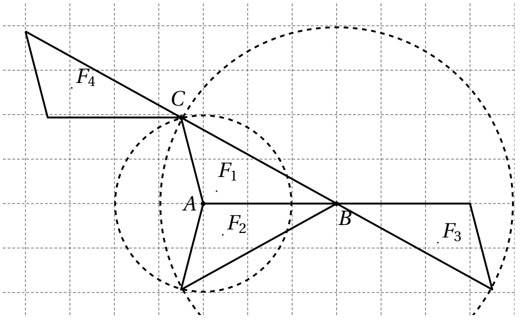


2. $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et par hypothèse $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$, $DCFE$ est donc un parallélogramme.
3. Voir graphique.
4. • Par hypothèse $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ donc $ACED$ est un parallélogramme, on en déduit alors que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$.
$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
On en déduit alors que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$, les points B, C et E sont alignés.
• $BCFH$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HF}$
or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$ donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{HF}$, on en déduit alors que $CEHF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CH}$
D'autre part $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{DC} = C\vec{H}$, les points D, C et H sont alignés.
• $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CF}$, les points A, C et F sont alignés.

EXERCICE 704



EXERCICE 705



EXERCICE 706

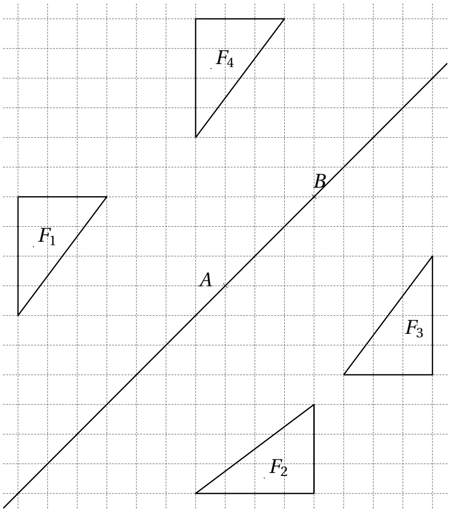
Q_1 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
Q_2 $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}$.
Q_3 R a pour image S par la translation de vecteur $\overrightarrow{QP}$.
Q_4 L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° dans le sens indiqué sur la figure est S.

EXERCICE 707

1. P_1 devient P_2 par la symétrie d'axe (D).
2. P_1 devient P_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
3. P_3 devient P_4 par la rotation de centre C d'angle 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
4. P_1 devient P_5 par la symétrie de centre B.

EXERCICE 708

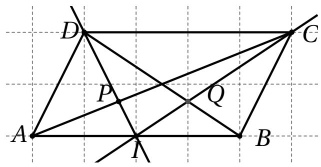
1.



2. F_1 devient F_4 par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 709

1.



2. (DI) et (AC) sont deux médianes du triangle ABD, P est donc le centre de gravité du triangle ABD.
(CI) et (BD) sont deux médianes du triangle ABC, Q est donc le centre de gravité du triangle ABC.

3. D'après la question précédente :
$\overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.
On en déduit alors que P est l'image de D et Q est l'image de C par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

4. D'après la question précédente dans le triangle CDI, $\frac{IP}{ID} = \frac{IQ}{IC} = \frac{1}{3}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (PQ) et parallèle à (CD) et $\frac{PQ}{DC} = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 710

1. h est une homothétie de centre O et de rapport k, $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$
donc $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ on en déduit alors que
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{AB}$.
$M \in (AB)$ donc il existe λ réel tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.
$M' = h(M)$ donc $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$
On en déduit alors que $\overrightarrow{A'M'} = k\lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$,
les points A', B' et M' sont alignés,
ou encore $M' \in [A'B')$.

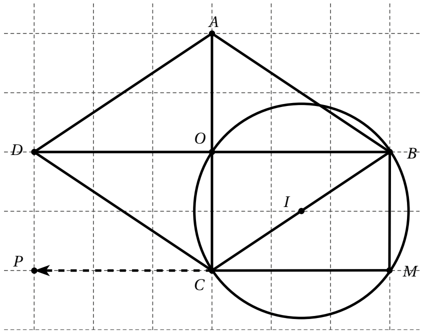
2. Supposons $N \in (A'B')$, les vecteurs $\overrightarrow{A'N}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont donc colinéaires, il existe alors un réel x non nul tel que $\overrightarrow{A'N} = x\overrightarrow{A'B'}$.

3. Supposons M tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ alors les points A, B et M sont alignés, ou encore $M \in (AB)$.
D'autre part $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} = x \times \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'N}$
ou encore $\overrightarrow{A'N} = k\overrightarrow{AM}$ or $A' = h(A)$ donc $N = h(M)$.

4. On en déduit donc que l'image d'une droite par une homothétie est une droite, de même vecteur directeur, les deux droites sont donc parallèles.

EXERCICE 711

1.



2. Le triangle OBC est rectangle en O, il est donc inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$, le centre du cercle est donc le milieu de $[BC]$.

3. Voir graphique.

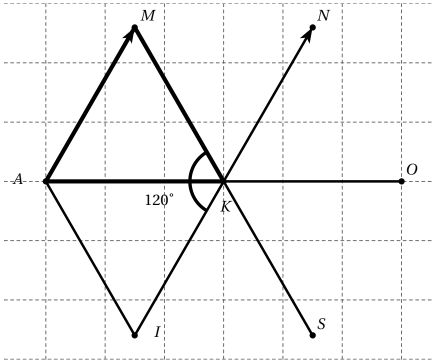
4. a. Par définition de M, $OBMC$ est un parallélogramme avec un angle droit, c'est donc un rectangle.
On a donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BM}$.
On peut en conclure que O a pour image C et B a pour image M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

b.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BP}\\ &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}\\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OD}\\ &= \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$
donc D a pour image P par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

c. Les points D, O et B sont alignés, il existe donc un réel x non nul tel que $\overrightarrow{DO} = x\overrightarrow{DB}$.
D'autre part $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DO}$
et $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DB}$
On en déduit alors que $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PM}$, les points P, C, et M sont donc alignés.
☞ Nous venons de re-démontrer que l'image d'une droite par une translation est une droite.

EXERCICE 712

1. a.



b. Voir graphique.

c. Par construction de I, $IK = MK$ et $\widehat{MKI} = 120°$, d'autre part AMK est un triangle équilatéral donc $MK = AK$ et $\widehat{MKA} = 60°$

On a alors $IK = AK$ et $\widehat{AKI} = 60°$, le triangle AKI est donc équilatéral.

2. Voir graphique.

3. a. Voir graphique.

b. $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AM}$ donc $AMNK$ est un parallélogramme, de plus AKM est un triangle équilatéral donc $AK = AM$, le parallélogramme $AMNK$ est donc un losange.

EXERCICE 713

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

On a alors $r(B) = A$ et $r(D) = C$, ainsi l'image par r du segment $[BD]$ est le segment $[AC]$, la rotation conservant les distances, on en déduit que $AC = BD$.

2. L'image de la droite (BD) par la rotation d'angle 90° est la droite (AC), on en déduit alors que la droite (BD) et son image (AC) sont perpendiculaires.

EXERCICE 714

Démontrons que M' appartient à une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$.

Soient M et N deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images respectives M' et N' par la symétrie de centre A.

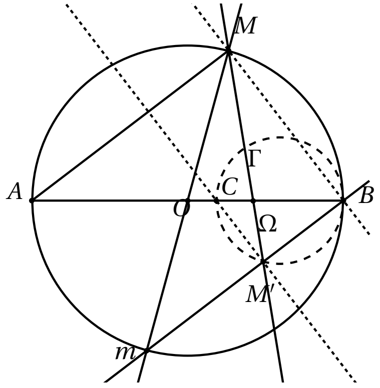
Par construction A est le milieu des segments $[MM']$ et $[NN']$ donc $MNM'N'$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{N'M'} = \overrightarrow{MN}$.

D'autre part M et N sont deux points de $\mathcal{D}$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est donc vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{N'M'}$ sont colinéaires, les points M' et N' appartiennent donc à une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

EXERCICE 715

1.



2. O est le milieu des segments $[AB]$ et $[Mm]$, le quadrilatère $AMBm$ est donc un parallélogramme, on en déduit alors que les droites (AM) et (Bm) sont parallèles.

Les triangles $\Omega BM'$ et ΩAM sont en configuration papillon. Il existe donc une homothétie de centre Ω qui transforme A en B et M en M'. L'homothétie conservant les formes, lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B, M' décrit un cercle de diamètre $[BC]$, privé des points B et C, C étant l'image de B par l'homothétie.

3. Le point C est le point d'intersection du segment $[AB]$ et de la parallèle à (BM) passant par M'.

Voir graphique.

EXERCICE 716

1. $x = 2$ et $y = 5$.

2. $x = -1$ et $y = 2$.

3. $x = 0$ (axe des ordonnées) et $y = 2$.

4. $x = 2$ et $y = 0$ (axe des abscisses).

EXERCICE 717

• Droite $\mathcal{D}_1$: $y = 3x - 4$

$3 \times 1 - 4 = -1 \neq 2$ donc $A \notin \mathcal{D}_1$

$3 \times (-2) - 4 = -10 \neq 4$ donc $B \notin \mathcal{D}_1$.

• Droite $\mathcal{D}_2 : x + 3y - 10 = 0$

$1 + 3 \times 2 - 10 = -3 \neq 0$ donc $A \notin \mathcal{D}_2$

$-2 + 3 \times 4 - 10 = 0$ donc $B \in \mathcal{D}_2$.

• Droite $\mathcal{D}_3 : x = 2$

$x_A = 1 \neq 2$ donc $A \notin \mathcal{D}_3$

$x_B = -2 \neq 2$ donc $B \notin \mathcal{D}_3$.

• Droite $\mathcal{D}_4 : 2x - 3y = 2$

$2 \times 1 - 3 \times 2 = -4 \neq 2$ donc $A \notin \mathcal{D}_4$

$2 \times (-2) - 3 \times 4 = -16 \neq 2$ donc $B \notin \mathcal{D}_4$.

EXERCICE 718

• Droite $\mathcal{D}_1 : 2x - 3y - 4 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $A(2\ ;\ 0)$.

☞ Pour un vecteur directeur, on applique simplement la propriété 1.

Pour le point A, on choisit une valeur de x (ou de y) nulle et on résout ainsi une équation à une inconnue.

• Droite $\mathcal{D}_2 : x + y - 10 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $A(10\ ;\ 0)$.

• Droite $\mathcal{D}_3 : x = 2$

$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $A(2\ ;\ 0)$.

• Droite $\mathcal{D}_4 : 2x - 3y = 2$

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 0)$.

• Droite $\mathcal{D}_5 : y = 4x - 1$

L'équation s'écrit encore $4x - y - 1 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 3)$.

• Droite $\mathcal{D}_6 : y = -7x + 8$

L'équation s'écrit encore $7x + y - 8 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 1)$.

• Droite $\mathcal{D}_7 : y = 8$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 8)$.

• Droite $\mathcal{D}_8 : 9y - 2x = 7$

L'équation s'écrit encore $2x - 9y + 7 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 1)$.

EXERCICE 719

Soit $M(x\ ;\ y)$, $M \in \mathcal{D} \iff \det\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = 0$.

• Droite $\mathcal{D}_1 : \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 0)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = y - 2x + 2$.

D'où une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1 : 2x - y - 2 = 0$.

Son équation réduite est alors $y = 2x - 2$.

• Droite $\mathcal{D}_2 : \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $A(0\ ;\ 2)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-2\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = 2y - 4 + 3x$.

D'où une équation cartésienne de $\mathcal{D}_2 : 3x + 2y - 4 = 0$.

Son équation réduite est alors $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$.

• Droite $\mathcal{D}_3 : \vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $A(-1\ ;\ 4)$.

La droite $\mathcal{D}_3$ est horizontale et passe par le point d'ordonnée 4 donc son équation réduite est alors $y = 4$.

• Droite $\mathcal{D}_4 : \vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A(-2\ ;\ 6)$.

La droite $\mathcal{D}_4$ est verticale et passe par le point d'abscisse -2 donc son équation réduite est alors $x = -2$.

• Droite $\mathcal{D}_5 : \vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et $A(1\ ;\ 1)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = -3y + 3 + 3x - 3$.

On en déduit une équation cartésienne de $\mathcal{D}_5 : x - y = 0$.

Son équation réduite est alors $y = x$.

• Droite $\mathcal{D}_6 : \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $A(-2\ ;\ 5)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = 3y - 15 + 3x - 6$.

D'où une équation cartésienne de $\mathcal{D}_6 : x + y - 7 = 0$.

Son équation réduite est alors $y = -x + 7$.

EXERCICE 720

• $\mathcal{D}_1 : 2 \times 1 - 3y_A + 1 = 0$ donc $y_A = 1$

• $\mathcal{D}_2 : -5 \times (-2) + 2y_A - 7 = 0$ donc $y_A = -\dfrac{3}{2}$

• $\mathcal{D}_3 : y_A = 3 \times 2 - 2 = 4$

• $\mathcal{D}_4 : y_A = \dfrac{1}{2} \times 3 - 6 = -\dfrac{9}{2}$

• $\mathcal{D}_5 : 3 \times 5 - y_A - 2 = 0$ donc $y_A = 13$

• $\mathcal{D}_6 : \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}y_A + \dfrac{1}{4} = 0$ donc $y_A = -\dfrac{11}{4}$.

EXERCICE 721

- $\mathcal{D}_1 : 2x_A - 3\times 1 + 1 = 0$ donc $x_A = 1$
- $\mathcal{D}_2 : -5x_A + 2\times(-2) - 7 = 0$ donc $x_A = -\dfrac{11}{5}$
- $\mathcal{D}_3 : 2 = 3x_A - 2$ donc $x_A = \dfrac{4}{3}$
- $\mathcal{D}_4 : 3 = \dfrac{1}{2}x_A - 6$ donc $x_A = 18$
- $\mathcal{D}_5 : 3x_A - 5 - 2 = 0$ donc $x_A = \dfrac{7}{3}$
- $\mathcal{D}_6 : \dfrac{1}{2}x_A + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{4} = 0$ donc $x_A = -\dfrac{25}{18}$.

EXERCICE 722

Dans tout l'exercice, nous appellerons $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u}\right) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}186\\1110\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u}\right) = 6 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-20783\\-11876\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u}\right) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u}\right) = 12 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

EXERCICE 723

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}60\\60\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{CD} = -6\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}169\\-196\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-90\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = -15602 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}140\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\60\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = 8400 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 724

Dans cet exercice, on pose $M(x\ ;\ y)$, M appartient à la droite (AB) si, et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 0$.

1. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = -x - y + 1$, on en déduit une équation cartésienne de la droite (AB) : $x + y - 1 = 0$ puis l'équation réduite $y = -x + 1$.
2. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 9x + 3y - 9$, on en déduit une équation cartésienne de la droite (AB) : $3x + y - 3 = 0$ puis l'équation réduite $y = -3x + 3$.
3. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\sqrt{2}\\y-3\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y - 7\sqrt{6}$, on en déduit une équation cartésienne de la droite (AB) :
   $2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}y + 7\sqrt{6} = 0$
   puis l'équation réduite $y = \dfrac{\sqrt{6}}{3}x + \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.
4. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{4}\\y+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{9}{4}\\\frac{15}{4}\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{15}{4}x + \dfrac{9}{4}y + \dfrac{93}{16}$, on en déduit une équation cartésienne de la droite (AB) : $20x + 12y + 31 = 0$ puis l'équation réduite $y = -\dfrac{5}{3}x - \dfrac{31}{12}$.
5. Nous remarquons que les deux points ont même ordonnée, la droite (AB) est donc d'équation $y = -4$.
6. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+9\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-11\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = -11x - 11y - 77$, on en déduit une équation cartésienne de la droite (AB) : $x + y + 7 = 0$ puis l'équation réduite $y = -x - 7$.

EXERCICE 725

Dans cet exercice, on pose $M(x\ ;\ y)$, M appartient à la droite parallèle à (AB) passant par C si, et seulement si $\det\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 0$.

Nous appellerons $\mathcal{D}$ la parralèle à (AB) passant par C.

1. $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=x+y-8$, on en déduit une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$: $x+y-8=0$ puis l'équation réduite $y=-x+8$.
2. Nous remarquons que les points A et B ont même ordonnée, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont donc horizontales, $y_C=-1$, alors $\mathcal{D}$ est d'équation $y=-1$.
3. $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=-5x+5y+15$, on en déduit une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$: $x-y-3=0$ puis l'équation réduite $y=x-3$.
4. Nous remarquons que A et B ont même abscisse, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont donc verticales, $x_C=3$, alors $\mathcal{D}$ est d'équation $x=3$.
5. $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=-2x-4y+12$, on en déduit une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$: $x+2y-6=0$ puis l'équation réduite $y=-\dfrac{1}{2}x+3$.
6. $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+2\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$
   $\det\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=6x-4y+4$, on en déduit une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$: $3x-2y+2=0$ puis l'équation réduite $y=\dfrac{3}{2}x+1$.

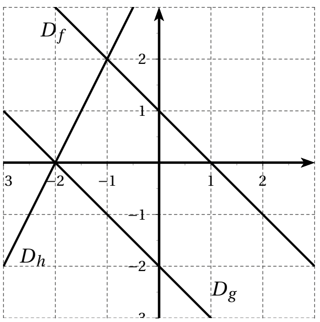
EXERCICE 726

1. Les coefficients des deux droites ne sont pas égaux, les deux droites ne sont donc pas parallèles, le système admet donc un unique couple solution.
   $$\begin{cases}y=-x+2\\y=-3x+4\end{cases}\implies\begin{cases}-3x+4=-x+2\\y=-3x+4\end{cases}$$
   donc $x=1$ et $y=1$.
2. Les coefficients des deux droites ne sont pas égaux, les deux droites ne sont donc pas parallèles, le système admet donc un unique couple solution.
   $$\begin{cases}y=-2x+\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}\implies\begin{cases}\dfrac{1}{5}=-2x+\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$
   donc $x=\dfrac{3}{20}$ et $y=\dfrac{1}{5}$.

EXERCICE 727

1. $\det=-12\neq0$, le système admet donc un unique couple solution.
   Résolvons le système par combinaisons.
   $$\begin{cases}3y+6x=-3\\2y-4x=6\end{cases}\implies\begin{cases}6y+12x=-6\\6y-12x=18\end{cases}$$
   En additionnant membre à membre les deux égalités, nous obtenons $12y=12$ donc $y=1$.
   $$\begin{cases}3y+6x=-3\\2y-4x=6\end{cases}\implies\begin{cases}6y+12x=-6\\-6y+12x=-18\end{cases}$$
   En additionnant membre à membre les deux égalités, nous obtenons $24x=-24$ donc $x=-1$.
   Nous avons raisonné par implications, il reste donc à vérifier que le couple $x=-1$ et $y=1$ est bien solution du système.
2. $$\begin{cases}y=2x+3\\y=-3x-4\end{cases}\implies\begin{cases}y=2x+3\\2x+3=-3x-4\end{cases}\implies\begin{cases}x=-\dfrac{7}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$
3. $$\begin{cases}y=3x-5\\2y-6x=4\end{cases}\implies\begin{cases}y=3x-5\\y=3x+4\end{cases}$$
   Ces deux équations ont le même coefficient directeur, mais des ordonnées à l'origine différentes, les deux droites sont donc strictement parallèles, le système n'admet donc aucune solution.
4. $$\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x-2\\x=4\end{cases}\implies\begin{cases}y=\dfrac{4}{3}-2=-\dfrac{2}{3}\\x=4\end{cases}.$$

EXERCICE 728

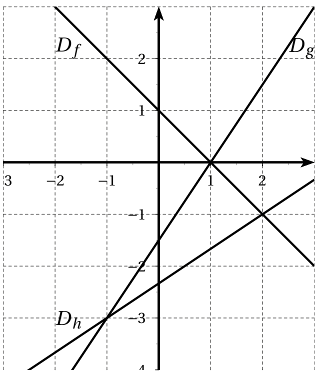


1. Le système correspond aux droites D_f et D_h, ces

droites se coupent au point de coordonnées $x = -1$ et $y = 2$.

2. Le système correspond aux droites D_f et D_g, ces droites sont parallèles, le système n'admet pas de solution.
3. Le système correspond aux droites D_g et D_h, ces droites se coupent au point de coordonnées $x = -2$ et $y = 0$.

EXERCICE 729



1. Le système correspond aux droites D_f et D_h, ces droites se coupent au point de coordonnées $x = 2$ et $y = -1$.
2. Le système correspond aux droites D_f et D_g, ces droites se coupent au point de coordonnées $x = 1$ et $y = 0$.
3. Le système correspond aux droites D_g et D_h, ces droites se coupent au point de coordonnées $x = -1$ et $y = -3$.

EXERCICE 730

On considère la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$ un point de la droite (AB), alors les points A, M et B sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\iff$ $\det(\overrightarrow{AM}\ ;\overrightarrow{AB})=0$

$$\begin{aligned}
&\iff (x-x_A)\times(a)-(y-y_A)\times(-b)\times=0\\
&\iff ax-ax_A+by-by_A=0\\
&\iff ax+by+(-ax_A-by_A)=0\\
&\iff ax+by+c=0
\end{aligned}$$

avec $c=(-ax_A-by_A)$

La droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne : $ax+by+c=0$.

EXERCICE 731

```
def appartient(a,b,c) :
    point=[] # initialise une liste vide
    point[0]=int(input("entrer l'abscisse du point"))
    point[1]=int(input("entrer l'ordonnée du point"))
    resultat=a*point[0]+b*point[1]+c
    if resultat= = 0 :
        print("le point appartient à la droite")
    else :
        print("le point n'appartient pas à la droite")
```

EXERCICE 732

On entrera en arguments : a l'abscisse du vecteur directeur et b du même vecteur.

```
def equation(a,b) :
    point=[]
    point[0]=int(input("entrer l'abscisse du point"))
    point[1]=int(input("entrer l'ordonnée du point"))
    A = b
    B = −a
    C = A*point[0]+B*point[1]
    if B < 0 and C < 0 :
        print( A, "x −", −B, "y− ",−C, "= 0")
    if B > 0 and C < 0 :
        print( A, "x +", B, "y − ", −C, "= 0")
    if B < 0 and C > 0 :
        print( A, "x −", −B, "y + ", C, "= 0")
    else :
        print( A, "x +", B, "y + ", C, "= 0")
```

EXERCICE 733

1. Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB).
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$.

Le point M appartient à la droite (AB) donc $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = bx + ay - ab = 0$.

a et b étant non nuls, nous pouvons diviser l'expression par ab d'où l'équation de la droite (AB) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

2. D'après le résultat précédent, la droite (AB) a pour équation : $\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$.

EXERCICE 734

1. Dans un triangle équilatéral, les hauteurs sont aussi médiatrices. Soit h la longueur d'une hauteur.
   Nous appliquons le théorème dans le triangle rectangle : $h^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$
   h étant positive, alors $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.
2. Dans le repère $\left(A\,;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$
   avec $\vec{u} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$.
   $A(0\ ;\ 0)$, $B(a\ ;\ 0)$, $C(a\ ;\ a)$, $D(0\ ;\ a)$
   $E\left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}a\right)$ et $F\left(\frac{1}{2}a\ ;\ a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Nous en déduisons alors une équation de la droite (AF) : $\left(2+\sqrt{3}\right)x - y = 0$.
4. $\left(2+\sqrt{3}\right) \times \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}a = 0$, les coordonnées de E vérifient l'équation, le point E appartient donc à la droite (AF).

EXERCICE 735

1. Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AJ}\right)$: $B\left(\frac{3}{2}\ ;\ 0\right)$, $C\left(\frac{3}{2}\ ;\ 2\right)$, $D(0\ ;\ 2)$ et $K(1\ ;\ 1)$.
2. On en déduit alors $(ID) : 2x + y - 2 = 0$
   et $(BJ) : 2x + 3y - 3 = 0$.
3. Les coordonnées du point M vérifient le système $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$.
   La résolution de ce système donne $x = \frac{3}{4}$ et $y = \frac{1}{2}$
   donc $M\left(\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
4. $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, ainsi $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CK}$.
   Les points M, K et C sont donc alignés.

EXERCICE 736

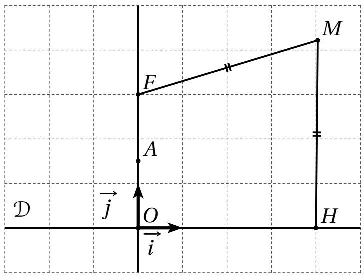
1. Les points A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
2. Dans ce repère, on a $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$, $C'\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, $B'\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $A'\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
3. Soit M un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
   $\det\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AA'}\right) = \begin{vmatrix} x & 0{,}5 \\ y & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}5x - 0{,}5y$.
   $M \in (AA')$ si, et seulement si, $0{,}5x - 0{,}5y = 0$.
   On en déduit alors une équation de $(AA') : x - y = 0$.
   On détermine de manière analogue
   $(BB') : x + 2y - 1 = 0$ et $(CC') : 2x + y - 1 = 0$.
4. Les coordonnées de M vérifient le système $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
   La résolution de ce système donne $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$, donc $M\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
5. $2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{3}{3} - 1 = 0$, les coordonnées de M vérifient l'équation de la droite (CC'), le point M appartient donc à la droite (CC').
6. Le point M appartient aux trois médianes du triangles. Les médianes d'un triangle sont donc concourantes.

EXERCICE 737

1. Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$, on a $A'(0\ ;\ 2)$, $C'(0\ ;\ -1)$ et $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
2. En en déduit alors $(A'K) :\ 3x + y - 2 = 0$
   et $(C'K) :\ 3x - y - 1 = 0$.
3. I appartient à(AB) et à $(A'K)$ donc
   $y_I = 0$ et $3x_I + y_I - 2 = 0$ ainsi $I\left(\frac{2}{3}\ ;\ 0\right)$.
   J appartient à(AB) et à $(C'K)$ donc
   $y_J = 0$ et $3x_J + y_J - 1 = 0$ ainsi $J\left(\frac{1}{3}\ ;\ 0\right)$.
4. D'après les résultats précédents :
   $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 738

1. Le point A, milieu du segment $[OF]$ convient. L'ensemble (E) n'est donc pas vide.



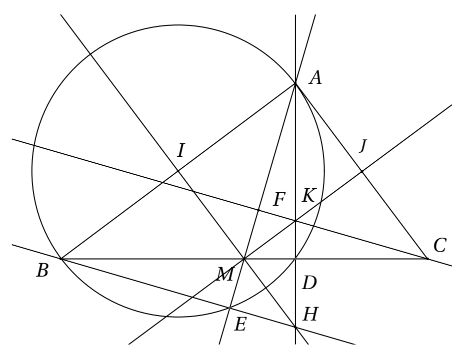
2. On se place dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tracé sur la figure précédente avec $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{p}\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{i}$ un vecteur de norme 1 sur la droite $\mathcal{D}$.
On a alors $M(x\ ;\ y)$, $F(0\ ;\ p)$ et $H(x\ ;\ 0)$
donc $MF^2 = x^2 + (y-p)^2$ et $MH^2 = y^2$
D'autre part $MF = MH$ est équivalent à $MF^2 = MH^2$ car MH et MF sont les longueurs donc des réels positifs.
On en déduit alors que les coordonnées de M vérifient $y^2 = x^2 + y^2 - 2yp + p^2$
soit en simplifiant : $y = \dfrac{1}{2p}x^2 + \dfrac{1}{2}p$.

EXERCICE 739

1. **a.** $A'(1\ ;\ -3)$, $B'(4\ ;\ 3)$ et $C'(-2\ ;\ 1)$.
b. Equation de (AA') : $x = 1$
Equation de (BB') : $8x - 9y - 5 = 0$
c. Les coordonnées de K vérifient les équations $x = 1$ et $8x - 9y - 5 = 0$ donc $K\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.
d. $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-6\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$, ainsi $\overrightarrow{CC'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CK}$, les points C, C' et K sont alignés, ou encore K appartient à la droite (CC').
e. Les médianes d'un triangle sont concourantes.
f. D'après la question **d.** $\overrightarrow{CK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$, on monterait de même que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.
K est situé aux deux-tiers des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ en partant des points A, B et C.
2. $OA = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$OB = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$OC = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$OA = OB = OC$, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. **a.** $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA_1}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$
On a donc $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, les points A, H et A_1 sont alignés.
b. $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC_1}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$
On a donc $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{CH}$, les points C, C_1 et H sont alignés.
c. $AA_1^2 = 3^2 + (-9)^2 = 90$,
$AC^2 = (7-1)^2 + (-1-7)^2 = 100$
$A_1C^2 = (7-4)^2 + (-1+2)^2 = 10$
On a donc $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AA_1C est rectangle en A_1.
$CC_1^2 = (-8)^2 + 4^2 = 80$ et $C_1A^2 = (1+1)^2 + (7-3)^2 = 20$ donc $AC^2 = CC_1^2 + C_1A^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CC_1A est rectangle en C_1.
d. Les droites (CC_1), (AA_1) sont deux hauteurs du triangle ABC, elles se coupent en H, H est donc l'orthocentre du triangle ABC.
4. La droite (OH) a pour équation : $x - 3y = 0$
$1 - 3 \times \dfrac{1}{3} = 1 - 1 = 0$ donc $K \in (OH)$, ou encore, les points O, K et H sont alignés.
5. La droite d'Euler est une droite passant par plusieurs points remarquables du triangle, dont l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit.

EXERCICE 740

1. **a.**



b. $BC^2 = 15^2 = 225$ et $AB^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Voir graphique.

   b. Les triangles ABE et ABD sont inscrits dans le cercle de diamètre $[AB]$, il sont donc rectangles respectivement en E et en D.

3. **a.** Voir graphique.

   b. Les diagonales $[BC]$ et $[EF]$ se coupent en leur milieu, $BECF$ est donc un parallélogramme.

   c. $BECF$ est un parallélogramme donc (BE) et (CF) sont parallèles.

   D'autre part (BE) et (AF) sont perpendiculaires dont (AF) et $CF)$ sont perpendiculaires.

4. **a.** Les droites (AD) et (BE) sont les hauteurs issues respectivement de A et B dans le triangle ABM.

   Ces droites se coupent en H, orthocentre du triangle ABM, la troisième hauteur est donc (HM), la droite (HM) est donc perpendiculaires à (AB).

   En se plaçant dans le triangle AMC, on démontre de la même façon que les droites (KM) et $AC)$ sont perpendiculaires.

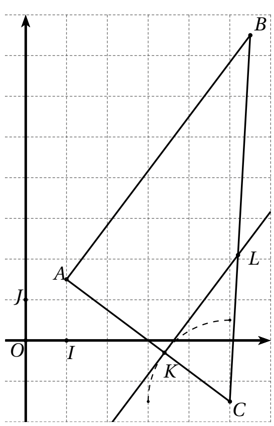
   b. $AIMJ$ est un quadrilatère dont trois angles sont droits, c'est donc un rectangle.

   On en déduit alors que (MK) et (HM) sont perpendiculaires, le triangle HMK est donc rectangle en M.

EXERCICE 741

Partie A

1.



2. $BC = \sqrt{(5-5,5)^2 + (-1,5-7,5)^2} = \sqrt{81,25}$

   $BC = \sqrt{\dfrac{325}{4}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{2}$.

3. $BC^2 = 81,25$ et $AB^2 + AC^2 = 7,5^2 + 5^2 = 81,25$

   ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

4. $aire(ABC) = \dfrac{1}{2} AB \times AC = 18,75 \text{ cm}^2$.

Partie B

1. Voir graphique.

2. Le triangle ABC est rectangle en A donc (AC) perpendiculaire à (AB).

   Par hypothèse (KL) perpendiculaire à (AC), on en déduit alors que (AB) et (KL) sont parallèles.

3. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, nous obtenons : $\dfrac{KL}{AB} = \dfrac{CK}{CA}$

   d'où $KL = AB \times \dfrac{CK}{CA} = 3$ cm.

Partie C

1. $aire(LTC) = \dfrac{1}{2} LK \times TC = \dfrac{1}{2} \times 3 \times (2-x)$

   d'où $aire(LTC) = 3 - 1,5x$.

2. $aire(ABLT) = aire(ABC) - aire(LTC)$

   $= 18,75 - 3 + 1,5x$

   d'où $aire(ABLT) = 15,75 + 1,5x$.

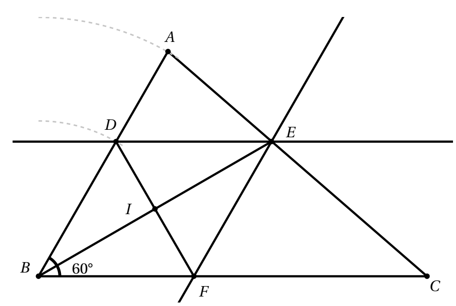
3. $aire(ABLT) = aire(LTC)$ si, et seulement si, $aire(LTC) = \dfrac{18,75}{2} = 9,375$

   or $aire(LTC) = 3 - 1,5x \leqslant 3$ car $0 \leqslant x \leqslant 3$.

   L'égalité entre les deux aires est donc impossible.

EXERCICE 742

1.



2. **a.** En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, nous obtenons : $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB}$

d'où $DE = BC \times \dfrac{AD}{AB} = 3$ cm.

b. Le point D appartient au segment $[AB]$ donc $BD = AB - AD = 3$ cm.

$DB = DE$, le triangle BDE est donc isocèle en D.

3. **a.** Les angles $\widehat{DEB}$ et $\widehat{EBC}$ sont alternes-internes, ils sont donc égaux.

b. Le triangle BDE est isocèle en D donc $\widehat{DBE} = \widehat{BED}$

On en déduit d'après la question précédente que $\widehat{DBE} = \widehat{EBC}$, la demi-droite $[BE)$ est donc bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

4. **a.** Voir graphique.

b. Par construction $BDEF$ est un parallélogramme, d'autre par $BD = DE$, $BDEF$ est un parallélogramme ayant deux côtés adjacents égaux, c'est donc un losange.

c. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires, le triangle BDI est donc rectangle en I.

5. **a.** Dans le triangle BDF, $\widehat{FBD} = 60°$ et $BD = BF$ on en déduit que ce triangle est équilatéral et $DF = 3$ cm.

b. Dans le triangle BIF rectangle en I, $\cos\widehat{IBF} = \dfrac{BI}{BF}$

d'où $BI = BF \times \cos\widehat{IBF} = 3\cos(30°) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

alors $BE = 2BI = 3\sqrt{3}$.

c. $aire(BDEF) = \dfrac{1}{2}BE \times DF = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

EXERCICE 743

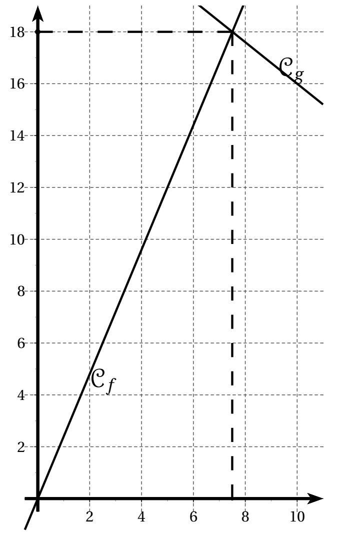
Partie A

1.
$$\begin{cases} y = 2,4x \\ y = -0,8x + 24 \end{cases} \iff \begin{cases} 2,4x = -0,8x + 24 \\ y = -0,8x + 24 \end{cases} \iff \begin{cases} 3,2x = 24 \\ y = -0,8x + 24 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7,5 \\ y = 18 \end{cases}$$

2. **a.**

x	0	10
$f(x)$	0	24
$g(x)$	24	16

b.



3. Voir graphique

Partie B

1. $AB^2 = 100$ et $AC^2 + BC^2 = 100$

On a ainsi $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

2. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, nous obtenons : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{MD}{BC}$.

3. **a.** M varie entre A et B donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.

b. D'après la question **2.** :

$AD = AC \times \dfrac{AM}{AB} = 0,6x$ et $MD = BC \times \dfrac{AM}{AB} = 0,8x$.

c. $M \in [AB]$ donc $MB = AB - AM = 10 - x$

$D \in [AC]$ don $DC = AC - AD = 6 - 0,6x$.

4. Soit p le périmètre du triangle ADM et P celui du trapèze $BCDM$.

$p = AD + DM + AM = 2,4x$

$P = BC + CD + DM + MB = 24 - 0,8x$.

D'après les résultats de la partie A, les deux périmètres seront égaux lorsque $x = 7,5$ cm, ils seront alors égaux à 18 cm.

EXERCICE 744

Partie A

1. **a.** On applique le théorème de Pythagore dans le triangle JRH rectangle en H : $JR^2 = JH^2 + HR^2 = 25$

donc $JR = 5$ m.

b. $\cos\widehat{HJR} = \dfrac{JH}{JR} = 0,8$

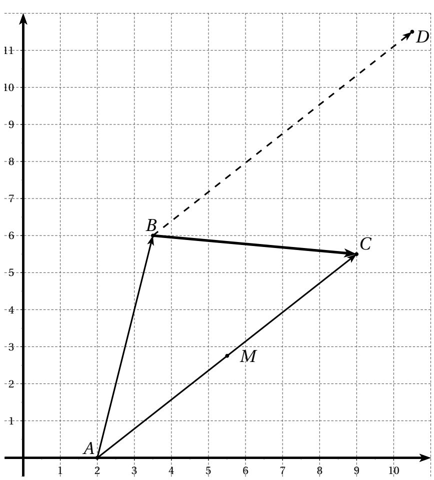
On en déduit alors $\widehat{HJR} = arccos(0,8) = 37°$ au degré près.

2. **a.** $HR = JR \times \sin\widehat{HJR} = 5\sin(40°) = 3,2$ m au dixième près.

b. $\tan\widehat{HJR} = \dfrac{HR}{JH}$ donc $JH = \dfrac{HR}{\tan\widehat{HJR}} = 3,8$ m au dixième près.

Partie B

1.



2. Voir graphique.

3. Soit x et y les coordonnées de D, alors $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$

D'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 11,5 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ si, et seulement si, $\begin{cases} x-2 = 8,5 \\ y = 11,5 \end{cases}$

ainsi $D(10,5\ ;\ 11,5)$.

4. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.

5. $x_M = \dfrac{2+9}{2} = 5,5$, $y_M = \dfrac{0+5,5}{2} = 2,75$.

6. Soit N un point du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$, d'autre part $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1,5 \\ 6 \end{pmatrix}$

d'où $\det\left(\overrightarrow{AN}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 6x - 12 - 1,5y$.

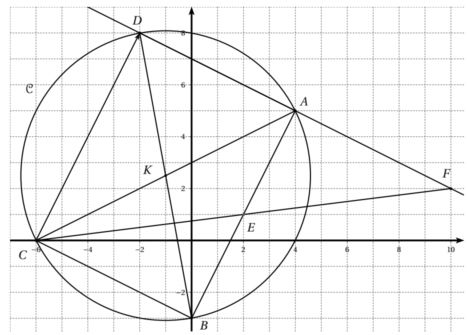
$N \in (AB)$ si, et seulement si, $\det\left(\overrightarrow{AN}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 0$.

On en déduit une équation cartésienne de (AB) : $6x - 1,5y - 12 = 0$

ou encore $4x - y - 8 = 0$.

EXERCICE 745

1.



2. **a.** $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{80}$

$AC = \sqrt{(-6-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{125}$

$BC = \sqrt{(-6-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{45}$.

b. $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

3. **a.** Voir graphique.

b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ est donc un parallélogramme, de plus $ABCD$ a un angle droit, c'est donc un rectangle.

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

d. Soit $D(x\ ;\ y)$ alors $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -6-x \\ -y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ si, et seulement si, $\begin{cases} -6-x = -4 \\ -y = -8 \end{cases}$

donc $x = -2$ et $y = 8$.

4. **a.** $x_K = \dfrac{4-6}{2} = -1$ et $y_K = \dfrac{5+0}{2} = 2,5$.

b. Les diagonales d'un rectangle se coupant en leur milieu, K est le point d'intersection des diagonales du rectangle $ABCD$, c'est donc le centre du rectangle.

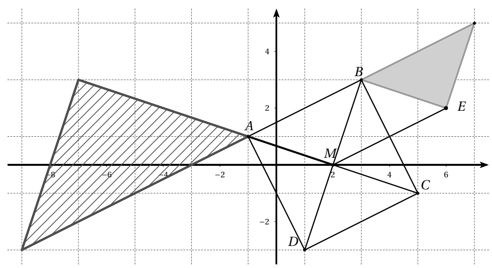
5. **a.** ABC est un triangle rectangle en B, le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC est donc de centre K et de rayon $AK = \dfrac{1}{2}\sqrt{125}$.

b. K est le centre du rectangle, on a alors $DK = AK$, le point D appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.

6. Soit E le point d'intersection de la droite (CF) et du segment $[AB]$.
Dans le triangle CDF, par construction A est le milieu de $[DF]$ et les droites (AE) et (CD) sont parallèles, d'après la propriété des milieux, E est le milieu de $[AB]$.

EXERCICE 746

1.



2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme.

3. $BC = \sqrt{(5-3)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

4. **a.** $AB = BC$ le triangle ABC est donc isocèle en B.
D'autre part $AC^2 = 40$ et $AB^2 + BC^2 = 40$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
Le triangle ABC est donc isocèle rectangle en B.
b. Le parallèlogramme $ABCD$ a un angle droit et deux côtés adjacents de même longueur, c'est donc un carré.

5. Voir graphique.

6. **a.** L'image de BMC est le triangle AMD.
b. L'image de AMB est le triangle CMB.
c. L'image de AMB est le triangle DMA.
d. Voir graphique.
e. Voir graphique.

EXERCICE 747

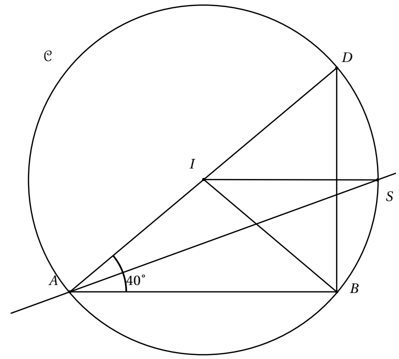
1. Le graphique est en fin d'exercice.

2. $BD = AB \times \tan(\widehat{BAD}) = 7{,}6$ cm au millimètre près.

3. Le triangle ABD est rectangle en B, le centre I est donc le milieu de l'hypoténuse $[AD]$.

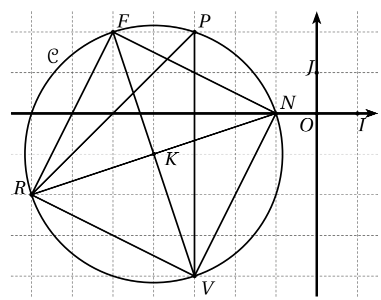
4. Voir graphique.

5. Les angles $\widehat{SAB}$ et $\widehat{SIB}$ interceptent le même arc, l'angle $\widehat{SIB}$ étant l'angle au centre, alors $\widehat{SIB} = 2\widehat{SAB} = 40°$.



EXERCICE 748

1. **a.**



b. $\overrightarrow{RF}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
c. $RF = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
d. $RF = RV$, le triangle RFV est donc isocèle en R.
D'autre part $VF^2 = 40$ et $RV^2 + RF^2 = 40$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore est rectangle en R.
Le triangle RFV est ainsi isocèle rectangle en R.

2. $x_K = \dfrac{-5-3}{2} = -4$ et $y_K = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

3. **a.** Le triangle RFV est rectangle, le cercle circonscrit au triangle est donc de centre le milieu de l'hypoténuse $[VF]$ et de rayon $\dfrac{1}{2}VF = \sqrt{10}$.
b. Par construction K est le milieu de la diagonale $[RK]$, K étant de plus le milieu de la diagonale $[VF]$, on en déduit que $RFNV$ est un parallélogramme.
Ce parallélogramme a un angle droit et deux côtés

adjacents de même longueur, alors $RFNV$ est un carré.

c. Soit p le périmètre et $\mathcal{A}$ l'aire du carré $RFNV$.

$p = 4RF = 8\sqrt{5}$ cm.

$\mathcal{A} = RF^2 = 20$ cm^2.

4. Les angles $\widehat{RPV}$ et $\widehat{RKV}$ interceptent le même arc, $\widehat{RKV}$ étant l'angle au centre,
alors $\widehat{RPV} = \frac{1}{2}\widehat{RKV} = 45°$.

EXERCICE 749

Partie A

1. $PN^2 = 169$ et $PM^2 + MN^2 = 169$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en M.

2. Soit p le périmètre et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle MNP.
$p = PN + NM + MP = 30$ cm
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times MN \times MP = 30$ cm^2.

3. Le triangle MNP est rectangle en M, le cercle circonscrit au triangle est donc de centre le milieu de l'hypoténuse $[NP]$ et de rayon $\frac{1}{2}NP = 6,5$ cm.

4. $\tan\widehat{PNM} = \frac{MP}{MN} = \frac{5}{12}$
d'où $\widehat{PNM} = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 23°$ au degré près.

Partie B

1. A varie sur le segment $[PM]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 5$.

2. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle MNP, on obtient : $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN} = \frac{AB}{PN}$ d'où
$MB = MN \times \frac{MA}{MP} = \frac{12x}{5}$
$AB = NP \times \frac{MA}{MP} = \frac{13x}{5}$.

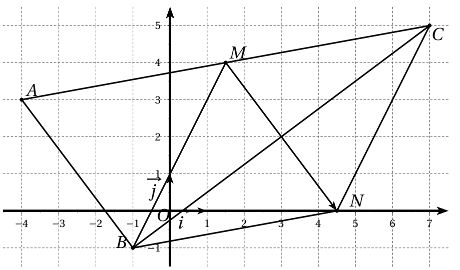
3. Soit p' le périmètre du triangle AMB,
$p' = MA + AB + BM = x + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5}$.

4. $x = 3$.

5. a. D'après les résultats précédents, $AM = 3$ cm.
b. Soit $\mathcal{A}'$ l'aire du triangle AMB,
$AM = 3$ alors $BM = \frac{12 \times 3}{5} = 7,2$ cm.
$\mathcal{A}' = \frac{1}{2}AM \times BM = 10,8$ cm^2.

EXERCICE 750

1.



2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $AB = 5$.

3. $BC = \sqrt{(7+1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{100} = 10$
$AC = \sqrt{(7+4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

4. $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

5. $x_M = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2}$ et $y_M = \frac{3+5}{2} = 4$.

6. Le triangle ABC est rectangle en B, il est donc inscrit dans un cercle de centre M, ainsi $MA = MB = MC$.

7. Voir graphique.

8. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ si, et seulement si $\begin{cases} x - 1,5 = 3 \\ y - 4 = -4 \end{cases}$
d'où $x = 4,5$ et $y = 0$ soit $N(4,5\ ;\ 0)$.

9. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ donc $AMNB$ est un parallélogramme.
On a alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$.
D'autre part M est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$
Ainsi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BN}$.

10. D'après les questions précédentes $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BN}$ donc $BMCN$ est un parallélogramme.
De plus $BM = CM$, le parallélogramme a deux côtés adjacents de même longueur, $BMCN$ est donc un losange.

11. $aire(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times BC$
$aire(BMNC) = \frac{1}{2} \times BC \times MN$
or $MN = AB$ donc $aire(ABC) = aire(BMCN)$.

EXERCICE 751

1. Dans le triangle ABC rectangle en B, $\sin\widehat{C} = \frac{AB}{AC}$
donc $AC = \frac{AB}{\sin\widehat{C}} = 2116$ m.

2. Soit t le temps mis par l'avion pour parcourir la distance AC : $t = \frac{2116}{92} = 23$ s.

3. $CD = \dfrac{2\times 92^2+6600}{25} = 941,12$ m.

EXERCICE 752

1. **a.** Le triangle MNB est rectangle en M donc d'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = BN^2 - BM^2 = 5,76$ d'où $MN = 2,4$ cm.
   b. Dans le triangle BMN, $\cos\widehat{MBN} = \dfrac{BM}{BN} = 0,8$ d'où $\widehat{MBN} = \arccos(0,8) = 37°$ au degré près.
2. **a.** Le triangle BPA est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$, ce triangle est donc rectangle en P.
   b. Les droites (MN) et (PA) sont perpendiculaires à la droite (PB), elles sont donc parallèles.
3. **a.** Le coefficient d'agrandissement est $c = \dfrac{BA}{BN} = 3$.
   b. $BP = 3\times BM = 9,6$.
   c. $aire(BMN) = \dfrac{1}{2}\times MN\times MB = 3,84$ cm^2.
   $aire(BPA) = 3^2 aire(BMN) = 34,56$ cm^2.
4. D'une part $\dfrac{BM}{BP} = \dfrac{1}{3}$.
   D'autre part $\dfrac{B3}{BO} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (PO) et (ME) sont parallèles.
5. $\dfrac{BN}{BO} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.
   Dans le triangle PBK, O est le milieu du segment $[PK]$ donc (BO) est une médiane du triangle. Le point N appartient à cette médiane et $BN = \dfrac{2}{3}BO$ donc N est le centre de gravité du triangle PBK.
   La droite (PI) passe par le sommet P et le centre de gravité N, (PI) est donc la médiane issue du sommet P, elle coupe donc le côté $[BK]$ en son milieu, I est donc le milieu de $[BK]$.

EXERCICE 753

Affirmation 1 : $AB^2 = 20$, $AD^2 = 25$ et $BD^2 = 5$
$BD^2 \neq AB^2 + AD^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABD n'est pas rectangle en A, les droites (AB) et (AD) ne sont pas perpendiculaires. L'affirmation 1 est fausse.
Affirmation 2 : $-4\times 1 + 10\times(-1) - 4 = 18 \neq 0$, Le point C n'appartient pas à la droite d'équation $-4x + 10y - 4 = 0$. L'affirmation 2 est fausse.
Affirmation 3 : Le triangle ABD est rectangle en B alors $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ d'où $\widehat{BAD} \approx 26,57°$. L'affirmation 3 est fausse.
Affirmation 4 : Δ est d'équation :
$3x - 2y + 3 = 0$, après simplification, une équation de la droite (D) est $3x - 2y - \dfrac{1}{2} = 0$.
Les droites sont donc parallèles.
L'affirmation 4 est fausse.
Affirmation 5 : Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite, une équation de cette droite est de la forme : $3x + 2y + c = 0$.
Le point $E(4\ ;\ -2)$ appartient à la droite
donc $c = -3\times 4 - 2\times(-2) = -8$. L'affirmation 5 est vraie.

EXERCICE 754

1. $Aire(ABCD) = \dfrac{AB + CD}{2}\times AD = 64$ cm^2.
2. **a.** $ABCD$ est un trapèze rectangle donc (AB) et (CD) sont parallèles, (DC) et (AD) sont perpendiculaires.
   D'autre part (BH) est perpendiculaire à (DC) donc (AD) et (BH) sont parallèles.
   Le quadrilatère $ADHB$ est donc un parallélogramme contenant deux angles droits, $ADHB$ est donc un rectangle.
   b. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BCH rectangle en H : $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 80$ d'où $BC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
3. Dans le triangle BCH rectangle en H,
   $\tan\widehat{DCB} = \dfrac{BH}{CH} = 2$ donc $\widehat{DCB} = 63,4°$.
4. **a.** $f(x) = 8x$.
   b. $g(x) = 64 - 8x$.
   c. $f(x) = g(x)$ si, et seulement si $8x = 64 - 8x$ donc si, et seulement si, $x = 4$.

EXERCICE 755

1. B **2. D** **3. C**

EXERCICE 756

1. A **2. C** **3. A** **4. B**

EXERCICE 757

1. $\widehat{BAG} = \widehat{BAC} + \widehat{CAG} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, on en déduit que les points A, D et G sont alignés.
   $\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, on en déduit que les

points A, E et C sont alignés.

2. On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \dfrac{\overrightarrow{AB}}{b}, \dfrac{\overrightarrow{AC}}{c}\right)$ avec $b = AB$ et $c = AC$.
On a alors $B(b;0)$, $C(0;c)$, $D(b;-b)$, $E(0;-b)$, $F(-c;c)$ et $G(-c;0)$

• Equation de (BC) :
$det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BM}\right) = \begin{vmatrix} -b & x-b \\ c & y \end{vmatrix} = -by - cx + bc = 0$
d'où (BC) d'équation $cx + by = bc$

• Equation de (FD) :
$det\left(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FM}\right) = \begin{vmatrix} -b-c & x+c \\ b+c & y-c \end{vmatrix}$
$= -(b+c)(y-c) - (b+c)(x+c) = 0$
d'où (FD) d'équation $x + y = 0$

• Equation de (GE) :
$det\left(\overrightarrow{GE};\overrightarrow{GM}\right) = \begin{vmatrix} c & x+c \\ -b & y \end{vmatrix} = cy + bx + bc = 0$
d'où (BC) d'équation $bx + cy = -bc$

• Recherche des coordonnées du point H intersection de (BC) et (FD)
Il faut résoudre le système $\begin{cases} x + y = 0 \\ cx + by = bc \end{cases}$
par hypothèse ABC n'est pas isocèle donc $b \neq c$
on obtient $H\left(\dfrac{bc}{c-b} ; -\dfrac{bc}{c-b}\right)$.

• $b \times \dfrac{bc}{c-b} - c \times \dfrac{bc}{c-b} = \dfrac{bc(b-c)}{c-b} = -bc$ donc $H \in (GE)$
Les droites (BC), (FD) et (GE) sont donc concourantes.

EXERCICE 758

1. $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$ est orthonormé car le triangle ABC étant équilatéral alors $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$, de plus par leur définition $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de norme 1.

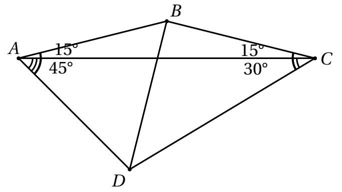
2. $A\left(-\dfrac{a}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0\right)$ et $C\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. $\overrightarrow{BG}\left(a\cos 30 ; a\sin 30\right)$, d'où $G\left(a\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{a}{2}\right)$
$\overrightarrow{AI}\left(-a\cos 30 ; a\sin 30\right)$, d'où $I\left(-a\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{a}{2}\right)$
$J\left(0 ; \dfrac{a}{2}\right)$
K est le milieu de $[CG]$ d'où $K\left(a\dfrac{1+\sqrt{3}}{4} ; a\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$
L est le milieu de $[CI]$ d'où $L\left(-a\dfrac{1+\sqrt{3}}{4} ; a\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$

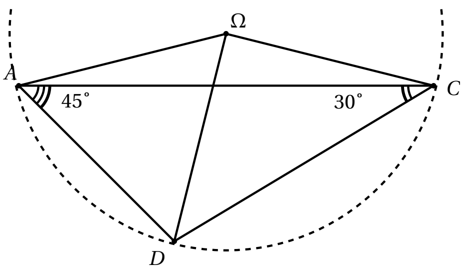
4. $LK^2 = \dfrac{a^2}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$
$JK^2 = JL^2 = \dfrac{a^2}{16}\left(16+8\sqrt{3}\right) = \dfrac{a^2}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$
Les trois distances sont égales, le triangle JKL est donc équilatéral.

EXERCICE 759

Commençons par faire une figure :



Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ADC.
Comme l'angle $\widehat{ACD}$ est obtus (105°), Ω et D sont de part et d'autre de la droite (AC).



D'après le théorème de l'angle inscrit :
$\widehat{A\Omega D} = 2\widehat{ACD} = 60°$ et $\widehat{D\Omega C} = 2\widehat{DAC} = 90°$.
Donc $\widehat{A\Omega C} = \widehat{A\Omega D} + \widehat{D\Omega C} = 150°$.
Comme le triangle $A\Omega C$ est isocèle en Ω, on en déduit que $\widehat{\Omega AC} = \widehat{\Omega CA} = 15°$.
Donc $\Omega = B$, on en déduit alors que $\widehat{DBC} = \widehat{D\Omega C} = 90°$.

EXERCICE 760

1. Le triangle ABC est rectangle en B, en appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons $AC = R\sqrt{6}$.
En calculant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, on obtient : $AC \times MB = AB \times BC$
d'où $MB = 2R \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$.
Le triangle BMC est rectangle en M, en appliquant le

théorème de Pythagore, nous obtenons $CM = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$.
$MA = AC - MC = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$.

2. Les triangles BFM et BOF sont rectangles respectivement en M et en O, ils ont donc l'hypoténuse $[BF]$ commune. Les quatre points sont donc sur le cercle de centre I, milieu de l'hypoténuse $[BF]$.
3. En appliquant la propriété des milieux dans le triangle ABC, on démontre que F est le milieu de $[AC]$. Le droite (OF) est la médiatrice du segment $[AB]$, le triangle AFB est donc isocèle en F, on en déduit alors que $BF = AF = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R$.
   Le rayon du cercle de centre I est donc égal à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}R$.

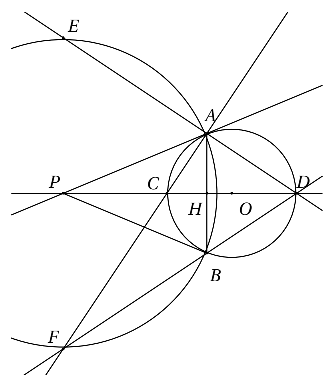
EXERCICE 761

Les triangles ABA' et ABB' sont rectangles d'hypoténuse commune $[AB]$, les points A, B, A' et B' appartiennent donc au cercle de diamètre $[AB]$.
Les angles $\left(\widehat{ABB'}\right)$ et $\left(\widehat{AA'B'}\right)$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux.
On démontre de même que les points B, C, B' et C' appartiennent au cercle de diamètre $[BC]$ et donc $\left(\widehat{ABB'}\right) = \left(\widehat{ACC'}\right)$
On démontre de même que les points A, C, A' et C' appartiennent au cercle de diamètre $[AC]$ et donc $\left(\widehat{ACC'}\right) = \left(\widehat{AA'C''}\right)$
Par transitivité $\widehat{AA'B'} = \widehat{ABB'} = \widehat{ACC'} = \widehat{AA'C'}$,
soit $\widehat{AA'B'} = \widehat{AA'C'}$, la droite (AA') est la bissectrice de l'angle $\widehat{B'A'C'}$.
On démontre de manière analogue que la droite (BB') est la bissectrice de l'angle $\widehat{A'B'C'}$ et la droite (CC') est la bissectrice de l'angle $\widehat{A'C'B'}$.

EXERCICE 762

1. Dans le trapèze $AMNB$, on a, quelle que soit la position de M, $AM = BN$ et la perpendiculaire au diamètre $[AB]$ passant par O est axe de symétrie du trapèze, appelons $\mathcal{D}$ cette droite.
   • Si $AM = R$ alors $AO = MO = AM$, le triangle AOM est équilatéral donc $\widehat{AOM} = 60°$.
   Comme $BN = AM$, on démontre de même que le triangle OBN est équilatéral donc $\widehat{BON} = 60°$.
   On en déduit alors que $\widehat{MON} = 60°$, sachant que $OM = ON$, on en déduit que le triangle MON est équilatéral donc $MN = OM = R$.
2. $AM = R$ alors le triangle ABP est équilatéral et le triangle OPA est rectangle en O, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient $OP = R\sqrt{3}$.
   Les droites (MB), (AN) et (OP) sont les médianes du triangle ABP, elles sont sécantes en S, donc S est le centre de gravité du triangle ABP.
   On en déduit alors que $OS = \dfrac{1}{3}OP = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$.
3. Quelle que soit la position de M, le triangle ABP est isocèle en P donc P appartient à l'axe de symétrie $\mathcal{D}$. De même, S appartient à la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 763



1. $OP^2 = (4+2,5)^2 = 42,25$ et
   $AP^2 + OA^2 = 6^2 + 2,5^2 = 42,25$
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PAD est rectangle en A, la droite (PA) est donc tangente au cercle $\mathcal{C}$.
2. Posons $\widehat{BAC} = a$ alors :
   • $\widehat{BDA} = a$ (intercepte le même arc) et $\widehat{ADC} = a$ (symétrie d'axe (CD))
   $\widehat{AOC} = 2a$ (angle au centre)
   • Le triangle AOC est isocèle en O
   donc $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 90 - a$.
   • Le triangle AOP est rectangle en A donc $\widehat{OAP} = 90°$
   On en déduit alors que $\widehat{CAP} = 90 - (90 - a) = a$.

$\widehat{CAP} = \widehat{CAB}$, la droite (AC) est donc la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{PAB}$.

D'autre part, le triangle CAD est inscrit dans un cercle de diamètre $[CD]$, il est donc rectangle en A, les droites (AC) et (AD) sont donc perpendiculaires en A.

La droite (AD) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{PAB}$.

Le point C appartient aux bissectrices des angles $\widehat{PAB}$ et $\widehat{APB}$, C est le centre du cercle inscrit dans le triangle PAB.

3. Les droites (AE) et (AF) sont perpendiculaires, le triangle AEF est donc rectangle en A. Les points A, E et F appartiennent au cercle de centre P donc $[EF]$ est un diamètre de ce cercle. Les points E, F et P sont donc alignés.

La droite (AF) est perpendiculaire à la droite (AE) donc (AF) est la hauteur issue de A dans le triangle EDF.

Par symétrie la droite (BE) est la hauteur issue de B, les droites (AF) et (BE) se coupent en C.

Le point C est l'orthocentre du triangle EDF, la droite (DP) est donc la hauteur issue de D, donc (EF) est perpendiculaire à (PD).

EXERCICE 764

1. On a $A(-1\,;\,-2)$, $B(4\,;\,0)$, $C(4\,;\,4)$ et $D(-1\,;\,2)$.

donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ est donc un parallélogramme.

2. Soit $E(x\,;\,y)$ alors $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x+1\\y+2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ si, et seulement si, $\begin{cases} x+1=10\\ y+2=4\end{cases}$

donc $E(9\,;\,2)$.

3. $BCPD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{BC}$ donc si, et seulement si, $\begin{cases} x+1=0\\ y-2=4\end{cases}$

On en déduit alors que P est de coordonnées $(-1\,;\,6)$.

4. $\overrightarrow{PE}\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{CE}$, les vecteurs $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, les points P, C et E sont donc alignés.

5. $AD^2 = 16$, $AE^2 = 116$ et $DE^2 = 100$

$AE^2 = AD^2 + DE^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ADE est rectangle en D.

6. Le triangle ADE est rectangle en D, il est donc inscrit dans un cercle de diamètre $[AE]$, le centre de ce cercle est donc le milieu du segment $[AE]$, soit le point B.

7. Le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon $AB) = \sqrt{29}$.

EXERCICE 765

1. Le triangle ABC est équilatéral et O centre de ce triangle, la droite (BO) est donc médiatrice du segment $[AC]$, E appartient à cette droite, le triangle AEC est donc isocèle en E.

2. Par construction, le triangle BCE est rectangle en C, par symétrie d'axe (OB), le triangle ABE est rectangle en A.

Ces deux triangles ont même hypoténuse $[BE]$, ils sont donc inscrits dans le même cercle de diamètre $[BE]$.

Le quadrilatère $ABEC$ est donc inscrit dans le cercle de diamètre $[BE]$.

3. Le triangle ABC est équilatéral de centre O donc $OA = OB = OC$, O est donc le centre du cercle de diamètre $[BE]$, ainsi $BE = 2AO$.

En appliquant le théorème dans le triangle ABD rectangle en D, on obtient $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

donc $AO = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

On en déduit alors que $BE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BEC rectangle en C, on obtient $EC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

4. D'après les résultats précédents, le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCE$ est de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

EXERCICE 766

1. Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires et sécantes en I, le triangle ABI est donc rectangle en I, les points A, B et I appartiennent donc au centre de diamètre $[AB]$.

Le point I appartient donc au cercle de centre O, milieu du segment $[AB]$.

2. Posons $\widehat{ABC} = a$ alors :
dans le triangle ABI rectangle en I, $\widehat{BAD} = 90° - a$.
dans le triangle ABD rectangle en B,
$\widehat{ADB} = 90° - (90° - a) = a$.
Les rectangles ABC et ABD ont deux angles de même mesure, un angle droit et un angle de mesure a, ils sont donc semblables.
Dans le triangle ABD : $\tan a = \dfrac{AB}{BD}$
Dans le triangle ABC : $\tan a = \dfrac{AC}{AB}$
On en déduit alors que $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{AB}$
d'où $AB^2 = AC \cdot BD$.

3. Les triangles AIB et CID sont rectangle en I, donc
$AB^2 + CD^2 = \left(AI^2 + BI^2\right) + \left(CI^2 + DI^2\right)$
$AB^2 + CD^2 = \left(AI^2 + CI^2\right) + \left(BI^2 + DI^2\right)$
$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$
car les triangles AIC et BID sont rectangles en I.

EXERCICE 767

1. Les angles $\widehat{BCE}$ et $\widehat{ACD}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux.
Dans le cercle $\mathcal{C}$, les angles $\widehat{CDA}$ et $\widehat{EBA}$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux.
Les triangles CAD et CBE, ont deux angles de mêmes mesures, ils sont donc semblables.
Les points C et B appartiennent au cercle de centre A donc $AC = AD$, le triangle CAD est donc isocèle en A. On en déduit alors que le triangle BCE est isocèle en E, la médiatrice de $[BC]$ passe donc par E.

2. Les triangles CAD et CBE sont homothétiques, il y a donc proportionnalité des longueurs : $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{DC}{BC}$
de plus $EC = BE$,
on en déduit alors que $CD \times BE = CA \times CB$.

3. $\widehat{BOD} = 2\widehat{BED}$ (angle au centre dans le cercle de centre O).
I milieu de $\widehat{BD}$ donc $\widehat{BOI} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOD}$ on en déduit alors que $\widehat{BEI} = \dfrac{1}{2}\widehat{BED}$, la droite (EI) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{BED}$ ou $\widehat{BEC}$, le triangle EBC étant isocèle en E, la bissectrice de l'angle E est aussi médiatrice du segment $[BC]$. On en déduit alors que I appartient à la médiatrice de $[BC]$.
I appartient à la médiatrice de $[BC]$ donc $IB = IC$.
D'autre part les points B, I et D appartiennent au cercle de centre O donc $OD = OI = OB$, de plus $\widehat{BOI} = \widehat{IOD}$ donc $ID = IB$
On en déduit alors que $IB = IC = ID$, les points B, C et D appartiennent à un cercle de centre I.

EXERCICE 768

1. $\widehat{CAM} = \dfrac{1}{2}\widehat{COM}$ et $\widehat{MAB} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOB}$ (angles au centre)
D'autre part (AM) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc $\widehat{CAM} = \widehat{MAB}$ on en déduit alors que $\widehat{COM} = \widehat{MOB}$, M est donc le milieu de l'arc $\widehat{BC}$.

2. $\widehat{MCD} = \widehat{DAB}$ et $\widehat{CMD} = \widehat{BDA}$ donc les triangles DMC et DBA ont deux angles de mêmes mesures, ils sont semblables.
(AM) bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc $\widehat{CAM} = \widehat{MAB}$ de plus $\widehat{CMA} = \widehat{CBA} = \widehat{DBA}$ donc les triangles CMA et DBA ont deux angles de mêmes mesures, ils sont donc semblables.
Les triangles DMC et CMA sont semblables donc $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MA}{MC}$ d'où $MC^2 = MA \times MD$.
Les triangles CMA et DBA sont semblables donc $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ d'où $AB \times AC = AM \times AD$.

EXERCICE 769

1. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$, il est donc rectangle en C.
D'autre part C est le milieu du segment $[AD]$, la droite (BC) est donc médiatrice du segment $[AD]$, on en déduit que le triangle ABD est isocèle en B.

2. Le triangle ABE est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$, il est donc rectangle en E, on a donc (AE) et (EB) perpendiculaires en E.
D'autre part (AC) et (BC) sont perpendiculaires et (AC) et (AE) sont aussi perpendiculaires. Le quadrilatère $ACBE$ a trois angles droits, c'est donc un rectangle.
Les diagonales d'un rectangle se coupent en leurs milieux, or O est milieu de $[AB]$ donc O est aussi milieu de $[CE]$. Les points E, O et C sont donc alignés.

3. On utilise la relation de Chasles et la définition des points D et F :
$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AE}$
or $ACBE$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.
On en déduit alors que $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{BD}$, les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires, les points F, B et E sont donc alignés.
En appliquant le propriété des milieux dans le triangle ADF, on démontre que (EC) (droite des milieux) est parallèle à (FD).
4. D'après les résultats précédents $DF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}AB$, la longueur DF est donc fixe, quelle que soit la position de C.
D'autre part, le triangle AFD est rectangle en A, les points A, F et D appartiennent donc au cercle de diamètre $[DF]$, or B est le milieu de $[DF]$ Lorsque le point C décrit le cercle de centre O, les points D et F décrivent le cercle de centre B et de rayon AB.

EXERCICE 770

Le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 100$ donc $BC = 10$ cm
Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
Notons $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
L'idée est de calculer $\mathcal{A}$ de deux façons différentes.
Le triangle ABC est rectangle en A donc
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times AC = 24 \text{ cm}^2$.
D'autre part $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AH \times BC = 5AH$
On en déduit alors que $5AH = 24$ d'où $AH = 4,8$ cm.

EXERCICE 771

Soient $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC, $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle MBC, $\mathcal{A}_2$ l'aire du triangle MAB et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle MAC alors $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}MM_1 \times BC$
$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}MM_2 \times AB$ et $\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2}MM_3 \times AC$
On a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ d'où
$MM_1 \times BC + MM_2 \times AB + MM_3 \times AC = 2\mathcal{A}$
Le triangle ABC est équilatéral donc $AC = BC = AB$ d'où
$MM_1 + MM_2 + MM_3 = 2AB \times \mathcal{A}$.

EXERCICE 772

1. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC \times AH$.
2. Dans le triangle AHC rectangle en H :
$AH = AC \times \sin\widehat{C}$
d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC \times AC \times \sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.
3. Dans le triangle ABH rectangle en H :
$AH = AB \times \sin\widehat{B}$
d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC \times AB \times \sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$.
Soit K le pied de la hauteur issue de B, alors
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AC \times BK$
dans le triangle ABK rectangle en K, $BK = AB \times \sin\widehat{A}$
d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AC \times AB \times \sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
4. **a.** $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{A} = 12 \text{ cm}^2$
b. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\widehat{B} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
c. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AC \times BC \times \sin\widehat{C} = \frac{25\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^2$.

EXERCICE 773

1. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AC \times BH = \frac{1}{2}AC \times AB\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
2. D'après la formule d'Al-Kashi :
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos\widehat{A}$
d'où $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
3.
$$\begin{aligned}\left(\sin\widehat{A}\right)^2 &= 1 - \left(\cos\widehat{A}\right)^2\\ &= \frac{(2bc)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}\\ &= \frac{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}{4b^2c^2}\\ &= \frac{\left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right)}{4b^2c^2}.\end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned}\left(\sin\widehat{A}\right)^2 &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2}\\ &= \frac{2p\left(2p-2b\right)\left(2p-2c\right)\left(2p-2a\right)}{4b^2c^2}.\\ &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}.\end{aligned}$$
5. $0 \leqslant \sin\widehat{A} \leqslant 1$ donc $\sin\widehat{A} = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$
d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \times \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$
$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
6. $p = 9$
$\mathcal{A} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$.

EXERCICE 774

1. Dans le triangle AHC rectangle en H :

$\sin\widehat{C} = \dfrac{AH}{AC}$ et $\cos\widehat{C} = \dfrac{HC}{AC}$
d'où $HA = AC \times \sin\widehat{C}$ et $HC = AC \times \cos\widehat{C}$.

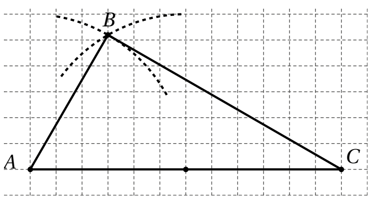
2. $BH = BC - HC = BC - AC \times \cos\widehat{C}$.

3. Dans le triangle ABH rectangle en H :
$AB^2 = BH^2 + AH^2$
En remplaçant BH et AH par les expressions trouvées précédemment, on obtient :
$AB^2 = \left(BC - AC \times \cos\widehat{C}\right)^2 + \left(AC \times \sin\widehat{C}\right)^2$
$AB^2 = BC^2 + AC^2\cos^2\widehat{C} - 2 \times BC \times AC \times \cos\widehat{C} + AC^2\sin^2\widehat{C}$.
Or quel que soit $\widehat{C}$, on a $\cos^2\widehat{C} + \sin^2\widehat{C} = 1$
donc $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos\widehat{C}$.

4. a. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{A} = 100 - 48\sqrt{3}$
d'où $BC = \sqrt{100 - 48\sqrt{3}} = 4,1$ cm à 10^{-1} près.
b. $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos\widehat{B} = 19$
d'où $AC = \sqrt{19}$ cm.
c. $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos\widehat{C} = 169$
d'où $AB = \sqrt{169} = 13$ cm.

EXERCICE 775

1.



2. $\cos\widehat{BAC} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$. On en déduit alors que :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{A}$
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \times AC$
$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 12 \times 6 = 108$
d'où $BC = \sqrt{108}$ cm.

3. $AC^2 = 144$ et $AB^2 + BC^2 = 108 + 34 = 144$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 776

• On applique la relation d'Al Kashi dans le triangle ABD :
$DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \times \cos\widehat{BAD} = 19$
donc $DB = \sqrt{19}$ cm.

• Dans un parallélogramme les angles opposés sont égaux et la somme des angles est égale à 360°.
On en déduit que $\widehat{ABC} = 120°$.

• On applique la relation d'Al Kashi dans le triangle ABC :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{ABC} = 49$
donc $DB = \sqrt{49} = 7$ cm.

EXERCICE 777

On applique la relation d'Al Kashi :
• $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\widehat{C}$
donc $\cos\widehat{C} = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \times BC} = \dfrac{23}{88}$
d'où $\widehat{C} = 74,85°$ au centième près.

• $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{B}$
donc $\cos\widehat{B} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \dfrac{73}{112}$
d'où $\widehat{B} = 49,32°$ au centième près.

• La somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, on en déduit alors que $\widehat{A} = 55,83°$.

EXERCICE 778

1. $OA^2 = x^2 + y^2$
$OB^2 = x'^2 + y'^2$
$AB^2 = \left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2$
$AB^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 - 2yy'$.

2. Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires si, et seulement si le triangle OAB est rectangle en O donc si, et seulement si $AB^2 = OA^2 + OB^2$
soit après simplification,
si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

3. a. $xx' + yy' = 3 \times 2 + 6 \times 1 = 12 \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
b. $xx' + yy' = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
c. $xx' + yy' = \sqrt{3} \times (-\sqrt{6}) - \sqrt{2} \times 3 = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 779

1. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\sin\widehat{B} = \dfrac{AH}{AB}$
d'où $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
Dans le triangle ACH rectangle en H : $\sin\widehat{C} = \dfrac{AH}{AC}$
d'où $AH = AC\sin\widehat{C} = b\sin\widehat{C}$.

2. D'après les résultats précédents : $c\sin\widehat{B} = b\sin\widehat{C}$
Les longueurs b et c étant non nuls, on en déduit que $\dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{c}$.

3. Soit K le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). En procédant de la même manière, on obtient $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b}$.

4. $S = \dfrac{1}{2}CK \times AB = \dfrac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{A}$
d'où $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

5. D'après le résultat précédent, b et c étant non nuls, on obtient $\sin\widehat{A} = \dfrac{2S}{bc}$.

6. a étant non nul, on peut alors écrire $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{2S}{abc}$.
D'où d'après les questions **2** et **3** :
$\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{c} = \dfrac{2S}{abc}$.

7. $\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} = 60°$
D'après la relation précédente :
$\dfrac{\sin\widehat{C}}{AB} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{BC}$
donc $AC = \dfrac{AB \times \sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}} = 107,26$ au centième près.

$BC = \dfrac{AB \times \sin\widehat{A}}{\sin\widehat{C}} = 137,27$ au centième près.
$S = \dfrac{1}{2}AC \times AB \times \sin\widehat{A} = 6375,64$ unités d'aire au centième près.

EXERCICE 780

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle PEL
On obtient $LE = 4\sqrt{2}$.

2. On applique la relation d'Al-Kashi dans le triangle LET
$LT^2 = LE^2 + TE^2 - 2LE \times TE \times \cos 30 = 57 - 20\sqrt{6}$
d'où $LT \approx 2,8$.

3. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle isocèle rectangle LAT :
$2TA^2 = LT^2$ d'où $TA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}LT \approx 2$.

EXERCICE 781

• Calcul de la longueur BD, pour cela appliquons la relation d'Al Kashi dans le triangle ABD :
$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos\widehat{BAD}$
$BD^2 = 7974,42$ au centième près
d'où $BD = 89,30$ m au centimètre près.

• Calcul d'une mesure de $\widehat{ADB}$, pour cela appliquons la relation des sinus dans le triangle ABD :
$\dfrac{\sin\widehat{ADB}}{AB} = \dfrac{\sin\widehat{BAD}}{BD}$
d'où $\sin\widehat{ADB} = \dfrac{AB \times \sin\widehat{BAD}}{BD} \approx 0,8075$
ainsi $\widehat{ADB} = 53,85°$ au centième près.

• Calcul d'une mesure de $\widehat{BDC}$:
$\widehat{BDC} = 196 - \widehat{ADB} = 142,15°$.

• Calcul de la longueur BC, pour cela appliquons la relation d'Al Kashi dans le triangle BCD :
$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \times BD \times CD \times \cos\widehat{BDC}$
$BC^2 = 17646,55$ au centième près
d'où $BC = 132,84$ m au centimètre près.

EXERCICE 782

1. • Le triangle OMC est rectangle en C
donc $\cos\alpha = \dfrac{OC}{OM}$ et $\sin\alpha = \dfrac{MC}{OM}$
or M appartient à $\mathcal{C}$ donc $OM = 1$
On en déduit alors que $OC = \cos\alpha$.

d'autre part $OCMS$ est un rectangle donc $MC = OS$
donc $OS = \sin\alpha$.

• Les droites (MC) et (IT) sont perpendiculaires à (OI), elles sont donc parallèles entre elles.
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OIT, on obtient : $\dfrac{OC}{OI} = \dfrac{MC}{IT}$
comme $MC = OS = \sin\alpha$, $OC = \cos\alpha$ et $OI = 1$, on en déduit que $IT = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

2. **a.** Dans le triangle OIM_1, $OI = OM_1$ et $\widehat{IOM_1} = 60°$, le triangle est donc équilatéral.

b. $OC_1 = \dfrac{1}{2}OI = \dfrac{1}{2}$
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OM_1C_1 rectangle en C_1, on obtient $M_1C_1^2 = \dfrac{3}{4}$
donc $M_1C_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OIT_1, on obtient $\dfrac{OI}{OC_1} = \dfrac{IT_1}{M_1C_1}$
d'où $IT_1 = \dfrac{M_1C_1}{OC_1} = \sqrt{3}$.

c. D'après les questions précédentes : $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$,
$\sin(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

3. **a.** Le triangle OC_2M_2 est rectangle en C_2 et $\widehat{C_2OM_2} = 45°$ donc $\widehat{OM_2C_2} = 45°$, le triangle OC_2M_2 est donc isocèle rectangle en C_2.

b. Posons $OC_2 = x$ alors $M_2C_2 = x$, d'après le théorème de Pythagore, $2x^2 = 1$ donc $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ainsi $OC_2 = M_2C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OIT_2, on obtient $IT_2 = 1$.

c. D'après les questions précédentes :

$\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan(45°) = 1$.

4. **a.** Par symétrie d'axe (OM_2), le triangle OM_3C_3 devient le triangle OM_1C_1 donc $OC_3 = OS_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $OS_3 = OC_1 = \frac{1}{2}$.

b. D'après les questions précédentes : $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.

c. $\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

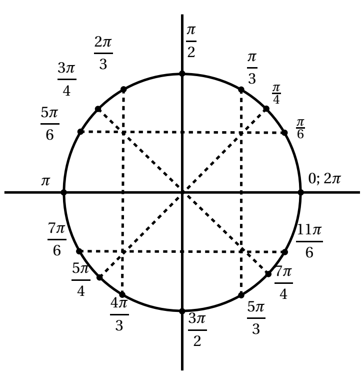
EXERCICE 783

1.

angle en degrés	180	90	0	60	30	45
angle en radians	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

angle en degrés	135	270	120	$\frac{180}{\pi} \approx 57,3$
angle en radians	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	1

2.



3.

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
$\cos\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

θ	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

EXERCICE 784

1. $\Omega M = R$.

2. $\Omega M = \sqrt{(x - x_\Omega)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2}$ d'où par passage au carré, une équation de $\mathcal{C}$: $(x - x_\omega)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2 = R^2$.

3.
$$\begin{aligned}(x - x_\Omega)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2 = R^2 &\Longrightarrow \Omega M^2 = R^2\\ &\Longrightarrow \Omega M = R\\ &\Longrightarrow M \in \mathcal{C}.\end{aligned}$$

EXERCICE 785

$\mathcal{C}_1$ d'équation $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$
ou encore $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
$\mathcal{C}_2$ d'équation $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$
ou encore $x^2 + y^2 - 2x - 8y = -8$
Les points d'intersections des cercles vérifient les deux équations, ils appartiennent donc à la droite d'équation $x + y = 2$.

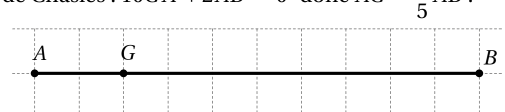
EXERCICE 786

Partie A

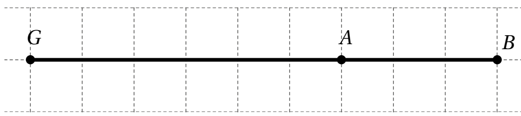
1. On a $m\overrightarrow{GA} = -m'\overrightarrow{GB}$ d'où $m\overrightarrow{GA} + m'\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

2. $m' = m\frac{GA}{GB} = 12$ kg.

3. On a $8\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, soit en utilisation la relation de Chasles : $10\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

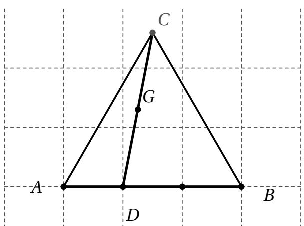


4. On a $-3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, soit en utilisant la relation de Chasles : $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$.



Partie B

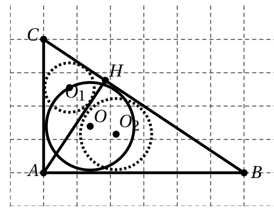
1. **a.** Par définition du barycentre :
$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
b. $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$.
c. En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :
$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GC}+\frac{3}{3}\overrightarrow{GD}$$
$$=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BD}\right)$$
or $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.
d. G est le milieu du segment $[DC]$.



2. **a.** Soit D le barycentre des points A et B de masses respectives 3 et 7 alors $3\overrightarrow{DA}+7\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$
On a de plus $10\overrightarrow{GD}+5\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
ou encore $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.
b. Soit E le barycentre des points A et C de masses respectives 1 et 6 alors $\overrightarrow{EA}+6\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{AE}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AC}$
Soit F le barycentre des points B et D de masses respectives 2 et 5 alors $2\overrightarrow{FB}+5\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{BF}=\frac{5}{7}\overrightarrow{BD}$
On en déduit alors que $\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{0}$, G est le milieu du segment $[EF]$.
c. Soit D le barycentre des points A et B de masses respectives 1 et -2 alors $\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$
donc $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$
on a donc $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, G est le milieu du segment $[DC]$.

EXERCICE 787

1. Soient r_1, r_2 et R les rayons des cercles de centres O_1, O_2 et O inscrits respectivement dans les triangles CAH, BAH et ABC.



En découpant l'aire du triangle ABC, on a :
$aire(ABC)=aire(AOB)+aire(BOC)+aire(AOC)$
de plus $aire(AOB)=\frac{1}{2}cR$
$aire(BOC)=\frac{1}{2}aR$ et $aire(AOC)=\frac{1}{2}bR$
d'où $aire(ABC)=\frac{A}{2}(a+b+c)R$.
D'autre part, $aire(ABC)=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}bc$
on en déduit que $bc=R(a+b+c)$ (1).
Pour tous réels b et c, $2bc=(b+c)^2-\left(b^2+c^2\right)$.
Or , dans le triangle ABC, on a $b^2+c^2=a^2$ donc
$bc=\frac{1}{2}\left((b+c)^2-a^2\right)=\frac{1}{2}(b+c-a)(b+c+a)$
Soit en remplaçant dans (1), bc par l'expression que nous venons d'obtenir :
$\frac{1}{2}(b+c-a)(b+c+a)=R(a+b+c)$
comme $a+b+c\neq 0$ alors $R=\dfrac{b+c-a}{2}$.

2. En appliquant cette formule aux triangles AHC et AHB, rectangles en H, on obtient :
$r_1=\dfrac{AH+CH-b}{2}$ et $r_2=\dfrac{AH+BH-c}{2}$, d'où
$$R+r_1+r_2=\frac{b+c-a+AH+CH-b+AH+BH-c}{2}$$
$R+r_1+r_2=AH$.

EXERCICE 788

Soit G le centre de gravité du triangle ABC, D, E et F les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Les triangles AGE et BGD sont rectangles en G, $AE=\frac{7}{2}$ et $BD=\frac{11}{2}$, donc :
$AG^2+GE^2=\frac{49}{4}$ et $BG^2+GD^2=\frac{121}{4}$.
Or $BG=2GE$ et $AG=2GD$.
D'où $4GD^2+GE^2=\frac{49}{4}$ et $4GE^2+GD^2=\frac{121}{4}$

Donc $GE^2 = \dfrac{29}{4}$ et $GD^2 = \dfrac{5}{4}$.
Le triangle GDE est rectangle en G donc
$ED^2 = GE^2 + GD^2 = \dfrac{34}{4}$.
Puisque D et E sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AB]$, $AB = 2ED = \sqrt{34}$.

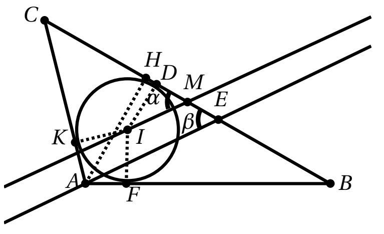
EXERCICE 789

Le triangle ABC est rectangle en A, le cercle circonscrit au triangle ABC est de centre O, le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ et de rayon $\dfrac{1}{2}BC$.
Posons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, R le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit.
En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons, on obtient la relation : $\dfrac{1}{2}bc = \dfrac{1}{2}ra + \dfrac{1}{2}rb + \dfrac{1}{2}rc$
d'où $bc = r(a+b+c)$.
D'autre part $a = 2R$, on a donc $r + R = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{bc}{a+b+c}$.
Comme le triangle ABC est rectangle en A : $b^2 + c^2 = a^2$
d'où $(b+c)^2 - 2bc = a^2$.
Donc $bc = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{2}$ soit $bc = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}$
par conséquent : $r + R = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b+c-a}{2} = \dfrac{b+c}{2}$.

EXERCICE 790

Les droites (AK) et (BC) sont parallèles, les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{KAC}$ sont correspondants donc égaux, les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{BAK}$ sont alternes-internes donc égaux.
(AK) est bissectrice de $\widehat{BAC}$ donc $\widehat{BAK} = \widehat{KAC}$ d'où $\widehat{BDA} = \widehat{DBA}$.
Le triangle ADB est donc isocèle en A donc $AD = AB$.
En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle BCD, on a $\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{CA}{CD}$, on en déduit que $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC}{AD}$,
or $AD = AB$, donc $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC}{AB}$ ou encore $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{AC}$.

EXERCICE 791



Posons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $R = id$, $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, S l'aire du triangle ABC, $\alpha = \widehat{DMI}$ et $\beta = \widehat{HEA}$.
Soit D, F et K les projetés orthogonaux de I sur les côtés du triangle ABC. Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent aux côtés du triangle ABC en ces trois points.
On a donc $AF = AK$, $BD = BF$ et $CK = CD$.
On en déduit que $AF + BD + CK = p$
or $AF + CK = AK + CK = b$ d'où $BD = p - b$.
• Dans le triangle IDM rectangle en D :
$\tan\alpha = \dfrac{ID}{DM}$ or $ID = r$ et $DM = BM - BD = \dfrac{a}{2} - (p-b)$
soit $DM = \dfrac{1}{2}(b-c)$ donc $\tan\alpha = \dfrac{2R}{b-c}$.
$S = aire(IAB) + aire(IAC) + aire(IBC)$,
donc $S = Rp$
d'où $R = \dfrac{S}{p}$ et $\tan\alpha = \dfrac{4S}{a+b+c)(b-c)}$.
D'autre part $S = \dfrac{1}{2}AH \times BC$.
Or $BC = a$ et $AH = c\sin\widehat{B}$,
on en déduit que $\tan\alpha = \dfrac{2ac\sin\widehat{B}}{(a+b+c)(b-c)}$.
• Dans le triangle AHE rectangle en H : $\tan\beta = \dfrac{AH}{EH}$.
Dans le triangle ABH rectangle en H : $BH = c\cos\widehat{B}$.
D'autre part $HE = HM + ME$ or $HM = BM - BH$ et $ME = DM = BM - BD$
donc $HE = 2BM - (BH + BD) = a - (c\cos\widehat{B} + p - b)$ soit $HE = p - c - c\cos\widehat{B}$.
par conséquent $\tan\beta = \dfrac{c\sin\widehat{B}}{p - c - c\cos\beta}$.
Or $p - c - c\cos\widehat{B} = \dfrac{1}{2}(a+b+c) - c - c\cos\widehat{B}$ soit

$$p - c - c\cos\widehat{B} = \frac{1}{2}\left(a + b - c - 2c\cos\widehat{B}\right)$$

$$\begin{aligned} p - c - c\cos\widehat{B} &= \frac{a\left(a + b - c - 2c\cos\widehat{B}\right)}{2a} \\ &= \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}{2a} \end{aligned}$$

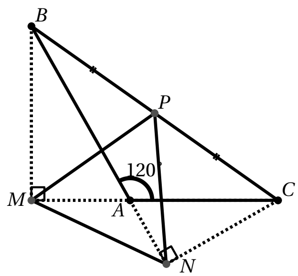
D'après la formule d'Al Kashi, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$
donc $a^2 - 2ac\cos\widehat{B} = b^2 - c^2$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} p - c - c\cos\widehat{B} &= \frac{b^2 - c^2 + ab - ac}{2a} \\ &= \frac{b-c)(b+c) + a(b-c)}{2a}. \end{aligned}$$

Donc $p - c - c\cos\widehat{B} = \dfrac{(b-c)(a+b+c)}{2a}$
et $\tan\beta = c\sin\widehat{B} \times \dfrac{2a}{(b-c)(a+b+c)}$.

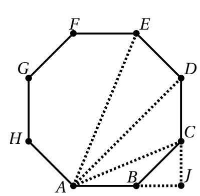
Conclusion : $\tan\alpha = \tan\beta = \dfrac{2ac\sin\widehat{B}}{a+b+c)(b-c)}$
d'où $\alpha = \beta$.
On en déduit que les droites (IM) et (AE) sont parallèles.

EXERCICE 792



Dans le triangle BMC rectangle en M, P est le milieu de l'hypoténuse $[AC]$ donc $PM = PC$.
Le triangle BNC rectangle en N donc $PN = PC$
On en déduit alors que $PM = PN$.
D'autre part, les rectangles BMC et BNC sont inscriptibles dans un même cercle de diamètre $[BC]$ et de centre P.
Donc l'angle au centre $\widehat{MPN} = 2\widehat{MBN}$ et $\widehat{MBN} = \widehat{MBA}$.
Or $\widehat{MBA}$ est l'un des angles aigus du triangle rectangle MBA donc $\widehat{MBA} + \widehat{MAB} = 90°$.
Comme $\widehat{MAB} = 180° - \widehat{CAB} = 60°$, on en déduit que $\widehat{MBA} = 60°$.
Donc $\widehat{MPN} = 60°$. Le triangle MPN est isocèle et possède un angle de 60°, il est donc équilatéral.

EXERCICE 793



Les angles de l'octogone ont pour mesure commune $\dfrac{6\times 180}{6} = 135°$.
Le triangle BJC est donc isocèle rectangle en J, on en déduit alors qie $BJ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

• Le triangle AJC est rectangle en J donc d'après le théorème de Pythagore,
$AC^2 = AJ^2 + CJ^2 = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
d'où $AC^2 = 2+\sqrt{2}$ et donc $AC = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.
• Le triangle ADJ est rectangle isocèle en J donc
$AD^2 = \sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+\sqrt{2}$
• Dans le triangle AFE rectangle en F :
$AE^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 4+2\sqrt{2}$.
donc $AE = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

EXERCICE 794

Si on note $AB = x$, on a $BC = 1-x$ et $AC = \sqrt{2x^2-2x+1}$.
Comme $[AC]$ est la diagonale d'un carré, on en déduit une expression de l'aire du quadrilatère :
$S = \dfrac{1}{2}x(1-x) + \dfrac{1}{4}\left(2x^2-2x+1\right) = \dfrac{1}{4}$

EXERCICE 795

Posons $AB = 2a$ et $BC = 2b$ on en déduit alors que $AC = \sqrt{4a^2+4b^2}$ et donc $OA = \sqrt{a^2+b^2}$
Calculons les différentes aires :
• $aire(\mathcal{C}) = \pi\left(a^2+b^2\right)$
• $aire(\mathcal{C}_1) = aire(\mathcal{C}_3) = \pi a^2$
• $aire(\mathcal{C}_2) = aire(\mathcal{C}_4) = \pi b^2$
• $aire(ABCD) = 4ab$.
On en déduit l'aire des lunules $\mathcal{A}$:
$\mathcal{A} = \pi\left(a^2+b^2\right) - \pi a^2 - \pi b^2 + 4ab$
donc $\mathcal{A} = 4ab$, l'aire des lunules est donc égale à l'aire du rectangle central.

EXERCICE 796

Rappel : $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ et $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$.
Alors $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S = 2\left(b^2+c^2\right) - 2bc\left(\cos\widehat{A}+\sqrt{3}\sin\widehat{A}\right)$.
Or $\cos\widehat{A}+\sqrt{3}\sin\widehat{A} = 2\cos\left(\widehat{A}-60°\right)$,
ainsi $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S = 2\Big(b^2+c^2-2bc\cos\left(\widehat{A}-60°\right)\Big)$,
et $b^2+c^2-2bc\cos\left(\widehat{A}-60°\right) = (b-c)^2 + 2bc\Big(1-\cos\left(\widehat{A}-60°\right)\Big)$.
Or quel que soit la mesure de l'angle $\widehat{A}$, $\cos\left(\widehat{A}-60°\right) \leqslant 1$
donc $1-\cos\left(\widehat{A}-60°\right) \geqslant 0$.
On en déduit alors que $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \geqslant 0$ donc $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

Il y a égalité dans le cas où $\cos\left(\widehat{A}-60°\right)=1$ donc $\widehat{A}=60°$, c'est-à-dire lorsque le triangle est équilatéral.

EXERCICE 797

• Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du trapèze $PQRT$:
$\mathcal{A}_1 = PQ \times \dfrac{PT+QR}{2} = 40.$
• Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire du triangle RST.
Pour calculer cette aire il nous manque un angle ou la longueur du côté $[RT]$.
Posons U le projeté orthogonal de R sur $[PT]$, dans le triangle RUT, rectangle en U, d'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RU^2 + UT^2 = 100$
donc $RT = 10$.
Nous connaissons la longueur des trois côtés, nous pouvons appliquer la formule de Héron.
$p = \dfrac{13+13+10}{2} = 18$ alors
$\mathcal{A}_2 = \sqrt{18\times(18-13)\times(18-15)\times(18-10)}$
$\quad = 5\sqrt{18\times 8} = 60.$
L'aire du pentagone est donc 100.

EXERCICE 798

Soit A le centre de la coupe du conduit, B le centre d'un des demi-cercles et C le centre du grand cercle.
Posons x le rayon du conduit, le grand cercle est de diamètre 12, donc de rayon 6, les deux demi-cercles sont de rayon 3,
on a alors $BC = 3$, $AB = x+3$ et $AC = 6-x$.
Le triangle ABC étant rectangle en C, on en déduit que $(x+3)^2 = x^2 + (6-x)^2$
soit après développement et simplification $x = 2$ m.

5.4 Probabilités

EXERCICE 799

$t = \dfrac{2\,175\,600}{67\,400\,000} \times 100 = 3,23\%$ au centième près.

EXERCICE 800

1. $p = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4} = 0,25.$
2. Nombre total d'élèves : $N = 259+126+136+5 = 526$.
   Elèves ayant choisi l'anglais :
   $t_1 = \dfrac{259}{526}\times 100 = 49,24\%$
   Elèves ayant choisi l'allemand :
   $t_2 = \dfrac{126}{526}\times 100 = 23,95\%$
   Elèves ayant choisi l'espagnol :
   $t_3 = \dfrac{136}{526}\times 100 = 25,86\%$
   Elèves ayant choisi le chinois :
   $t_4 = \dfrac{5}{526}\times 100 = 0,95\%$

EXERCICE 801

Soit P la production de blé de l'Europe :
$P = 653 \times \dfrac{32}{100} = 208,96$ soit 208,96 milliards de tonnes.

EXERCICE 802

Soit C le chiffre d'affaire de la société en 2021, on a $C \times \dfrac{2,5}{100} = 15\,000$ donc $C = \dfrac{15\,000\times 100}{2,5} = 600\,000$.
Soit un chiffre d'affaire estimé à 600 000 € pour l'année 2021.

EXERCICE 803

1.

	tri sélectif	pass tri	Total
sensibles au DD	50	5	55
pas sensibles au DD	10	35	45
Total	60	40	100

2. 40% soit 2 habitants sur 5 ne pratiquent pas le tri sélectif.
3. $10+50+5 = 65$, soit 13 habitants sur 20 sont sensibles au développement durable ou pratiquent le tri sélectif.
4. 35% soit 7 habitants sur 20 sont insensibles au développement durable et ne pratiquent pas le tri sélectif.

EXERCICE 804

1. $p = \dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10}$ il y a donc 70% de filles dans la classe.
2. $75\,250 - 24\,525 = 50\,725$ soit 50 725 visiteurs Français.
   $p = \dfrac{50\,725}{75\,250} = 0,674$ soit 67,4% de visiteurs Français.

EXERCICE 805

Soit A le nombre d'élèves admis et E les élèves ayant échoué :
$A = 380 \times \dfrac{75}{100} = 285$ et $E = 380 - 285 = 95$
285 élèves ont été admis, 95 ont échoué.

EXERCICE 806

Soit C la consommation de soins hospitaliers en 2006.

$C = 69,9 + 69,9 \times \dfrac{4,3}{100} = 73,0455$
soit une consommation de 73 milliards d'euros.

EXERCICE 807

1. Il y a 60% de garçons donc 40% de filles, soit F le nombre de filles dans la classe,
$F = 35 \times \dfrac{40}{100} = 14$ soit 14 filles.
2. $p = \dfrac{560}{1600} = 0,35$ soit 35 % d'élèves de seconde dans le lycée.

EXERCICE 808

1. $p = \dfrac{705}{1500} = 0,47$
47% de la population est favorable à M.Durand.
2. $720 \times \dfrac{5}{6} = 600$, 600 habitants vivent de la pêche.

EXERCICE 809

1. **a.** $25\% = \dfrac{25}{100} = 0,25$
b. $95\% = \dfrac{95}{100} = 0,95$
c. $2\% = \dfrac{2}{100} = 0,02$
d. $9,95\% = \dfrac{9,95}{100} = 0,0995$
e. $0,3\% = \dfrac{0,3}{100} = 0,003$
f. $0,04\% = \dfrac{0,04}{100} = 0,0004$
g. $250\% = \dfrac{250}{100} = 2,5$
h. $20,6\% = \dfrac{20,6}{100} = 0,206$.
2. **a.** $0,18 = \dfrac{25}{100} = 18\%$
b. $0,5675 = \dfrac{56,75}{100} = 56,75\%$
c. $0,723 = \dfrac{72,3}{100} = 72,3\%$
d. $0,0125 = \dfrac{1,25}{100} = 1,25\%$
e. $1,23 = \dfrac{123}{100} = 123\%$
f. $3,5 = \dfrac{350}{100} = 350\%$
g. $0,0025 = \dfrac{0,25}{100} = 0,25\%$
h. $0,0205 = \dfrac{2,05}{100} = 2,05\%$.

EXERCICE 810

Si les deux clubs ont le même nombre de joueurs, Math a raison. Mais si par exemple le club Alpha a 100 joueurs et le club Beta 200, 30 auront moins de 18 ans dans le club Alpha et 50 dans le club Alpha.
Nous ne connaissons pas les effectifs des deux clubs, l'affirmation de Math est en général fausse.

EXERCICE 811

1. $N = 30 \times 0,7 = 21$, 21 élèves sont demi-pensionnaires.
2. $N = 28,4 \times 0,095 = 2,698$, soit 2,7 millions de personnes au chômage.

EXERCICE 812

1. $22345 - 17329 = 5016$, 5016 personnes se sont abstenu.
$p = \dfrac{5016}{22345} \approx 0,2245$ soit 22,45% d'abstention.
2. $\dfrac{11245}{17329} \approx 0,6489$,
M. Jean a recueilli 64,89% des voix des votants.
$\dfrac{11245}{22345} \approx 0,5032$,
M. Jean a recueilli 50,32% des voix des inscrits.

EXERCICE 813

1. $35 + 28 + 17 = 80$,
il y a au total 80 élèves dans ces trois clubs, entre lesquels il faut répartir la somme de 3600 €.
Soient S_1, S_2 et S_3 la somme revenant respectivement aux clubs de photos, d'escalade et d'échecs.
$S_1 = \dfrac{35 \times 3600}{80} = 1575$ €
$S_2 = \dfrac{28 \times 3600}{80} = 1260$ €
$S_3 = \dfrac{17 \times 3600}{80} = 756$ €.
2. Nombre de polars vendus : $1250 \times 0,2 = 250$.
Nombre de BD vendues : $1250 \times 0,42 = 525$.
Nombre de livres de littérature :
$1250 - 250 - 525 = 475$.
3. Soit P le prix à payer pour 600g.
$P = \dfrac{600 \times 1,05}{350} = 1,8$ soit 1€ 80.

EXERCICE 814

1. $45+70+110=225$, soit une surface totale de 225 m^2.
La répartition des charges est proportionnelle à la surface de l'appartement donc :
pour 45 m^2 : $\dfrac{45\times1500}{225}=300$ € ;
pour 70 m^2 : $\dfrac{70\times1500}{225}=466,67$ € ;
pour 45 m^2 : $\dfrac{110\times1500}{225}=733,33$ €.
2. $\dfrac{8,98}{8}=1,1225$ et $\dfrac{36,41}{36}\neq1,1225$.
Le prix de la communication n'est donc pas proportionnel à la durée de l'appel.

EXERCICE 815

1. $19+12=31$ donc 5 élèves étudient les deux langues.
$\dfrac{5}{26}\approx0,1923$ soit 19,23% de la classe.
2. $100-19,23=80,77$ donc 80,77% des élèves n'étudient qu'une langue des deux langues.
3. Parmi les 19 élèves étudiant l'anglais, 6 étudient aussi l'espagnol, donc 13 n'étudient que l'anglais.
De plus 21 élèves de la classe n'étudient qu'une des deux langues.
$\dfrac{13}{21}\approx0,6190$, donc 61,9% des élèves n'étudiant qu'une des deux langues étudient l'anglais.

EXERCICE 816

1.

Nombre de personnes qui	ont acheté A	n'ont pas acheté A	Total
ont vu une affiche	200	450	650
n'ont pas vu d'affiche	100	250	350
Total	300	700	1000

2. 300 personnes ont acheté le produit A, soit 30% de la population étudiée.
3. 650 personnes ont vu une affiche, soit 65% de la population étudiée.
4. 200 personnes ont vu une affiche et acheté le produit A, soit 20% de la population étudiée.
5. $300+650-200=750$ personnes ont vu une affiche ou acheté le produit A, soit 75% de la population étudiée.
6. 100 personnes n'ont pas vu une affiche et ont acheté le produit A, soit 10% de la population étudiée.

EXERCICE 817

1.

	Internes	Demi-P	Externes	Total
Filles	120	240	440	800
Garçons	200	240	760	1 200
Total	320	480	1 200	20 000

2. Parmi les 320 internes, il y a 120 filles, $\dfrac{120}{320}=0,375$, il y a donc 37,5% de filles parmi les internes.
3. Il y a 480 demi-pensionnaires, $\dfrac{480}{2000}=0,24$, soit 24% des élèves de l'établissement sont demi-pensionnaires.

EXERCICE 818

1.

Nombre d'étudiants	chant	pas chant	Total
danse	9	456	465
pas danse	51	684	735
Total	60	1140	1200

2. 465 étudiants pratiquent la danse, $\dfrac{465}{1200}=0,3875$, soit 38,75% des étudiants.
3. 684 étudiants ne pratiquent aucun atelier,
$\dfrac{684}{1200}=0,57$, soit 57% des étudiants.
4. $100-57=43$, 43% des étudiants pratiquent la danse contemporaine ou le chant choral.
5. 735 étudiants ne pratiquent pas la danse contemporaine, parmi eux 51 font du chant choral,
$\dfrac{51}{735}\approx0,0694$, soit 6,94%

EXERCICE 819

1.

Groupe	A	B	AB	O	Total
Rh+	3 280	810	415	3 600	8 105
Rh-	720	190	85	900	1 895
Total	4 000	1 000	500	4 500	10 000

2. $\dfrac{4500}{10000}=0,45$, 45% de la population est du groupe O.

3. $\frac{8105}{10000} = 0,8105$, 81,05% de la population est de rhésus positif.

4. $\frac{3600}{10000} = 0,36$, 36% de la population est du groupe O et de rhésus positif.

5. $\frac{4500+8105-3600}{10000} = 0,9005$, 90,05% de la population est du groupe O ou de rhésus positif.

EXERCICE 820

1.

	Français	Etrangers	Total
1 mandat	240	69	309
2 mandats ou plus	72	4	76
Total	312	73	385

2. $\frac{240}{385} \approx 0,6234$, 62,34% des dirigeants français n'ont qu'un seul mandat.
3. $72 \times 0,45 = 32,4$, donc 32 des administrateurs français qui cumulent au moins deux mandats sont issus des grands corps d'état.
4. $\frac{69}{385} = 0,1792$, 17,92% des administrateurs d'une société composant le CAC 40 sont étrangers et avec un seul mandat.

EXERCICE 821

1.

Coloris \ Taille	S	M	L	XL	Total
vert	8	10	7	0	25
bleu	8	24	20	8	60
rouge	8	12	15	0	35
Total	24	46	42	8	120

2. $\frac{25}{120} = \frac{5}{24} \approx 0,2083$, 5 pantalons sur 24 sont verts.
3. $\frac{42}{120} = \frac{7}{20} = 0,35$, 7 pantalons sur 20 sont en taille L.
4. $\frac{7}{120} \approx 0,0583$,
7 pantalons sur 120 sont verts, en taille L.
5. $\frac{42+25-7}{120} = \frac{1}{2}$,
1 pantalon sur 2 est vert ou en taille L.
6. $\frac{7}{25} = 0,28$, 7 pantalons sur 25 sont en taille L parmi les pantalons verts.

EXERCICE 822

1. **a.** Il y a 44 % de femmes dans l'ensemble de la population active occupant un emploi ($9793 \div 22122 \times 100$).
b. 76 % des employés sont des femmes ($4772 \div 6280 \times 100$).
c. 24 % des employés sont des hommes ($100 - 76$).
d. 28 % de l'ensemble de la population active occupant un emploi sont des employés ($6280 \div 22122 \times 100$).
e. 49 % de l'ensemble des femmes actives occupant un emploi sont des employées ($4772 \div 9793 \times 100$).
f. En 1995, un ouvrier sur 5 était une femme ($1145 \div 5845$).

2. $\frac{296}{22122} \approx 0,0134$ soit environ 1,34% de femmes agricultrices.

3. $\frac{296}{802} \approx 0,3691$, il y a environ 36,91% de femmes chez les agriculteurs.

EXERCICE 823

1. **a.** $300 \times \frac{2}{100} = 6$,
donc 6 montres présentent le défaut A.
b. $300 \times \frac{7}{100} = 21$,
donc 21 montres présentent le défaut B.
c.

Nombre de montres	défaut A	pas le défaut A	Total
défaut B	5	16	21
pas le défaut B	1	278	279
Total	6	294	300

2. **a.** $f = \frac{5}{300} = 0,0167$ soit 1,67%.
b. $p = \frac{5}{21} \approx 0,2381$, environ 23,81 % des montres présentant le défaut B, présentent aussi le défaut A.
c. 278 montres sur 300 ne présentent aucun des deux défauts, or $\frac{278}{300} \approx 0,9267$ soit 92,67% des montres

ne présentent aucun des deux défauts. Le directeur à tort.

EXERCICE 824

1.

	Licenciés à la FFF	Non licenciés à la FFF	Total
Equipe A	10 125	49 375	59 500
Equipe B	25 375	125	25 500
Total	35 500	49 500	85 000

2. $\dfrac{59\,500}{85\,000} = 0,7$,
70% des spectateurs sont supporteurs de l'équipe A.

3. $\dfrac{35\,500}{85\,000} \approx 0,4176$,
41,76% des spectateurs sont licenciés à la FFF.

4. $\dfrac{10\,125}{85\,000} \approx 0,1191$,
11,91% des spectateurs sont licenciés à la FFF et supporteurs de l'équipe A.

5. $\dfrac{10\,125}{35\,500} \approx 0,2852$,
parmi les spectateurs licenciés à la FFF, 28,52% sont supporteurs de l'équipe A.

6. $\dfrac{10\,125}{59\,500} \approx 0,1702$,
parmi les supporteurs de l'équipe A, 17,02% sont licenciés à la FFF.

EXERCICE 825

1. b - 2. c - 3. a - 4. c - 5. b - 6. a - 7. b

EXERCICE 826

1. $70 - 53 = 17$, donc 17 clients ont choisi la formule C à midi.

2. **a.** $f_1 = \dfrac{27}{75} = 0,36$, 36% des clients qui sont venus déjeuner ont choisi la formule A.

b. $f_2 = \dfrac{20}{51} = 0,392$ à 10^{-3} , 39,2% des clients ayant choisi

la formule B sont venus dîner.

3. $f_3 = \dfrac{75}{160} = 0,46875$, 46,875% des clients sont venus déjeuner.

4. Les formules avec dessert sont les formules B et C, soit au total 121 repas, $\dfrac{121}{160} = 0,75625$ et $\dfrac{3}{4} = 0,75$.
Le patron a donc raison.

EXERCICE 827

a. $c = 1 + \dfrac{20}{100} = 1 + 0,2 = 1,2$

b. $c = 1 + \dfrac{5,6}{100} = 1 + 0,056 = 1,056$

c. $c = 1 + \dfrac{10,25}{100} = 1 + 0,1025 = 1,1025$

d. $c = 1 + \dfrac{100}{100} = 1 + 1 = 2$

e. $c = 1 + \dfrac{0,7}{100} = 1 + 0,007 = 1,007$

f. $c = 1 + \dfrac{350}{100} = 1 + 3,5 = 4,5$

g. $c = 1 + \dfrac{0,02}{100} = 1 + 0,0002 = 1,0002$

h. $c = 1 + \dfrac{1}{100} = 1 + 0,01 = 1,01$

EXERCICE 828

a. $c = 1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$

b. $c = 1 - \dfrac{5,6}{100} = 1 - 0,056 = 0,944$

c. $c = 1 - \dfrac{10,25}{100} = 1 - 0,1025 = 0,8975$

d. $c = 1 - \dfrac{100}{100} = 1 - 1 = 0$

e. $c = 1 - \dfrac{7}{100} = 1 - 0,07 = 0,93$

f. $c = 1 - \dfrac{0,35}{100} = 1 - 0,0035 = 0,9965$

g. $c = 1 - \dfrac{0,02}{100} = 1 - 0,0002 = 0,9998$

h. $c = 1 - \dfrac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$

EXERCICE 829

a. $c - 1 = 0,25 = \dfrac{25}{100}$ augmentation de 25%.

b. $c - 1 = 0,005 = \dfrac{0,5}{100}$ augmentation de 0,5%.

c. $c-1=-0,8=-\dfrac{80}{100}$ diminution de 80 %.

d. $c-1=-0,001=-\dfrac{0,1}{100}$ diminution de 0,1 %.

e. $c-1=4=\dfrac{400}{100}$ augmentation de 400%.

f. $c-1=-0,65=-\dfrac{65}{100}$ diminution de 65 %.

g. $c-1=0,543=\dfrac{54,3}{100}$ augmentation de 54,3%.

h. $c-1=-0,0025=-\dfrac{0,25}{100}$ diminution de 0,25 %.

EXERCICE 830

• Variation absolue : $105-120=-15$

• $t=\dfrac{105-120}{105}\times 100=-12,5\%$

La population du village a diminué de 12,5%, ce qui correspond à 15 personnes.

EXERCICE 831

$t=\dfrac{260-240}{240}\approx 0,083$ soit une augmentation de $8,3\%$.

EXERCICE 832

30 € correspond à la variation absolue, on en déduit alors que $t=\dfrac{30}{1200}=0,025$ soit une augmentation de $2,5\%$.

EXERCICE 833

$t=\dfrac{-0,3}{12,30}\approx -0,0244$ soit une réduction de $2,44\%$.

EXERCICE 834

$t=\dfrac{-4,5}{48}=-0,09375$, soit une diminution de $9,375\%$.

EXERCICE 835

1. **a.** $c=1,1$
   b. $c=0,9$
   c. $c=1,003$
   d. $c=0,03$
   e. $c=3,5$
2. **a.** hausse de 30%
   b. hausse de $0,2\%$
   c. baisse de 1%
   d. hausse de 297%
   e. baisse de 99,3%
   f. hausse de 1100%.

EXERCICE 836

Il y a 40% de filles donc 60% de garçons,
$p=0,4\times 0,33+0,6\times 0,11=0,198$ Il y a donc $19,8\%$ de fumeurs dans la classe.

EXERCICE 837

1. • Chiffre d'affaires : $V_1=50,4-54=-3,6$ soit une baisse du chiffre d'affaires de 3,6 milliards de dollars.
   • Bénéfice net : $V_2=0,7-0,49=0,21$ soit une augmentation de bénéfice net de 0,21 milliards de dollars.
   • Nombre d'avions livrés : $V_3=281-381=100$, soit une diminution des livraisons de 100 avions.
2. • Chiffre d'affaires : $t_1=\dfrac{50,4-54}{54}\approx -0,0667$ soit une baisse de $6,67\%$
   • Bénéfice net : $t_2=\dfrac{0,7-0,49}{0,46}\approx 0,4286$ soit une augmentation de 42,86%
   • Nombre d'avions livrés : $t_3=\dfrac{281-381}{381}=-0,2625$ soit une baisse de $26,25\%$.
3. • $50,4\times(1-0,03667)=47,04$ soit un chiffre d'affaire estimé à 47 milliards de dollars.
   • $0,70\times 1,4286=0,99302$ soit un bénéfice estimé à 0,99 milliards de dollars.
   • $281\times(1-0,2625)=207,2375$ soit une estimation de 207 avions livrés.

EXERCICE 838

1. Soit R le nouveau prix de la robe :
   $R=56\times(1-0,3)=39,2$ soit 39,20 €.
2. Soit t le pourcentage de réduction de la veste :
   $t=\dfrac{25-35}{35}\approx -0,2857$, soit une réduction de 28,57%.
3. $t=\dfrac{230-225}{225}\approx 0,0222$ soit une augmentation de $2,22\%$.

EXERCICE 839

$T=94\times 1,05=98,7$, la fillette mesure 98,7 cm.

EXERCICE 840

Soit D la distance au premier lancer, $D\times 0,98=76,93$ donc $D=\dfrac{76,93}{0,98}=78,5$.

Le premier lancer est arrivé à 78,5 m.

EXERCICE 841

Le prix est divisé par 3, donc $c = \frac{1}{3} = 0,3333$.
$c - 1 = -0,6667$ soit une baisse de 66,67%.

EXERCICE 842

1. Soit p le prix des vacances de Christophe l'an dernier.
   $t_1 = \frac{2p - p}{p} = 1$ soit une augmentation de 100%.
   $c_1 = 1 + 1 = 2$.
2. Soit p le prix des vacances de Djamila l'an dernier.
   $t_2 = \frac{\frac{p}{2} - p}{p} = 0,5$ soit une baisse de 50%.
   $c_2 = 1 - 0,5 = 0,5$.

EXERCICE 843

1. $1\,360 \times 1,200 = 1\,632$ €.
2. Soit P le prix hors taxe, $P \times 1,2 = 12\,380$
   donc $P = \frac{12\,380}{1,2} = 10\,316,67$ €.
3. Soit P le prix hors taxe, $P \times 1,2 = 78\,000$
   donc $P = \frac{78\,000}{1,2} = 65\,000$ €.
4. $25\,000 \times 1,2 = 30\,000$.

EXERCICE 844

1. $25 \times 1,2 = 30$ soit 30 €.
2. $40 \times 0,85 = 34$, la chemise sera vendue 34 €.
3. $23\,456 \div 1,06 = 22\,128,30$, soit 22 128 habitants.

EXERCICE 845

1. $P_A = 19\,500 \times 1,02 = 19\,890$ €.
2. $P_B = 25\,000 \times 1,02 = 25\,500$ €.
3. Soit P le prix du modèle C avant le 1^er^ juillet.
   $P \times 1,02 = 22\,440$
   donc $P = \frac{22\,440}{1,02} = 22\,000$

EXERCICE 846

1. $1\,350 \times 1,03 = 1\,390,5$, soit 1 390,50 €.
2. $53 \times 0,8 = 42,4$ soit 42,40 €.
3. $516,8 \times 0,228 = 117,8304$ soit 117,8 millions de livres de poche.

EXERCICE 847

1. $173,1 \div 0,85 = 203,65$ arrondi au centième.
2. $1350 \div 1,08 = 1250$ €.
3. $1650 \times 0,7 = 1155$ €.
4. $\frac{85,74 - 99,70}{99,70} = -0,14$ (arrondi au centième), soit une remise de 14%.

EXERCICE 848

1. c – 2. d – 3. a – 4. b

EXERCICE 849

Soit p le pourcentage en sucre du mélange :
$6 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = 10 \times p$ donc $p = 0,26$
soit un total de 26% de sucre dans le mélange.

EXERCICE 850

Soit m la masse de l'échantillon de laiton.
$m \times 0,7 = 336$ donc $m = \frac{336}{0,7} = 480$, l'échantillon a une masse de 480 g.

EXERCICE 851

1. $58\ 507\ 000 \times 0,979 \times 0,126 = 7\ 217\ 072,478$, soit 7 217 072 personnes vivant seules.
2. $58\ 507\ 000 \times 0,979 \times 0,834 = 47\ 770\ 146,4$, soit 47 770 146 personnes vivant en famille.

EXERCICE 852

1. Compléter le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015	2020
Prix	1,35	1,40	1,50	1,69	2,15
Indice	100	103,7	111,1	125	159,3

2. $159,3 - 100 = 59,3$, soit une augmentation du prix de 2000 à 2020, de 59,3%.

EXERCICE 853

1. $t = \frac{200,84 - 105,71}{105,71} = 0,8999$ soit une augmentation de 89,99%.
2.

Année	2010	2011	2012	2013
Evolution annuelle en %		15,55	−3,57	13,35
Indice	100	115,55	111,43	126,30

Année	2014	2015	2016	2017
Evolution annuelle en %	9,60	0,82	8,40	5,90
Indice	158,90	160,20	136,91	144,99

Année	2018	2019	2020
Evolution annuelle en %	6,04	5,62	5,88
Indice	169,88	179,43	189,99

3. La plus forte hausse a été enregistrée en 2011.
4. $125 \times 200,84 = 25\,105$,
   Tom détenait, fin 2020, 25 105 €.
   $125 \times (200,84 - 105,71) = 11\,891,25$, s'il avait tout vendu à la fin de l'année 2020, il aurait gagné 11 891,25 €.

EXERCICE 854

1. Indice de l'année 2000 : $I_1 = \dfrac{220 \times 1291}{1241} = 228,9$.
   Indice de l'année 2010 : $I_2 = \dfrac{220 \times 1369}{1241} = 242,7$.
   Indice de l'année 2020 : $I_3 = \dfrac{220 \times 1439}{1241} = 255,1$.
2. Entre 1950 et 1995, la population a augmenté de 120%.
   Entre 1950 et 2020, la population a augmenté de 155,1%.
3. $P_1 = \dfrac{100 \times 1241}{220} = 564$, en 1950, la population de la Chine était de 564 millions d'habitants.
   $P_2 = \dfrac{151 \times 1241}{220} = 851,78$, en 1970, la population de la Chine était de 851,78 millions d'habitants.
4. Entre 1950 et 1995, la population a augmenté de 120%,
   $t = \dfrac{255,1-220}{220} \approx 0,1595$, entre 1995 et 2020,
   la population n'a augmenté que d'environ 16%.

EXERCICE 855

$c = (1+0,1628) \times (1-0,5682) = 1,1628 \times 0,4318 \approx 0,5021$
$t = 1 - 0,5021 = -0,4979$, soit une baisse globale de 49,79%.

EXERCICE 856

1. La réduction est de 100%.
2. Non, cela reviendrait à obtenir l'objet et le prix de l'objet.
3. $c = 0,5^4 = 0,0625$ et $t = 0,0625-1 = -0,9375$, soit une baisse globale de 93,75%.

EXERCICE 857

1. $243 \times \dfrac{1}{1,08} = 225$.
2. $152 \times \dfrac{1}{0,95} = 160$.
3. $c = 0,95 \times 0,92 = 0,874$ et $t = 0,874 - 1 = -0,126$ soit une baisse globale de 12,6%.
4. $c = \dfrac{1}{0,8} = 1,25$ soit une hausse de 25%.

EXERCICE 858

Prix hors saison : 40€
Prix basse saison : $40 \times 1,2 = 48$ €
Prix haute saison : $48 \times 1,3 = 62,4$ €.
$t = \dfrac{62,4-40}{40} = 0,56$, soit une augmentation globale de 56%. Paul a donc tort.

EXERCICE 859

$c = \dfrac{1}{1,15} = 0,8696$ à 10^{-4} près.
$t = c - 1 = -0,1304$ soit une baisse de 13,04%.

EXERCICE 860

1. $c = 1,1 \times 0,8 = 0,88$ et $t = 0,88 - 1 = -0,12$ soit une baisse globale de 12%.
2. $c = 1,2 \times 0,9 = 1,08$ soit une hausse globale de 8%.
3. $c = 0,5 \times 0,75 = 0,375$ et $t = 0,375 - 1 = -0,625$ soit une baisse globale de 62,5%.
4. $c = 1,5 \times 1,25 = 1,875$ soit une hausse globale de 87,5%.
5. $c = 1,5 \times 0,5 = 0,75$ et $t = 0,75 - 1 = -0,25$ soit une baisse globale de 25%.

EXERCICE 861

1. $P = 792 \times \dfrac{1}{1,1 \times 1,2} = 600$. L'objet coûtait 600 € avant les deux augmentations.
2. $c = 1,1 \times 1,2 = 1,32$, soit une augmentation de 32%.
3. D'après le résultat précédent, l'affirmation est fausse.

EXERCICE 862

$c = 1,05 \times 1,15 = 1,2075$ et $92 \times 1,2075 = 111,09$.

L'augmentation totale est de 20,75%, l'article vaut après les deux augmentations 111,09 €.

EXERCICE 863

1. $c = 1,3 \times 0,7 = 0,92 \neq 1$, l'article ne retrouvera pas son prix de départ.
2. $c = 0,8 \times 1,25 = 1$, l'article retrouvera son prix de départ.

EXERCICE 864

Quatre augmentations de 5% : $c = 1,05^4 = 1,2155$ à 10^{-4} près, l'augmentation globale sera de 21,55%. Cette augmentation est supérieure l'augmentation prévue initialement, les défenseurs du caramel mou ont donc tort.

EXERCICE 865

• Augmentation de 30% puis baisse de 20% :

$c_1 = 1,2 \times 0,8 = 0,96$.

• Baisse de 20% puis hausse de 30% :

$c_1 = 0,8 \times 1,2 = 0,96$.

Les deux objets subiront au final la même baisse de 4%.

☞ Ce résultat est général, il découle de la commutativité de la multiplication ($a \times b = b \times a$).

EXERCICE 866

1. $14 \times \dfrac{1}{0,8} = 17,50$.
2. $35 \times \dfrac{1}{1,75} = 20$.

EXERCICE 867

$(40 \times 0,7 + 50 \times 0,5) \times 0,9 = 47,7$.

Le pull et la robe coûteront 47,70 €.

EXERCICE 868

$725,76 \times \dfrac{1}{1,08 \times 1,12} = 600$.

Avant les deux augmentations, l'armoire coûtait 600 €.

EXERCICE 869

1. $c = \dfrac{1}{3} \approx 0,3333$ et $t = 0,3333 - 1 = -0,6667$ soit une baisse de 66,67%.
2. $c = \dfrac{1}{0,995} \approx 1,005$ soit une hausse de 0,5%.
3. $c = \dfrac{1}{1,016} \approx 0,9843$ et $t = 0,9843 - 1 = -0,0157$ soit une baisse de 1,57%.

EXERCICE 870

Les deux propositions sont équivalentes. Voir l'exercice 865.

EXERCICE 871

Soit P le prix de revient d'une chemise.

La main-d'œuvre représente $0,6P$.

Les matériaux représentent $0,4P$, alors

$1,12 \times 0,6P + 1,3 \times 0,6P = 1,192P$.

Le prix de la chemise augmentera de 19,2%.

EXERCICE 872

1. $c = 1,01$.
2. Il y a 12 augmentations successives :
   $12\,000 \times 1,10^{12} = 13\,521,90$.
3. $c' = 1,01^{12} = 1,1268$ à 10^{-4} près,
   soit une augmentation de 12,68% sur l'année 2020.

EXERCICE 873

1. $c = 1,25$, $c' = \dfrac{1}{1,25} = 0,8$, ce qui correspond à une baisse de 20%.
2. $c = 0,6$, $c' = \dfrac{1}{0,6} = 1,6667$, ce qui correspond à une hausse de 66,67%.
3. $c = 2$, $c' = 0,5$, ce qui correspond à une baisse de 50%.
4. $c = 0,01$, $c' = 100$, $t = 99$ ce qui correspond à une augmentation de 9900%.

EXERCICE 874

Article	Prix HT	Taux de TVA	Montant TVA	Prix TTC	Quantité	Montant
A	420,00	5,5%	23,10	443,10	3	1 329,3
B	225	10%	22,50	247,50	2	495
C	330	10%	33	363	2	726
D	180	20%	36	216	5	1 080
					Total	3 630,3

EXERCICE 875

Article	Prix HT	Taux de TVA	Montant TVA	Prix TTC	Quantité	Montant
A	250,00	20%	50	300	2	600
B	110	5,5%	6,05	116,05	1	116,05
C	415	10%	41,5	456,5	2	913
D	250	2,1%	5,25	255,25	2	510,50
					Total	2 139,55

EXERCICE 876

Article	Prix HT	Taux de TVA	Montant TVA	Prix TTC	Quantité	Montant
A	520	20%	104	624	1	624
B	396	5,5%	21,78	417,78	2	835,56
C	270	5,5%s	14,85	284,85	3	854,55
D	1500	2,1%	31,5	1531,5	2	3063
					Total	5377,11

EXERCICE 877

1. $c = 1,025 \times 1,023 \times 0,999 \times 0,973 \times 1,015 \times 1,031 \times 1,02 \times 1,026 = 1,1162$ à 10^{-4}.
   soit un taux d'évolution de croissante de 11,62%.
2. $P = 1566 \times 1,1162 = 1747,97$ à 10^{-2} près, soit un PIB de 1 748 milliards d'euros à la fin de l'année 2013.

EXERCICE 878

1. $P_1 = 156 \times 1,07 = 166,92$.
2. Méthode 1 : $c = \dfrac{1}{1,07} \approx 0,9346$ et $t = c - 1 = -0,0654$ soit une baisse de 6,54%.

   Méthode 2 : $t = \dfrac{156 - 166,92}{166,92} = -0,0654$.

EXERCICE 879

1. $c_1 = 0,65 \times 1,3 = 0,845$ et $t_1 = 0,845 - 1 = -0,155$
   soit une baisse de 15,5%.
2. $c_2 = 0,65 \times 1,35 = 0,8775$ et $t_2 = 0,8775 - 1 = -0,1225$
   soit une baisse de 12,25%.
3. $c_3 = 0,65 \times 1,4 = 0,91$ et $t_3 = 0,91 - 1 = -0,09$
   soit une baisse de 9%.
4. $c_4 = 0,65 \times 1,3 = 0,9425$ et $t_4 = 0,9425 - 1 = -0,0575$
   soit une baisse de 5,75%.
5. $c = \dfrac{1}{0,65} \approx 1,5385$, il faut une augmentation d'environ 53,85% du cours des actions.

EXERCICE 880

$c = 1,05^{15} = 2,0789 > 2$, le prix aura en effet plus que doublé en 15 ans.

EXERCICE 881

1. $c = 1,12 \times 0,95 \times 0,92 \times 1,02 = 0,9984576$.
2. D'après la question précédente, le prix sera multiplié par 0,9985 à 10^{-4} près.
3. $t = 0,9985 - 1 = -0,0015$, soit une baisse de 0,15%.
4. $c' = \dfrac{1}{0,9985} = 1,0015$ à 10^{-4} près, soit hausse de 0,15%.

EXERCICE 882

1. Budget en 2020 : $150000 \times 1,15 = 172500$ €.
   Budget en 2021 : $172500 \times 0,8 = 138000$ €.
2. $c = 1,15 \times 0,8 = 0,92$ et $t = 0,92 - 1 = -0,08$ soit une baisse globale de 8%.
3. $0,96^2 = 0,9216$ et $t = 0,9216 - 1 = -0,0784$, soit une baisse de 7,84%, donc inférieur au résultat précédent.
4. $c' = \dfrac{1}{0,92} = 1,08696$ soit une hausse de 8,7%.

EXERCICE 883

1. **c.** $2,98 \times 1,14 = 3,3972 \approx 3,4$.
2. **a.** $0,8 \times 0,9 = 0,72$ soit une baisse de 28%.
3. **b.** $110 \times 1,0283^7 \approx 133,75$
4. **a.** La cellule $B2$ doit être bloquée.
5. **b.** $18600 \times 0,92^7 \approx 10376$ et $18600 \times 0,92^8 \approx 9545,87$

EXERCICE 884

1. b

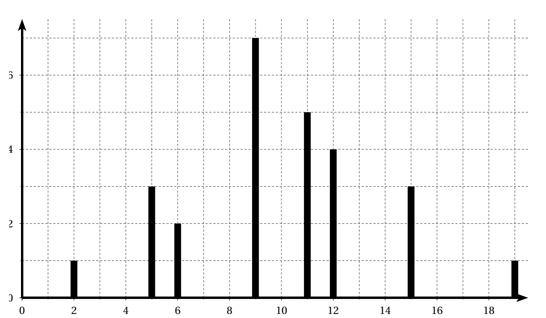
2. b en effet $(1,0367)^{10} \approx 1,434$

3. c

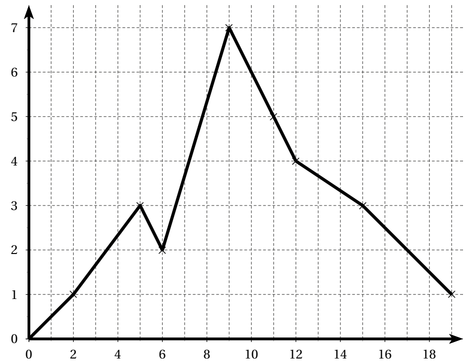
4. c

EXERCICE 885

1. Diagramme en bâtons



Polygone des effectifs :



2. La note 9 est la note de plus grand effectif, le mode de cette série est donc 9.
$\overline{x} = \frac{1}{26}(2 \times 1 + 5 \times 3 + \cdots + 12 \times 4 + 15 \times 3 + 19 \times 1)$
$\overline{x} = 9,96$ au centième près.

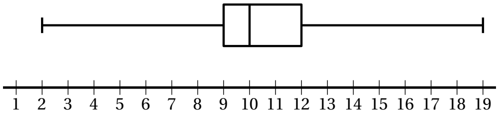
3.

Notes	2	5	6	9	11	12	15	19
Effectif	1	3	2	7	5	4	3	1
ECC	1	4	6	13	18	22	25	26

$\frac{26}{4} = 6,5$, Q_1 correspond à la 7$^{\text{e}}$ note donc $Q_1 = 9$.
$\frac{3 \times 26}{4} = 19,5$, Q_3 correspond à la 20$^{\text{e}}$ note donc $Q_3 = 12$.

$\frac{26}{2} = 13$, il y a un nombre pair de note, la médiane correspond à une note entre la 13$^{\text{e}}$ et la 14$^{\text{e}}$, soit $M = 10$.

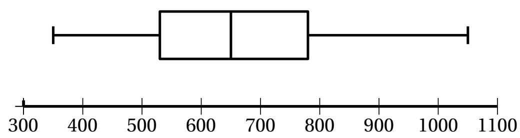
4.



EXERCICE 886

1. Les loyers sont compris entre 350 et 1050€.
Un quart des loyers est inférieur ou égal à 530 €.
La moitié des loyers est inférieur ou égal à 650 €.
Trois quart des loyers sont inférieurs ou égaux à 780 €.
2. L'étendue est : $e = 1050 - 350 = 700$ €.
$Q_3 - Q_1 = 780 - 530 = 250$ €.

3.



EXERCICE 887

1. Minimum= 350€ ; $Q_1 = 450$ € ; Me= 600 €
$Q_3 = 700$ € ; Maximum= 900 €.
2. Il s'agit de la partie comprise entre la médiane et Q_3 soit 25% des familles.

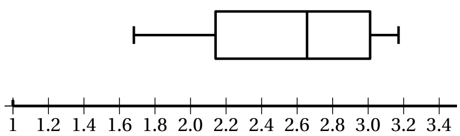
EXERCICE 888

1. **a.** $\overline{x} = 13,1$, il y a donc en moyenne 13,1 millions de visiteurs par an.
b. $\sigma = 1,23$ à 0,01 près.
2. **a.** La médiane est bien ici une valeur de la série puisque l'effectif est impair.
b. Non, il faut d'abord ordonner la liste.
3. **a.** $IQ = 14,5 - 12,2 = 2,3$
b. $2\sigma = 2,46$ proche de IQ.
4. **a.** La moyenne va augmenter puisque la valeur ajoutée est supérieure à la moyenne actuelle.
b. La médiane va augmenter puisqu'on a cette fois un nombre pair de valeurs, la 8$^{\text{e}}$ étant 12,5 et la 9$^{\text{e}}$, 12,6, une médiane sera alors 12, 55.
c. Le nouveau premier quartile sera encore 12,2.

EXERCICE 889

1. $\overline{x} = 2,58$ et $\sigma = 0,47$ à 10^{-2} près.
2. On commence par classer les valeurs dans l'ordre croissant :
La 4$^{\text{e}}$ valeur est 2,14 donc $Q_1 = 2,14$
La 12$^{\text{e}}$ valeur est 3,01 donc $Q_3 = 3,01$
La 8$^{\text{e}}$ valeur est 2,59, la 9$^{\text{e}}$ est 2,72,
toute valeur comprise entre les deux peut convenir, on prend par habitude la moyenne soit $Me = 2,655$.

3.



EXERCICE 890

1. On commence par choisir les minimum et maximum : par exemple 1 et 20, puis la 5e valeur : 12.
   Nous sommes pour le moment à une moyenne de 11, il faut donc ajouter deux valeurs (une inférieure, l'aitre supérieure à la médiane) dont la somme sera égale à 17 afin de faire descendre la moyenne à 10 : par exemple 2 et 17.
   Il suffit de choisir 3 paires de valeurs (une inférieure, l'aitre supérieure à la médiane) de somme 10 : par exemple 5 – 15, 6 – 14 et 7 – 13.
   On obtient la série : 1 – 2 – 5 – 6 – 7 – 12 – 13 – 14 – 15 – 15 – 20.
2. On procède de la même manière, on obtient par exemple :
   1 – 4 – 5 – 6 – 8 – 10 – 12 – 13 – 13 – 18 – 20 – 22 – 24 – 26 – 29 – 29

EXERCICE 891

1. L'effectif total est égal à 106.
   $\dfrac{106}{2} = 53$, le point d'ordonnée 53 est d'abscisse environ 12,2.
   On a alors $Me = 12,2$.
2.

Température moyenne	[10 ; 10,5[	[10,5 ; 11[	[11 ; 11,5[	[11,5 ; 12[
Nombre d'années	0	8	4	36

Température moyenne	[12 ; 12,5[	[12,5 ; 13[	[13 ; 13,5[
Nombre d'années	30	16	12

3. Pour calculer la moyenne et l'écart type, il faut prendre le centre de chaque intervalle.
   On obtient alors $\overline{x} = 12,12$ et $\sigma = 0,65$ à 0,01 près.

EXERCICE 892

1. $\overline{x} = 1,7656$ m, $e = 1,92 - 1,57 = 0,35$ m.
   $Me = 1,77$ m, $Q_1 = 1,73$ m, $Q_3 = 1,81$ m.
2. $\overline{x} = 77,0625$ kg, $e = 99 - 57 = 42$ kg
   $Me = 77$ kg, $Q_1 = 64$ kg, $Q_3 = 86$ kg.

EXERCICE 893

1. Pour A et B : $\overline{x} = 11$
2. A : $Me = 11$ et $IQ = 2$
   B : $Me = 11$ et $IQ = 8$.
3. A : $\sigma = 1,31$ à 0,01 près.
   B : $\sigma = 4$.
4. Les deux élèves ont la même moyenne mais Anatole a un écart type 3 fois plus petit.
   Ils ont la même médiane, mais Anatole a un intervalle interquartile 4 fois plus petit.
   Anatole est très régulier, il ne s'écarte que très peu de sa moyenne.
   Bérénice est très irrégulière.

EXERCICE 894

Salaires en €	Effectifs	ECC	Fréquences	FCC
[750 ; 1000[	150	150	0,16	0,16
[1000 ; 1250[	350	500	0,37	0,53
[1250 ; 1500[	200	700	0,21	0,74
[1500 ; 1750[	150	850	0,16	0,9
[1750 ; 2000[	50	900	0,05	0,96
[2000 ; 2250[	30	930	0,03	0,99
[2250 ; 2500[	10	940	0,01	1
Total				

EXERCICE 895

1. c – 2. c – 3. c. – 4. c – 5. b – 6. a

EXERCICE 896

1. Soit S la somme des fréquences.
   $S = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_p$
   $S = \dfrac{n_1}{N} + \dfrac{n_2}{N} + \dfrac{n_3}{N} + \cdots + \dfrac{n_p}{N}$
   $S = \dfrac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}{N}$ $S = \dfrac{N}{N} = 1$

2. $V = \dfrac{1}{N}\left(n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\overline{x})^2\right)$

$V = \dfrac{1}{N}\left(n_1x_1^2 - 2n_1x_1\overline{x} + n_1\overline{x}^2 + \cdots\right)$

$V = \dfrac{1}{N}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots\right) - 2\overline{x}\dfrac{1}{N}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots\right.$

$\left.\cdots\right) + \dfrac{1}{N} \times N \times \overline{x}^2$

or $\dfrac{1}{N}(n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots) = \overline{x}$ d'où

$V = \dfrac{1}{N}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots\right) - \overline{x}^2.$

Soit encore $V = \left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$

EXERCICE 897

1. a.

Taille	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50
Effectif	1	2	3	5	5	7	9
E.C.C.	1	3	6	11	16	23	32

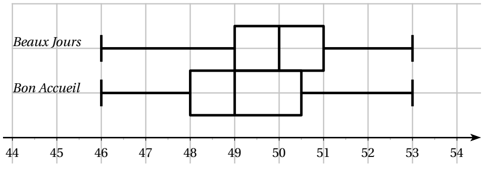
Taille	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectif	8	6	5	3	2	1
E.C.C.	40	46	51	54	56	57

b. La médiane est la 29e valeur soit $Me = 50$ cm.

$Q_1 = 49$ cm et $Q_3 = 51$ cm.

c. $\overline{x} = 50{,}009$ cm à 10^{-3} près.

d.



2. $Me = 49$ cm, $Q_1 = 48$ cm, $Q_3 = 50{,}5$ cm.

3. Dans la clinique « Bon Accueil », la moitié des nouveaux-nés mesuraient 49 cm ou moins, alors qu'ils n'étaient que 25% dans la clinique « Beaux Jours ». Dans la clinique « Bon Accueil » 25% des nouveaux-nés mesuraient 48 cm ou moins. Tout ceci semble indiquer que le service des prématurés se trouve dans la clinique « Bon Accueil ».

EXERCICE 898

1. Si on augmente chaque note d'un point, le changement affine effectué est défini par $y = x + 1$, la moyenne, la médiane et les quartiles augmentent de 1 point.

2. Si on diminue chaque note de 10%, le changement affine effectué est défini par $y = 0{,}9x$, la moyenne, la médiane et les quartiles diminuent de 10%.

3. Si on augmente les 25 notes les plus basses d'un point, la moyenne va augmenter, le premier quartile va augmenter de 1, la médiane et le troisième quartile ne changeront pas.

EXERCICE 899

1. $\overline{x} \approx 25{,}77°$ et $\sigma \approx 10{,}47°$. La moyenne semble élevée par rapport aux valeurs mesurées, elle ne semble pas être une estimation acceptable de la mesure de l'angle.

2. La valeur 82° semble aberrante car seule et très éloignées des autres valeurs.

3. Sans la valeur aberrante, la moyenne devient 23,83° et l'écart type 0,71° (au centième près).

4. Au vu des résultas précédents, les valeurs extrêmes ont une influence sur la moyenne et l'écart type.

EXERCICE 900

1. Les deux listes L1 et L2 sont supposées non vides et ont la même longueur, notées len(L1) en python.

```
def moyenne(L1 , L2) :
    notes=0
    N=0
    for i in range(len(L1)) :
        notes=notes+L1[i]*L2[i]
        N=N +L2[i]
    moyenne=notes / N
    return moyenne
```

2. Il faut importer le module math :
from math import*

```
def ecarttype(L1,L2) :
    x=moyenne(L1,L2)
    somme=0
    N=0
    for i in range(len(L1)) :
        somme=somme+L2[i]*L1[i]**2
        N =N+L2[i]
    variance=somme / N - x*x
    print( "la moyenne est ", x, "l'ecart type est ", sqrt(variance))
```

EXERCICE 901

```
def note(a,b,c,d) :
    moyenne=float(input("moyenne desiree?")
    x= moyenne*5-(a+b+b+c)
    print("il vous faut", x, "au prochain devoir")
```

EXERCICE 902

1. constitution de la lite NOTE :
NOTE=$\Big[$ [liste des notes de l'élève 1],$\cdots$, [liste des notes de l'élève i],$\cdots\Big]$.

```
def moyennes(ELEVES, C, NOTES) :
    M=[0 for i in range(len(ELEVES))]
# création d'une liste attribuant 0 à chaque élève
    for i in range(len(ELEVES)) :
# va prendre les élèves un à un
        M[i]=moyenne(NOTES[i],C)
# met la moyenne de l'élève i dans la liste M
    return M
```

2. Au départ le premier élève a la meilleure moyenne (notée Max) et son indice est 0, on parcourt la liste (du premier au dernier), si un élève a une meilleure moyenne elle devient Max et on garde son indice.

```
def meilleur(ELEVES,C,NOTES) :
    M=moyennes(ELEVES,C,NOTES)
    Max =M[0]
    indice=0
    for i in range(len(M)) :
        if M[i]>Max :
            Max=M[i]
            indice=i
    print("Le meilleur est ", ELEVES[indice])
    print( " sa moyenne est ", Max)
```

☞ On a supposé que la meilleur moyenne n'était détenue que par un élève. Dans le cas contraire, serait déclaré premier, le premier dans l'ordre alphabétique.

EXERCICE 903

1. Soit $\overline{X}$ la moyenne recherchée.
$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{ax_1+b+ax_2+b+\cdots+ax_p+b}{p}\\ &= \frac{a\left(x_1+x_2+\cdots+x_p\right)+pb}{p}\\ &= a\frac{\left(x_1+x_2+\cdots+x_p\right)}{p}+b\\ &= a\overline{x}+b.\end{aligned}$$
2. La sommes des n valeurs de la série des x est $n\overline{x}$
La sommes des p valeurs de la série des y est $n\overline{y}$
Il y a au total $n+p$ valeurs de somme totale $n\overline{x}+p\overline{y}$
On en déduit alors que la moyenne de la série des x et y sera $\dfrac{n\overline{x}+p\overline{y}}{n+p}$.
3. On applique le résultat précédent avec des temps en minutes :
$$\overline{t} = \frac{53\times135+2354\times239}{53+2354} = 228,91$$
Soit une moyenne de 3 h 49 minutes.
4. **a.** D'après la question **1**, on choisit $b = 1,5$. il faut donc ajouter 1,5 à chaque copie.
b. D'après la question **1**, il faut choisir t tel que $8,5t = 10$ soit $t = \dfrac{10}{8,5} = 1,176$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 904

1.

x_i	5,25	5,35	5,45	5,55	5,65	5,75	
n_i	5	2	45	44	3	1	100
nx_i	26,25	10,7	245,25	244,2	16,95	5,75	549,1
nx_i^2	137,8125	57,245	1336,6125	1355,31	95,7675	33,0625	3015,81
							Total

2. $\overline{x} = \dfrac{549,1}{100} = 5,491$.

3. $V = \dfrac{3015,81}{100} - 5,491^2 = 0,007$ et $\sigma = \sqrt{V} = 0,084$ au millième près.

EXERCICE 905

1. $\overline{x} = 10,1175$ et $\overline{y} = 10,1475$.

2. $\sigma_x \approx 0,121$ et $\sigma_y \approx 0,136$.

3. $\sigma_x < \sigma_y$, le premier sprint est le plus homogène.

EXERCICE 906

1. $min = 479$, $Max = 520$, $M = 499$,
$Q_1 = 495$, $Q_3 = 504$ et $EQ = 9$.

2. Les conditions $499 \leqslant Me \leqslant 501$, $Q_1 \geqslant 495$, $Q_3 \leqslant 505$, $0 \leqslant EQ \leqslant 9$ sont respectées.
$Q_1 - 1,5EQ = 481,5$ et $Q_3 + 1,5EQ = 517,5$.
16 valeurs sont en dehors de l'intervalle $[Q_1 - 1,5EQ\ ;\ Q_3 + 1,5EQ]$, $\dfrac{16}{999}100 \approx 1,6\%$.
La dernière condition n'est pas vérifiée. La machine n'a pas réussi le test.

EXERCICE 907

1. $\overline{x} = \dfrac{9 \times 56 + 9 \times 74 + 9 \times 59 + 3 \times 60}{9+9+9+3} = 62,7$.

2. Soit m la note qu'aurait dû avoir Tom en mathématiques. Alors $9m + 9 \times 74 + 9 \times 59 + 9 \times 59 + 3 \times 60 = 30 \times 64$
donc $m = \dfrac{1920 - 1377}{9} = \dfrac{181}{3} \approx 60,33$.
Tom aurait dû obtenir au moins 60,5 points.

EXERCICE 908

1. $\overline{x} = 0,3$ et $\sigma = 0,0217$ à 10^{-4} près.

2. $\left[\overline{x} - 2\sigma\ ;\ \overline{x} + 2\sigma\right] = [0,2566\ ;\ 0,3434]$
$\left[\overline{x} - 3\sigma\ ;\ \overline{x} + 3\sigma\right] = [0,2346\ ;\ 0,3651]$
Les limites de confiances ont été atteintes deux fois, celles d'alerte une fois.

EXERCICE 909

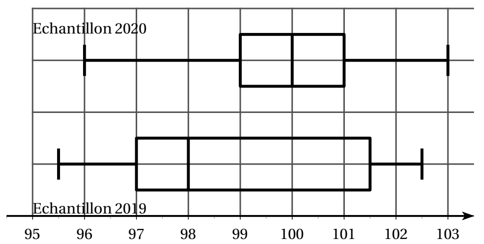
1. $\mu = 99,7$ g.

2. $\mu - 2\sigma = 96,5$ et $\mu + 2\sigma = 102,9$.

3. 9 des 90 tablettes ne sont pas dans l'intervalle soit 10% de l'échantillon.

4. $Me = 100$, $Q_1 = 99$, $Q_3 = 101$.

5.



6. min$= 95,5$, Max$=102,5$, $Q_1 = 97$, $Q_3 = 101,5$
et Med$= 98$.

7. **a.** 98 correspond à la médiane, donc la moitié des tablettes avaient une masse supérieure à 98 grammes. L'affirmation est donc fausse.
b. En 2019, l'intervalle interquartiles était égal à 4,5, et à 2 en 2020, l'affirmation est donc vraie.
c. La moitié des tablettes produites fin 2019 pesaient moins de 98 grammes, l'affirmation est donc vraie.

EXERCICE 910

1. Il y a 10 résultats pairs donc $p(A) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
Il y a 6 nombres multiples de 3 entre 1 et 20 donc $p(B) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
Il y a 8 nombres inférieurs ou égaux à 8
donc $p(C) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{4}{10} = 0,4$.
Il y a 8 nombres strictement supérieurs à 12 donc $p(D) = \dfrac{8}{20} = 0,4$.

2. **a.** $A \cap B$: « obtenir un nombre pair **et** multiple de 3 »
Seuls 6, 12 et 18 sont possibles donc $p\,(A \cap B) = \dfrac{3}{20}$.
b. $A \cap C$: « obtenir un nombre pair **et** inférieur ou égal à 8 »
Seuls 2, 4, 6 et 8 sont possibles, $p\,(A \cap C) = \dfrac{4}{20} = 0,2$.
c. $B \cup C$: « obtenir un nombre multiple de 3 **ou** inférieur ou égal à 8 »
12 résultats sont possibles donc $p\,(B \cup C) = \dfrac{12}{20} = 0,6$.

3. Aucun nombre ne peut être inférieur ou égal à 8 **et** supérieur à 12 donc $p\left(C \cap D\right) = \emptyset$
Les événements C et D sont incompatibles.

EXERCICE 911

1. $A = \left\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17;\ 19\right\}$.
$B = \left\{5;\ 10;\ 15;\ 20\right\}$.

2. **a.** $A \cap B = \left\{5;\ 15\right\}$.
b. $A \cup B = \left\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17;\ 19;\ 20\right\}$.
c. $\overline{A} = \left\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18;\ 20\right\}$.
d. $\overline{A \cap B} = \left\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20\right\}$.
e. $\overline{A \cup B} = \left\{2;\ 4;\ 6;\ 8 :\ 12;\ 14;\ 16;\ 18\right\}$.
f. $\overline{A} \cap B = \left\{10;\ 20\right\}$.
g. $\overline{A} \cup B = \left\{2;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 15;\ 16;\ 18;\ 20\right\}$.
h. $\overline{A} \cap \overline{B} = \left\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18\right\}$.
i. $\overline{A} \cup \overline{B} = \left\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20\right\}$.

3. On a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

4. D'après les ensembles précédents :
$p\left(\overline{A \cap B}\right) = \dfrac{18}{20} = 0,9$ et $p\left(\overline{A} \cap B\right) = \dfrac{2}{20} = 0,1$.

EXERCICE 912

1. $P\left(A \cup B\right) \leqslant P(A) + P(B)$ donc l'affirmation est fausse.

2. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = \dfrac{2}{7}$. L'affirmation est vraie.

3. $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right) = 0,55$, l'affirmation est fausse.

4. $P\left(E \cup F\right) = P(E) + P(F) - P\left(E \cap F\right) = 0,03$, l'affirmation est fausse.

EXERCICE 913

1. $P\left(E \cup F\right) = P(E) + P(F) - P\left(E \cap F\right) = 0,7$
$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 0,35$.

2. $P\left(G \cup H\right) = P(G) + P(H) - P\left(G \cap H\right) = \dfrac{25}{28}$
$P\left(\overline{G}\right) = 1 - P(G) = \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 914

1. $p(A) = \dfrac{14}{100} = 0,14$.

2. $p(B) = \dfrac{9+16+14}{100} = 0,39$.

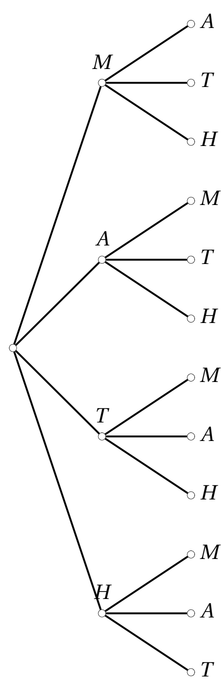
3. $p(C) = \dfrac{15+7}{100} = 0,22$.

4. $p(D) = \dfrac{14+39+15+7}{100} = 0,75$.

5. $p(E) = \dfrac{9+16+14+39}{100} = 0,78$.

EXERCICE 915

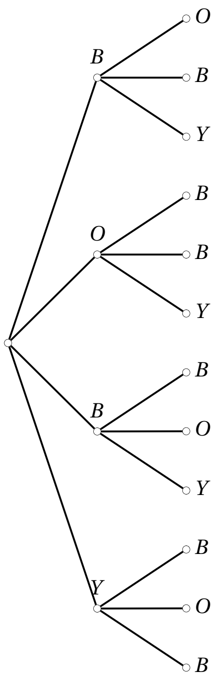
1. **a.**



b. $\Omega_M = \left\{MA;\ MT;\ MH;\ AM;\ AT;\ AH;\ TM;\ TA;\ TH;\ HM;\ HA;\ HT\right\}$.

c. La probabilité de chaque issue est égale à $\dfrac{1}{12}$.

2. a.



b. $\Omega_B = \left\{BO;\ BB;\ BY;\ OB;\ OY;\ YB;\ YO\right\}$.

c.

X	BO	BB	BY	OB	OY	YB	YO
$P(X)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

d. $P(BO) \neq P(OY)$, il n'y a pas équiprobabilité.

EXERCICE 916

1. 414 personnes ont moins de 25 ans,
donc $P(A) = \dfrac{414}{1500} = 0,276$
525 personnes ont répondu oui,
donc $P(B) = \dfrac{525}{1500} = 0,35$.
156 personnes ont répondu oui et ont moins de 25 ans, donc $P(C) = \dfrac{156}{1500} = 0,104$.

2. $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(C) = 0,486$.
$414 + 423 = 837$ personnes ont moins de 25 ans ou de 40 à 59 ans, donc $P(E) = \dfrac{837}{1500} = 0,558$.
$P(F) = P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 0,724$.

3. a. $423 + 195 = 618$ personnes ont au moins 40 ans,
donc $P(G) = \dfrac{618}{1500} = 0,412$.
b. $P(H) = \dfrac{975}{1500} = 0,65$.
c. $P(G \cap H) = \dfrac{273 + 147}{1500} = 0,28$.
$P(G \cup H) = \dfrac{975 + 150 + 48}{1500} = 0,782$.

EXERCICE 917

1. $\overline{A}$: « l'étudiant n'est pas inscrit au concours A »
$A \cap B$: « l'étudiant est inscrit aux concours A et B »
$A \cup B$: « l'étudiant est inscrit à au moins un des deux concours ».

2. $25 + 20 + 12 + 45 = 102$, 102 étudiants préparent les concours.
$P(A) = \dfrac{20 + 12}{102} = \dfrac{16}{51}$, $P(B) = \dfrac{12 + 45}{102} = \dfrac{19}{34}$
$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = \dfrac{35}{51}$

3. $P(A \cap B) = \dfrac{12}{102} = \dfrac{2}{17}$
$P(A \cup B) = \dfrac{20 + 12 + 45}{102} = \dfrac{77}{102}$.

EXERCICE 918

1. $P(6) = 1 - (P(1) + 4 \times P(2)) = 0,35$.

2. $P(A) = 1 - P(1) = 0,95$
$P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,65$
$P(C) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 0,8$.

3. a. $\overline{A}$: « obtenir le 1 »
$P\left(\overline{A}\right) = 0,05$.
b. $\overline{C}$: « obtenir un nombre strictement inférieur à 3 ».
$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 0,2$.
c. $A \cap B$: « obtenir un nombre pair et différent de 1 »
$P(A \cap B) = P(B) = 0,65$.
d. $\overline{A} \cap B$: « obtenir un nombre pair et égal à 1 »
$P(A \cap B) = 0$.
e. $A \cup C$: « obtenir supérieur ou égal à 3 ou différent de 1 »
$P(A \cup C) = P(A) = 0,95$.
f. $\overline{B} \cup \overline{C}$: « obtenir un nombre impair ou strictement inférieur à 3 »
$P(A \cap B) = P(1) + P(2) + P(3) + P(5) = 0,5$.

EXERCICE 919

D'après le tableau de proportionnalité, on a :

$p_2 = 2p_1$, $p_3 = 3p_1$, $p_4 = 4p_1$

$p_5 = 5p_1$.

D'autre part $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$

On en déduit alors que $15p_1 = 1$ donc $p_1 = \dfrac{1}{15}$

et par suite $p_2 = \dfrac{2}{15}$, $p_3 = \dfrac{3}{15}$, $p_4 = \dfrac{4}{15}$ et $p_5 = \dfrac{5}{15}$.

EXERCICE 920

1. La somme des fréquences doit être égale à 1, le nombre manquant est donc égal à 0,19.
2. $m = 1080 \times 0,41 + 1350 \times 0,28 + 1834 \times 0,19 + 2109 \times 0,12$

   $m = 1422,34$

   soit un salaire moyen de 1422 €.

EXERCICE 921

1.

	Atteint par M_1	Atteint par M_2	Pas malade	Total
Test Positif	9	14	7	30
Test Négatif	1	6	63	70
Total	10	20	70	100

2. Le test est positif dans 30 cas sur 100, la probabilité pour que le test réagisse est donc égale à 0,3.
3. **a.** Parmi les 30 individus dont le test a réagi, 9 ont la maladie M_1, la probabilité est donc égale à $\dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10}$

   b. Parmi les 30 individus dont le test a réagi, 14 ont la

   maladie M_2, la probabilité est donc égale à $\dfrac{14}{30} = \dfrac{7}{15}$

   c. Parmi les 30 individus dont le test a réagi, 7 n'ont aucune maladie, la probabilité est donc égale à $\dfrac{7}{30}$

EXERCICE 922

1.

	Défaut a	Sans défaut a	Total
Défaut b	500	1 000	1 500
Sans défaut b	300	8 200	8 500
Total	800	9 200	10 000

2. **a.** $p_1 = \dfrac{1000 + 300}{10000} = 0,13$

   b. $p_2 = \dfrac{8200}{10000} = 0,82$.

3. Parmi les 1300 pièces présentant un seul défaut, 90% sont réparées, soit 1170 pièces.

   1170 + 8200 = 9370 pièces sont acceptées sur les 10 000, soit une probabilité égale à 0,937.

EXERCICE 923

• $\emptyset$ est l'événement impossible, il ne contient donc aucune issue donc $P(\emptyset) = 0$

Ω est l'événement certain, il contient toutes les issues donc $P(\Omega) = 1$.

• Par définition, $P(A) \geqslant 0$, d'autre part, A ne contient qu'une partie des issues de Ω donc $P(A) \leqslant P(\Omega)$.

Ainsi $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

• Par définition de l'événement contraire : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

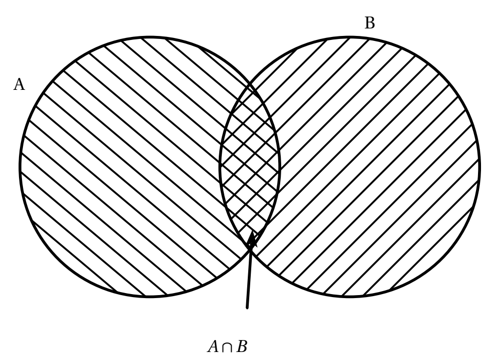
donc $P\left(A \cup \overline{A}\right) = 1$ et $P\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$

d'autre part $P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) - P\left(A \cap \overline{A}\right)$,

on en déduit alors que $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$

d'où $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

EXERCICE 924

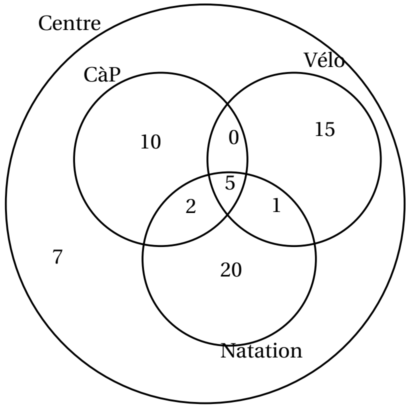


$A \cup B$ est toute la partie hachurée, elle est constituée des ensembles A et B, mais la partie doublement hachurée est comptée deux fois (une fois avec A et une fois avec B), il faut donc l'enlever une fois,

d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

EXERCICE 925

1. Compléter le diagramme suivant :



2. $60-(5+1+2+10+15+20)=7$, donc 7 personnes ne pratiquent aucune de ces trois activités.

3. **a.** Soit p_1 la probabilité recherchée. 21 personnes parmi les 60 du centre font de vélo,

donc $p_1=\dfrac{21}{60}=0,35$.

b. Soit p_2 la probabilité recherchée. 5 personnes parmi les 60 du centre pratiquent les trois sports,

donc $p_2=\dfrac{5}{60}=0,08$ au centième près.

c. Soit p_3 la probabilité recherchée. 7 personnes ne pratiquent aucun de ces trois sports,

donc $p_3=\dfrac{7}{60}=0,12$ au centième près.

4. **a.** Soit p_4 la probabilité recherchée. Parmi les 28 nageurs, 6 pratiquent aussi le vélo,

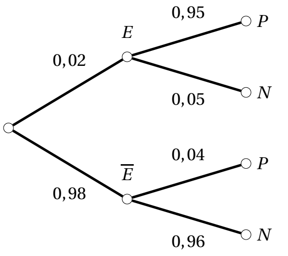
donc $p_4=\dfrac{6}{28}=0,21$ au centième près.

b. Soit p_5 la probabilité recherchée. Parmi les 28 nageurs, 20 ne pratiquent que la natation,

donc $p_5=\dfrac{20}{28}=0,71$ au centième près.

EXERCICE 926

1.



2.

	E	$\overline{E}$	Total
P	190	392	582
N	10	9408	9418
Total	200	9800	10 000

3. Parmi les 582 tests positifs, seuls 190 proviennent des personnes réellement en état d'ébriété, la probabilité recherchée est donc $p_1=\dfrac{190}{582}=0,3265$ à 10^{-4} près.

4. Le résultat est faux si la personne est en état d'ébriété et le test négatif ou la personne n'est pas en état d'ébriété et le test est positif, donc $p_2=\dfrac{402}{10000}$ soit $p_2=0,0402$.

EXERCICE 927

1.

	Bordeaux	Bourgogne	Loire	Total
Blanc	228	172	200	600
Rouge	972	628	200	1800
Total	1200	800	400	2400

2. **a.** $p(A)=\dfrac{600}{2400}=0,25$

b. $p(B)=\dfrac{1200}{2400}=0,5$

c. $p(A\cap B)=\dfrac{228}{2400}=0,095$

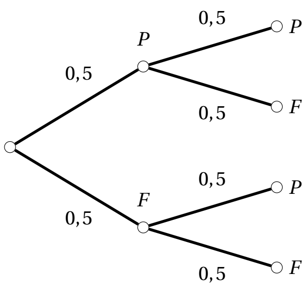
d. $p(A\cup B)=\dfrac{1200+600-228}{2400}=0,655$.

3. Parmi les 600 bouteilles de vin blanc, 172 sont des Bourgogne, donc la probabilité cherchée est $p_1=\dfrac{172}{600}=0,287$ au millième près.

4. Parmi les 800 bouteilles de Bourgogne, 172 sont des vins blancs, donc la probabilité cherchée est $p_2 = \dfrac{172}{800} = 0,215$.

EXERCICE 928

1.



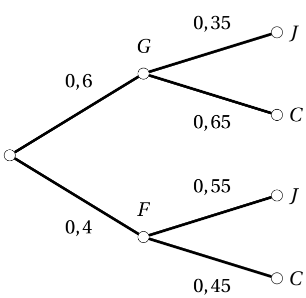
2. **a.** $p(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

b. $p(B) = 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

c. Obtenir au moins 1 PILE c'est obtenir 2 fois PILE ou 1 PILE et 1 FACE donc $p(C) = p(A) + p(B) = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 929

1.



2. $P(G \cap J) = 0,6 \times 0,35 = 0,21$.

3. Un élève étudie le japonais : soit c'est un garçon qui étudie le japonais, soit c'est une fille qui étudie le japonais :
$P(J) = P(G \cap J) + P(F \cap J) = 0,21 + 0,4 \times 0,55 = 0,43$.

EXERCICE 930

1. $rand$ génère un nombre aléatoire pris dans l'intervalle $[0\,;\,1[$, la formule va générer un entier pris aléatoirement entre 1 et 6.

2. Cette formule peut simuler un lancer de dé à 6 faces.

3. « $int(2 \times rand + 1)$, on pose alors par exemple 0 représente pile.

4. En Python, contrairement à la calculatrice, il y a la fonction randint(a,b) qui génère un entier appartenant à l'intervalle $[a\,;\,b]$

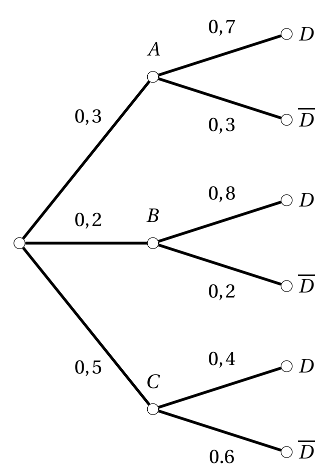
```
from random import*
def pileFace() :
    for i in range(10) :
        resultat=randint(0;1) :
        if resultat== 0 :
            print("Pile")
        else :
            print("Face")
```

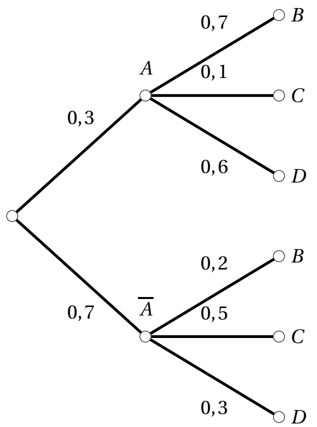
EXERCICE 931

Soit n le nombre d'élèves de chacune des trois classes préparatoires. D'après les données de l'énoncé, on a :
$0,65n + 0,3n + 0,4n + 0,08(2085 - 3n) = 300$.
On en déduit que $n = 120$. 65% des 120 élèves de Louis-le-Grand présentés au concours soit 78 ont été reçus soit $p = \dfrac{78}{300} = 0,26$.

EXERCICE 932

La somme des poids des branches provenant d'un nœud est toujours égale à 1.





EXERCICE 933

• On lance deux fois une pièce, les résultats possibles sont $PP - PF - FP - FF$ sur les 4 issues possibles seules deux contiennent exactement un pile, donc $p(A) = 0,5$.

• On lance quatre fois une pièce, chaque lancer ayant 2 issues, on aura pour 4 lancers 2^4, soit 16 issues.
Parmi ces 16 issues, 6 contiennent exactement 2 piles ($PPFF - PFPF - FPPF - PFFP$; $FPFP$; $FFPP$), donc $p(B) = \dfrac{6}{16} = 0,375$.
Il est donc plus probable d'obtenir exactement un pile au cours de deux lancers qu'exactement deux piles au cours de quatre lancers.

EXERCICE 934

La technique la plus simple pour dénombrer toutes les issues et les issues favorables est de faire un tableau :

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

9 issues parmi les 36 donnent un résultat impair, la probabilité recherchée est donc $p = \dfrac{9}{36} = 0,25$.

EXERCICE 935

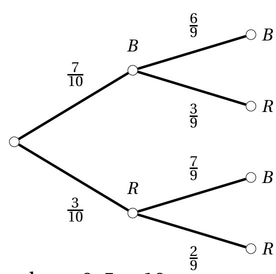
On lance 5 fois un dé à 6 faces, il y a donc $6^5 = 7776$ issues possibles.
On veut obtenir exactement 4 fois le 6, donc exactement 1 « non 6 » :
• supposons que le « non 6 » soit obtenu au premier lancer, il y a 5 issues possibles ;
• il y 5 positions différentes pour le « non 6 » ;
• il y a donc au total 25 issues favorables.
La probabilité recherchée est donc $p = \dfrac{25}{7776} = 0,003$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 936

1. $\overline{A}$: « obtenir moins de deux fois un même numéro » ou encore « obtenir des numéros différents ».
2. Au premier lancer, il y a 6 issues,
   au second lancer, il n'y a plus que 5 issues (le numéro obtenu au premier lancer ne peut plus être choisi),
   au troisième lancer, il n'y a plus que 4 issues,
   au quatrième lancer, il n'y a plus que 3 issues.
   Il y a donc au total $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ cas favorables à la réalisation de $\overline{A}$.
3. Il y a au total $6^4 = 1296$ issues possibles
   donc $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18}$
   On en déduit alors : $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{13}{18} \approx 0,72$.

EXERCICE 937

1.



2. X prend les valeurs 0, 5 et 10.
3. • $X = 0$ si les deux boules sont bleues,
   donc $P(X = 0) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{42}{90}$
   • $X = 10$ si les deux boules sont rouges,
   donc $P(X = 10) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{90}$
   • $X = 5$ si une boule est bleue et l'autre rouge,
   donc $P(X = 5) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{9} = \dfrac{42}{90}$.

☞ On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

EXERCICE 938

1. **a.** Il y a 8 issues possibles : FFF, FFG, FGF, GFF, FGG, GFG, GGF, GGG.
   b. On a supposé qu'il y avait équiprobabilité, la probabilité d'obtenir l'issue FFG est donc égale à $\frac{1}{8}$.
2. **a.** X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3.
   b. $(X=1)=\left\{FGG;\ GFG;\ GGF\right\}$
   c. D'après les résultats précédents $P(X=1)=\frac{3}{8}$.
   d. Loi de probabilité de X :

$X=x_i$	0	1	2	3
$P\left(X=x_i\right)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

EXERCICE 939

1. $P(V)=\frac{1}{6}$, $P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(R)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
2. **a.** G peut prendre les valeurs 5, 2 et -3.
   b. $(G=5)$ est l'événement V donc $P(G=5)=\frac{1}{6}$.
   c.

$G=x_i$	5	2	-3
$P\left(G=x_i\right)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

EXERCICE 940

1. Echantillon 1 : bleue – bleue – bleue – rose – bleue – blanche – blanche – bleue – bleue – bleue.
   Echantillon 2 : rose – blanche – blanche – rose– rose– bleue – bleue – rose – bleue – rose .
2. Echantillon 1 : PP – PF – FP – PP – FF – FP – PF – FP – PF – PF.
   Echantillon 2 : PF – FP – FP – FP – PF – PP – PF – PF – FF – PP.
3. Echantillon 1 : Gagné – Perdu – Perdu – Perdu – Perdu – Gagné – Perdu – Gagné – Perdu – Perdu.
   Echantillon 2 : Perdu – Perdu – Gagné – Gagné –Gagné – Perdu – Perdu – Perdu – Perdu – Perdu.

EXERCICE 941

1. Simple manipulation.
2. Ligne 1 : on importe tout le module « random » qui permet de générer des valeurs aléatoires.
   Ligne 3 : la fonction randint(1,6) va générer aléatoirement un entier pris dans l'intervalle [1 ; 6].
3.

```
from random import*
def de(n) :
    for i in range(n) :
        resultat=randint(1,6)
        print( resultat)
```

EXERCICE 942

```
from random import*
def pileFace() :
    resultat=randint(0,1)
    return resultat
```

☞ Il restera à attribuer à chaque côté une valeur 0 ou 1.

EXERCICE 943

1. Lorsque n devient de plus en plus grand, la fréquence de billes rouges se stabilise autour de $0,3$.
2. $0,31-\frac{1}{\sqrt{1000}}=0,2784$ à 10^{-4} près
   $0,31+\frac{1}{\sqrt{1000}}=0,3416$ à 10^{-4} près
   La proportion de boules est très probablement comprise entre 27,84% et 34,16%.

EXERCICE 944

1.

```
from random import*
def partie() :
    n = 0
    while n < 6 and randint(1,6) ! = 6 :
        n = n + 1
    if n == 6 :
        return 1
    else :
        return 0
```

2. n marque l'avancée de la tortue.
Lorsque la fonction retourne 0, c'est le lièvre qui gagne.

3.

```
def milleparties() :
    T = 0
    for i in range(1000) :
        resultat=partie()
    if resultat == 1 :
        T = T + 1
    return T
```

4. On cherche n tel que $|f - p| \leqslant 0,01$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01$ donc $n \geqslant 10\,000$.
En utilisant la fonction précédente avec 10 000, on obtient une probabilité d'environ $0,34$.

EXERCICE 945

1.

```
from random import*
def six() :
    n = 0
    while randint(1,6) ! = 6 :
        n = n + 1
    return n
```

2.

```
def Partie() :
    S = 0
    for i in range(1000) :
        S=S+six()
    print(S/1000)
```

3. On obtient une valeur voisine de 5. Il faut en moyenne 5 lancers pour obtenir le 6.

EXERCICE 946

1.

```
from random import*
def piece() :
    n = 0
    for i in range(50) :
        if randint(0,1) == 0 :
            n = n + 1
    return n
```

2.

```
def Partie2(n) :
    S = 0
    for i in range(n) :
        S=S+piece()
    return S/n
```

3. Il faut importer le module math

```
def echantillon(n) :
    nombre = 0
    borne=1/sqrt(n)
    for k in range(100) :
        f =Partie2(n) :
            if abs(f - 0,5) <= borne :
                nombre=nombre +1
    print(nombre)
```

EXERCICE 947

Partie A

1. $p_0 = p_3 = \frac{1}{8}$, $p_1 = p_2 = \frac{3}{8}$.

2.

```
from random import *
def RésultatChute() :
    somme = 0
    for i in range(3 ) :
        rebond = randint(0,1)
        somme = somme + rebond
    return somme
```

3.

```
def Echantillon(n, numéro) :
    somme = 0
    for i in range(n) :
        if ResultatChute() == numero
            somme = somme +1
    proportion = somme / n
    return proportion
```

4. a. On obtient des proportions entre 0,11 et 0,14.

b. Pour 1 et 2, les proportions sont entre 0,37 et 0,38

c. Les résultats sont cohérents avec les probabilités trouvées à la première question.

5. a. La fonction va simuler 100 échantillons.

b. Chaque échantillon est de taille 1000.

c. f contient la fréquence du $i^{\text{ème}}$ échantillon.

d. f permet d'estimer la fréquence de billes tombées dans la case 1.

6.

```
from pylab import plot,axis,show
for i in range(100) :
    f = Echantillon(100, 1)
    plot(i, f, '+', color='blue')
for i in range(100) :
    g = Echantillon(1000, 1)
    plot(i, f, 'i', color='red')
axis([0, 100,0 ,1])
show()
```

Partie B

1.

```
from math import *
def ProportionBonsEchantillons(n) :
    somme = 0
    borne =1/sqrt(n)
    for i in range(100) :
        resultat=Echantillon(n,1)
        ecart=abs(resultat−0.375)
        if ecart < borne :
            somme = somme +1
    proportion = somme /100
    return proportion
```

2. On obtient environ 95% des échantillons pour lesquels l'écart est inférieur à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 948

1.

	Pâtisserie	Laitage	Fruit	Total
Viande	226	141	65	432
Poisson	44	51	73	168
Total	270	192	138	600

2. $P(A) = \dfrac{168}{600} = \dfrac{7}{25}$.

3. $P(B) = \dfrac{270}{600} = \dfrac{9}{20}$.

4. $P(A \cap B) = \dfrac{44}{600} = 0,07$ à 10^{-2} près.

5. La probabilité demandée s'écrit : $p_B\left(\overline{A}\right)$.

$p_B\left(\overline{A}\right) = \dfrac{226}{270} = \dfrac{113}{135} = 0,84$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 949

Partie A

1. $\overline{x} = 4,08$, le temps moyen d'attente aux caisses est d'environ 4 minutes.

2.

Temps d'attente	1	2	3	4	5
Nombre clients	14	13	23	9	14
ECC	14	27	50	59	73

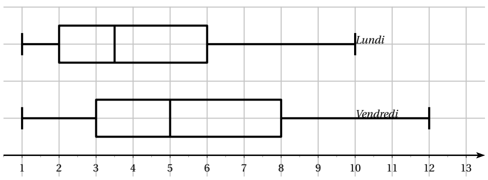
Temps d'attente	6	7	8	9	10
Nombre clients	8	12	4	1	2
ECC	81	93	97	98	100

La médiane est une valeur partageant la série en deux parties de même effectif. Il y a 100 valeurs, nous prendrons pour médiane le centre de l'intervalle médian. La 50^{e} valeur est 3, la 51^{e} est 4 donc $Me = 3,5$.

La 25^{e} valeur est 2 d'où $Q_1 = 2$

La 75^{e} valeur est 6 d'où $Q_3 = 6$.

3.



4. **a.** 19 personnes attendent 7 minutes ou plus, soit 19% des clients. Le directeur adjoint doit donc ouvrir une nouvelle caisse le lundi.

b. Le temps moyen d'attente est d'environ 4 minutes, le directeur ne doit donc pas ouvrir de nouvelle caisse le lundi.

Partie B

1. Par lecture graphique, on obtient :

Temps d'attente	1	2	3	4	5	6
Nombre clients	5	9	13	8	19	10

Temps d'attente	7	8	9	10	11	12
Nombre clients	8	5	11	9	2	1

2. $\overline{x} = 5,68$, le temps moyen d'attente est d'environ 5,7 minutes à 0,1 minute près.

Partie C :

• La médiane de la série du vendredi est 5 donc la moitié des personnes attendent cinq minutes ou plus. L'affirmation 1 est donc vraie.

• $Q_1 = 3$, donc 25% des clients attendent 3 minutes ou mois, l'affirmation 2 est donc vraie.

• 81 clients le lundi et 64 clients le vendredi jugent le temps d'attente acceptable, l'affirmation 3 est donc fausse.

EXERCICE 950

1. $t = \dfrac{36-30}{30} = 0,2$ soit une augmentation de 20%.

2. $c = 0,85$

3. $prix = \dfrac{44}{1,1} = 40$

4. $289 \times 0,8 = 231,20$ €.

5. $\dfrac{405,3}{0,7} = 579$ €.

6. Augmentation de 33%.

7. $\dfrac{1200}{2,2} = 545,45$ €.

8. Baisse de 16%.

9. $c = 1,2 \times 0,7 = 0,84$ soit une baisse globale de 16%.

10. **a.** Effectif total : 25.

b. $\dfrac{5}{25} = 0,2$, 20% de la classe a eu 4 sur 5.

c. $\dfrac{7+5+1}{25} = 0,52$, 52% des élèves de la classe ont eu la moyenne.

EXERCICE 951

1. b – 2. c – 3. d – 4. a – 5. b.

EXERCICE 952

1.

	Diesel	Essence	Hyb ou élec	Total
Ile-de-France	1 588	1 855	335	3 778
Autres régions de France métropo.	6 658	9 911	1 037	17 606
Total	8 246	11 766	1 372	21 384

2. $\dfrac{1}{4} \times 1372 = 343$, l'affirmation est donc vraie.

3. $360 \times 0,2252 \approx 81,1°$ soit 81° au degré près.

4. Soit x le nombre d'immatriculations en 2017, alors $1,0283x = 21384$ donc $x = \dfrac{21384}{1,0283} \approx 20\,796$ centaines de véhicules.

5. Nombre de véhicules purement électriques : $0,065 \times 1372 \approx 89,18$ centaines.
$\dfrac{89,18}{21384} \times 100 \approx 0,417$. Les véhicules purement électrique représentent environ 0,4% des véhicules neufs.

EXERCICE 953

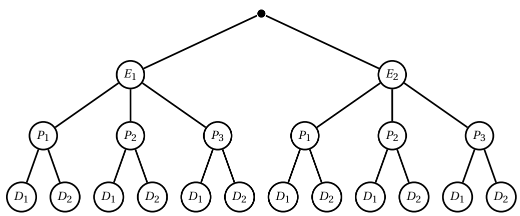
1. $\overline{P_1} \approx 9,23$ et $\sigma(P_1) \approx 3,82$
$\overline{P_2} \approx 9,44$ et $\sigma(P_2) \approx 5,79$
$\overline{P_3} \approx 10,16$ et $\sigma(P_3) \approx 5,49$

2. P_1 est la classe la plus homogène (plus petit écart type).

3. P_2 est la classe la plus hétérogène (plus grand écart type).

4. La classe P_3 a la meilleure moyenne.

EXERCICE 954



1. L'arbre ci-dessus montre qu'il y a $2 \times 3 \times 2 = 12$ menus différents possibles.
2. On obtient :

   a.

	D_1	D_2	Total
P_1	14	6	20
P_2	20	10	30
P_3	26	24	50
Total	60	40	100

b. $P(A) = \dfrac{30}{100} = 0,3$; $P(B) = \dfrac{60}{100} = 0,6$

$P(C) = \dfrac{26}{100} = 0,26$; $P(D) = \dfrac{50}{100} = 0,5$

$P(E) = \dfrac{66}{100} = 0,66.$

c. $P(A \cup B) = \dfrac{70}{100} = 0,7$; $P(A \cap B) = \dfrac{20}{100} = 0,2$

$P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,3 = 0,7$; $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0,7 = 0,3.$

d. $P(F) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}.$

EXERCICE 955

1. **a.** $P(\{2\}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

   b. $P\left(\{\text{n impair}\}\right) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}.$
2. **a.** On obtient le tableau :

2ᵉ dé \ 1ᵉʳ dé	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
1	11	21	31	41	51	61
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63

Il y a 36 tirages possibles. On obtient par lecture du tableau les probabilités demandées ci-dessous.

b. $P(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}.$

c. $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}.$

d. $P(C) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}.$

e. $P(D) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}.$

EXERCICE 956

1. $P(R) = \dfrac{2}{5} = 0,4.$
2. Si on note p cette probabilité, $p = \dfrac{3}{5} = 0,6.$
3. **a.** On peut construire le tableau :

tirage 2 \ tirage 1	B_3	R_2	R_2	V_1	V_1
B_3		RB_5	RB_5	VB_4	VB_4
R_2	BR_5		RR_4	VR_3	VR_3
R_2	BR_5	RR_4		VR_3	VR_3
V_1	BV_4	RV_3	RV_3		VV_2
V_1	BV_4	RV_3	RV_3	VV_2	

Il y a 20 tirages possibles.

b. $P(A) = \dfrac{16}{20} = 0,8.$

c. $P(B) = \dfrac{6}{20} = 0,3.$

d. $P(C) = \dfrac{4}{20} = 0,2.$

e. $P(D) = \dfrac{10}{20} = 0,5.$

EXERCICE 957

1.

	Télévision T	Sans télévision $\overline{T}$	Totaux
Bain B	5	5	10
Douche D	20	10	30
Totaux	25	15	40

2. Il y a équiprobabilité, les probabilités sont donc :

   a. $P(D) = \dfrac{30}{40} = 0,75.$

b. $P(T)=\dfrac{25}{40}=\dfrac{5}{8}=0,625.$

$P(D\cap T)=\dfrac{20}{40}=0,50.$

3. **a.** $\overline{D}$: « la chambre n'a pas de douche »
$P(\overline{D})=\dfrac{10}{40}=0,25.$

b. $\overline{D}\cup T$: « la chambre a un bain ou la télévision »
$P\left(\overline{D}\cup T\right)=\dfrac{20+5+5}{40}=\dfrac{3}{4}=0,75$

c. $D\cup\overline{T}$: « la chambre a une douche ou n'a pas de télévision »
$P(D\cup\overline{T})=\dfrac{20+10+5}{40}=\dfrac{7}{8}=0,875.$

d. $\overline{D}\cap\overline{T}$: « la chambre n'a pas de douche et pas de télévision »
$P\left(\overline{D}\cap\overline{T}\right)=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}=0,125.$

EXERCICE 958

1.

	Filles	Garçons	TOTAL
CAP	27	27	54
Bac pro	36	27	63
Bac techno	45	63	108
TOTAL	108	117	225

2. **a.** Le pourcentage d'élèves en CAP est :
$\dfrac{54}{225}=0,24$ soit 24%

b. Parmi les filles, le pourcentage d'élèves en CAP est :
$\dfrac{27}{108}=0,25$ soit 25%

3. **a.** $P(A)=\dfrac{108}{225}=0,48$ et $P(B)=\dfrac{108}{225}=0,48$

b. $\overline{B}$ est l'événement : « l'élève choisi n'est pas en Bac technologique »
$P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,48=0,52$

c. $A\cap B$ est l'événement : « l'élève choisi est une fille et est en Bac technologique »
$P(A\cap B)=\dfrac{45}{225}=0,20$

d. $A\cup B$ est l'événement : « l'élève choisi est une fille ou est en Bac technologique »
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,76$

4. La probabilité que ce soit une fille sachant que l'élève est en Bac technologique est :

$P_B(A)=\dfrac{45}{108}\approx 0,42.$

EXERCICE 959

1. On obtient le tableau :

	F_1	F_2	F_3	Total
Femmes	1935	1575	990	4500
Hommes	625	1465	1410	3500
Total	2 560	3 040	2 400	8 000

2. $P(A)=\dfrac{3040}{8000}=0,38,\ P(B)=\dfrac{4500}{8000}\approx 0,56$

$P(C)=\dfrac{625}{8000}\approx 0,08$

3. $P(A\cap B)=\dfrac{1575}{8000}\approx 0,20$

$P(A\cup B)=\dfrac{1935+1575+990+1465}{8000}\approx 0,75$
$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=0,72.$

4. $P(D)=\dfrac{1575+990}{4500}=0,57.$

EXERCICE 960

1. Il y a au total $295+157+221=673=673$ boîtes.
Parmi ces 673 boîtes, il y en a 221 de mélange, la probabilité pour qu'une boîte prise au hasard contienne le mélange bergamotes-craquelines est donc $\dfrac{221}{673}$ soit environ 0,33.

2. L'événement « la boîte contient des craquelines uniquement ou des bergamotes uniquement » est l'événement contraire de « la boîte contient le mélange » dont on a calculé la probabilité à la question précédente. Donc la probabilité pour qu'une boîte prise au hasard contienne des craquelines uniquement ou des bergamotes uniquement est : $1-\dfrac{221}{673}=\dfrac{452}{673}$ soit environ 0,67.

EXERCICE 961

1.

	A	$\overline{A}$	Total
12-17 ans	80	320	400
18-24 ans	84	316	400
25-44 ans	150	350	500
45-64 ans	308	392	700
Total	622	1 378	2 000

2. **a.** Il y a 622 personnes sur 2 000 qui mangent du poisson au moins deux fois par semaine, comme il y a équiprobabilité : $p(A) = \dfrac{622}{2\,000} = 0,311$.

Les 12-17 ans représentent $\dfrac{1}{5}$ des personnes interrogées donc $p(B) = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

b. L'événement $A \cap B$ est « la personne interrogée mange du poisson au moins deux fois par semaine ET a entre 12 et 17 ans ».

Il y a 80 personnes qui répondent à ces deux critères donc $p(A \cap B) = \dfrac{80}{2\,000} = 0,04$.

c. L'événement $A \cup B$ est « la personne interrogée mange du poisson au moins deux fois par semaine OU a entre 12 et 17 ans ». Il y a $622 + 320 = 942$ personnes qui répondent à au moins un de ces deux critères donc $p(A \cup B) = \dfrac{942}{2\,000} = 0,471$.

3. On interroge au hasard une personne parmi les 12-17 ans. Parmi les 400 personnes de cet âge, il y en a 80 qui mangent du poisson au moins deux fois par semaine donc $p_1 = \dfrac{80}{400} = 0,2$.

4. On interroge au hasard une personne parmi celles qui mangent du poisson au moins deux fois par semaine. Parmi les 622 personnes interrogées, il y en a 308 entre 45 et 64 ans ; donc $p_2 = \dfrac{308}{622} \approx 0,50$.

EXERCICE 962

1.

	Sans surpoids	Surpoids	Obésité	Total
Hypertension	574	860	486	1 920
Pas d'hypertension	6 434	2 644	1 002	10 080
Total	7008	3 504	1 488	12 000

2. **a.** $p(A) = \dfrac{1920}{12000} = 0,16$ et $p(B) = \dfrac{1488}{12000} = 0,124$.

b. $A \cap B$: « la personne interrogée soufre d'hypertension artérielle et d'obésité »,

$p(A \cap B) = \dfrac{486}{12000} = 0,0405$

c. $\overline{B}$: « la personne interrogée ne souffre pas d'obésité », $p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 0,876$.

3. **a.** $p_1 = \dfrac{574}{7008} = 0,08$ au centième.

b. $p_2 = \dfrac{486}{1488} = 0,33$ au centième.

c. $\dfrac{p_2}{p_1} \approx 4,125$, il y a 4 fois plus de risque d'hypertension chez les personnes souffrant d'obésité par rapport aux personnes n'ayant pas de problème de surpoids.

EXERCICE 963

1. Il y a $185 + 23 = 208$ clients satisfaits sur 400.

La probabilité est donc égale à $\dfrac{208}{400} = \dfrac{52}{100} = 0,52$.

2.

Clients	F	UE non F	hors UE	Total
satisfaits	165	29	14	208
insatisfaits	135	51	6	192
Total	300	80	20	400

3. $p(A) = \dfrac{20}{400} = 0,05$ et $p(B) = \dfrac{192}{400} = 0,48$.

4. $A \cap B$: « Le client qui a rempli la fiche n'est pas européen et est insatisfait » ;

$p(A \cap B) = \dfrac{6}{400} = \dfrac{1,5}{100} = 0,015$.

$A \cup B$: « Le client qui a rempli la fiche n'est pas européen ou est insatisfait » ;

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,05 + 0,48 - 0,015 = 0,515.$$

5. Il y a 80 Européens non français et parmi eux 51 sont insatisfaits.

La probabilité est donc égale à $\dfrac{51}{80} = 0,6375$ soit 63,75%.

EXERCICE 964

1.

Nombre de personnes	Satisfaites du gîte A	Non satisfaites du gîte A	Total
Satisfaites du gîte B	42	30	72
Non satisfaites du gîte B	36	12	48
Total	78	42	120

2. **a.** $p(A) = \dfrac{78}{120} = 0,65$, $p(B) = \dfrac{72}{120} = 0,60$

$p(C) = \dfrac{42}{120} = 0,35$, $p(D) = \dfrac{36}{120} + \dfrac{30}{120} = 0,55$.

b. $A \cup B$: « La personne est satisfaite du gîte A ou du gîte B ».

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(C) = 0,9.$$

3. Sur les 72 personnes satisfaites du gîte B, 42 sont satisfaites du gîte A, soit une probabilité égale à : $\dfrac{42}{72} = \dfrac{7}{12} \approx 0,583$, soit 0,58 au centième près.

EXERCICE 965

1.

	Dans la ville	Autre ville de la région	Autre région	Total
Cuisine	240	144	96	480
Service	160	96	64	320
Total	400	240	160	800

2. $p(A) = \dfrac{320}{800} = 0,4$. (ou puisque 60 % font leur stage cuisine $100 - 60 = 40$ % font leur stage en service).

$p(B) = \dfrac{160}{800} = \dfrac{20}{100} = 0,2$.

3. **a.** • $A \cap B$: « L'élève choisi est en stage en service et dans une autre région »

• $A \cup B$: « L'élève choisi est en stage en service ou dans une autre région ».

• $\overline{A}$: « L'élève choisi est en stage en cuisine ».

b. $p(A \cap B) = \dfrac{64}{800} = \dfrac{8}{100} = 0,08$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{40}{100} + \frac{20}{100} - \frac{8}{100} = \frac{52}{100} = 0,52.$$

$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = 0,6$

4. Sur les 320 élèves en stage de service, 64 sont partis dans une autre région. La probabilité est donc égale à $\dfrac{64}{320} = 0,2$.

EXERCICE 966

On peut illustrer la situation par un tableau en supposant un total de 1000 chaudières :

	G	$\overline{G}$	Total
D	2	80	82
$\overline{D}$	198	720	918
Total	200	800	1000

1. **a.** $P(G \cap D) = \dfrac{2}{1000} = 0,002$

b. $P(D) = \dfrac{82}{1000} = 0,082$.

2. $P_D(G) = \dfrac{2}{82} = \dfrac{1}{41}$.

3. $P(X = 0) = P(G) = 0,2$

$P(X = 80) = P\left(\overline{G} \cap \overline{D}\right) = 0,72$

$P(X = 280) = P\left(\overline{G} \cap D\right) = 0,08$

$E(X) = 0 \times 0,2 + 80 \times 0,72 + 280 \times 0,08 = 80$, le coût moyen d'un contrôle est de 80 €.

4. D'après la question **2.**, parmi les chaudières défectueuses la probabilité qu'une soit sous garantie est égale à $\dfrac{1}{41}$ donc la probabilité qu'elle ne soit pas sous garantie est égale à $\dfrac{40}{41}$. On en déduit la probabilité demandée : $p = 1 - \left(\dfrac{40}{41}\right)^5 \approx 0,116$.

EXERCICE 967

1.
- — $AR_1R_2R_3R_6R_7B$
- — $AR_1R_2R_4R_6R_7B$
- — $AR_1R_2R_5R_4R_6R_7B$
- — $AR_1R_8R_9R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$
- — $AR_1R_8R_{10}R_{12}R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$
- — $AR_1R_8R_{11}R_{13}R_{15}R_{17}R_{18}B$

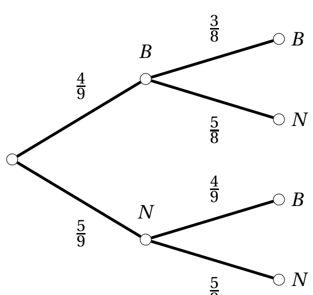
2. **a.** Chaque parcours a une probabilité de $\dfrac{1}{6}$. Il y a 3 parcours passant par R_7, la probabilité cherchée est donc égale à $3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.
b. Il y a 2 parcours passant par R_{14}, la probabilité cherchée est donc égale à $2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.
3. **a.** Il y a deux parcours à 6 bonds qui correspondent à $X = 12$;
trois parcours à 7 bonds qui correspondent à $X = 14$;
un parcours à 8 bonds qui correspond à $X = 16$.
b.

x_i	12	14	16
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c. $E(X) = \dfrac{41}{6} \approx 13,66$.

EXERCICE 968

1. Nombre de tirages de deux boules possibles :
$9 \times 8 = 72$.
Tirer deux boules de couleurs différentes, c'est tirer une boule blanche puis une noire ou bien une noire puis une blanche, d'où le nombre de tirages de boules de couleurs différentes : $4 \times 5 + 5 \times 4 = 40$.
On en déduit la probabilité p, d'obtenir deux boules de couleur différente : $p = \dfrac{40}{72} = \dfrac{5}{9}$.
2. **a.** Soit p_1 la probabilité recherchée :
$p_1 = \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{20}{81}$.
b. Soit p_2 la propriété recherchée :
$p_2 = \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{40}{81}$.
3. Soit p_3 la probabilité recherchée.
On peut établir un arbre de probabilité :



$p_3 = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{8} + \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{85}{162}$.

EXERCICE 969

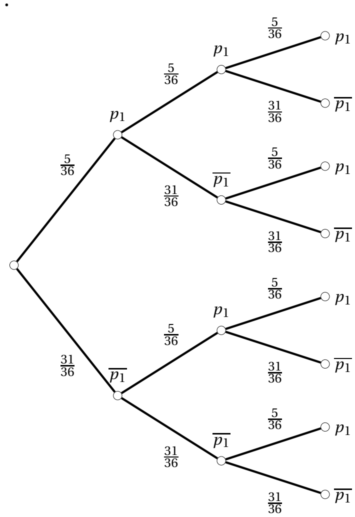
1. La cible a une superficie de 2826 m^2 d'où
$P(A) = \dfrac{2826}{10000} = 0,2826$; $P(B) = \dfrac{800}{10000} = 0,08$
Le champ de luzerne a une superficie de 4000 m^2 d'où $P(C) = 0,4$
$P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 0,2374$.
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque saut de quatre parachutistes le nombre de parachutistes arrivant sur la cible :
E : « Aucun d'entre eux n'arrive sur la cible » d'où $P(E) = P(X = 0) = (1 - 0,28)^4 \approx 0,2687$.
F : « L'un d'entre eux au moins arrive sur la cible », $P(F) = 1 - P(E) \approx 0,7313$.

EXERCICE 970

1. On peut déterminer toutes les issues grâce à un tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On en déduit alors que $p = \dfrac{5}{36}$.
2. **a.** Etablissons un arbre de probabilité illustrant la situation :



b. $P(X=3)=\left(\dfrac{5}{36}\right)^3$

$P(X=2)=3\times\dfrac{31}{36}\times\left(\dfrac{5}{36}\right)^2$

$P(X=1)=3\times\left(\dfrac{31}{36}\right)^2\times\dfrac{5}{36}$

$P(X=0)=\left(\dfrac{31}{36}\right)^3$

c. Obtenir 3 fois le score 8 correspond à $(X=3)$, $P(X=3)=0{,}003$ à 10^{-3} près.

d. Obtenir au moins 2 fois le score 8 correspond à $(X=2)$ et $(X=3)$,

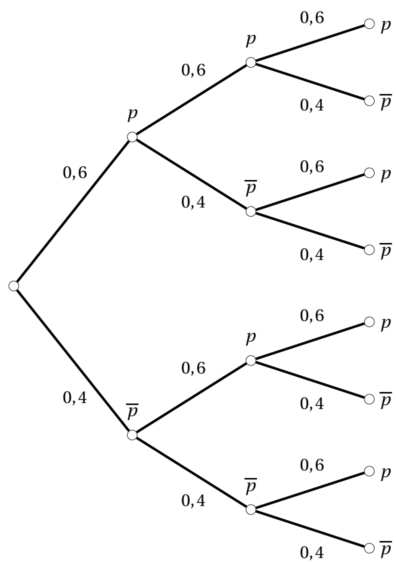
$P(X=3)+P(X=2)=0{,}053$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 971

1. $\overline{x}=200{,}75$ et $\sigma=4{,}8$ à 0,1 près.

2. $p=\dfrac{300}{500}=0{,}6$, ainsi 60% des barquettes ont une masse supérieure ou égale à 200 g.

3. a.



b. Soit p_1 la probabilité recherchée :

$p_1=0{,}6^3=0{,}216$.

c. « Au moins une barquette a une masse supérieure ou égale à 200 g » est l'événement contraire de « aucune barquette n'a une masse supérieure ou égale à 200 g ».

Soit p_2 la probabilité recherchée :

$p_2=1-0{,}4^3=0{,}936$

EXERCICE 972

1. a. Il y a 7 balles parmi les 30 jouets donc $p(A)=\dfrac{7}{30}$.

Il y a 10 objets rouges parmi les 30 jouets donc $p(B)=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$.

b. Il y a 10 cubes bleus parmi les 18 cubes donc la probabilité de tirer un cube bleu sachant que l'enfant a tiré un cube est égale à $\dfrac{10}{18}=\dfrac{5}{9}$.

2. a. L'événement « il y a au moins un cube parmi les deux objets choisis » est l'événement contraire de « il n'y a aucun cube parmi les deux objets choisis ».

Les deux objets sont alors choisis parmi les 12 qui ne sont pas des cubes :

$p\left(\overline{C}\right)=\dfrac{12}{30}\times\dfrac{11}{29}=\dfrac{22}{145}$

b. X peut prendre les valeurs 0 ; 1 ou 2.

$p(X=0)=p\left(\overline{C}\right)=\dfrac{22}{145}$

$(X=1)$: on choisit un cube parmi les 18 cubes puis un non-cube parmi les 12 non-cubes ou un non-cube parmi les 12 puis un cube parmi les 18 :

$p(X=1)=\dfrac{18}{30}\times\dfrac{12}{29}+\dfrac{12}{30}\times\dfrac{18}{29}=\dfrac{72}{145}$.

$(X=2)$: on choisit un cube parmi les 18 puis un second cube parmi les 17 restants :

$p(X=2)=\dfrac{18}{30}\times\dfrac{17}{29}=\dfrac{51}{145}$.

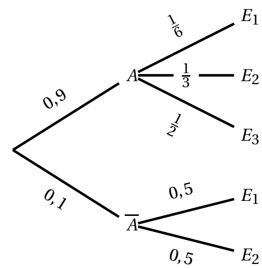
L'espérance mathématique se note $E(X)$, la formule de calcul est celle de la moyenne pondérée en statistiques :

$E(X)=0\times\dfrac{22}{145}+1\times\dfrac{72}{145}+2\times\dfrac{51}{145}=\dfrac{246}{145}\approx 1{,}7$ au dixième près.

En répétant l'expérience un grand nombre de fois, l'enfant aura en moyenne 1,7 cubes.

EXERCICE 973

Soit A l'événement « le visiteur utilise l'ascenseur » et E_i l'événement « le visiteur va au $i^{\text{ème}}$ étage ».



1. **a.** $P(A \cap E_2) = P(A) \times P_A(E_2) = 0,3$
   b. $P(E_2) = P(A \cap E_2) + P\left(\overline{A} \cap E_2\right) = \dfrac{7}{20} = 0,35$
   c. $P_{E_2}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap E_2\right)}{P(E_2)} = \dfrac{1}{7}$.
2. **a.**

x_i	7	17	34	51
$p(X = x_i)$	0,1	0,15	0,3	0,45

   b. $E(X) = 36,4$. Un visiteur payera en moyenne 36 € et 40 centimes pour une visite.

EXERCICE 974

On commence par dresser un tableau illustrant la situation :

	A	$\overline{A}$	Total
B	24	26	50
$\overline{B}$	16	34	50
Total	40	60	100

$p(A) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$ et $p(B) = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

$p(C) = \dfrac{26}{100} = \dfrac{13}{50}$ et $p(D) = \dfrac{26}{60} = \dfrac{13}{30}$

$p(E) = \dfrac{26}{50} = \dfrac{13}{25}$.

EXERCICE 975

1. $S_1 = 1+2+3+4+5$
2. $S_2 = 8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2+14^2+15^2$
3. $S_3 = 4+7+10+13+16+19+22+25+28+31+34+37+40$
4. $S_4 = 1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9$

EXERCICE 976

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{49} (2k+1)$
2. $S_2 = \sum_{k=2}^{11} 2^k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{10} (-3)^k$

EXERCICE 977

1.b – 2.c – 3.b – 4.b – 5.c

EXERCICE 978

1. **a.** $c = 1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.
   b. $A = 1500 \times (1,03)^{10} = 2\,015{,}87$ €,
   soit 515, 87 € d'intérêts .
2. **a.** $S = 1500 \times 1,03 \times 1,0225 = 1\,579{,}76$ €.
   b. $B = 1500 \times 1,03 \times (1,0225)^9 = 1\,887{,}54$ €
3. **a.** $A - B = 128,33$ €.
   b. $t = \dfrac{128,33}{517,87} \approx 0,2488$ soit une perte d'environ 24,88% des intérêts espérés.

EXERCICE 979

Soient S la somme des notes, M la moyenne du groupe et n le nombre de concurrents ayant obtenu une note inférieur à la moyenne du groupe.

D'après l'énoncé$M + 3 = \dfrac{S+4n}{24}$ de plus $M = \dfrac{S}{24}$.
On en déduit alors que $4n = 72$ donc $n = 18$.
Ainsi 6 concurrents ont obtenu une note supérieure à la moyenne du groupe.

EXERCICE 980

1.

	Pâtisserie	Laitage	Fruit	Total
Viande	226	141	65	432
Poisson	44	51	73	168
Total	270	192	138	600

2. $p(V) = \dfrac{432}{600} = 0,72$ et $p\left(\overline{V}\right) = 0,28$

   $p(P) = \dfrac{270}{600} = 0,45$; $p(L) = \dfrac{192}{600} = 0,32$

   $p(F) = \dfrac{138}{600} = 0,23$.
3. 432 personnes ont pris de la viande, parmi elles 65 ont pris un fruit.
   Donc $p_V(F) = \dfrac{65}{432} \approx 0,15$.
4. 432 personnes ont pris de la viande, parmi elles 141 ont pris un laitage.
   Donc $p_V(L) = \dfrac{141}{432} \approx 0,33$.
5. 168 personnes ont pris du poisson, parmi elles 44 ont pris une pâtisserie.

   Donc $p_{\overline{V}}(P) = \dfrac{44}{168} \approx 0,26$.

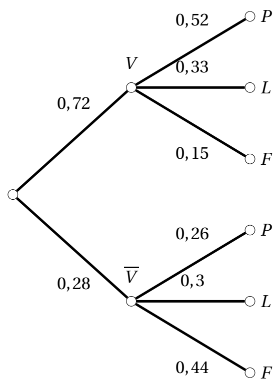
6. 168 personnes ont pris du poisson, parmi elles 51 ont pris un laitage.
Donc $p_{\overline{V}}(L) = \dfrac{51}{168} \approx 0,30$.

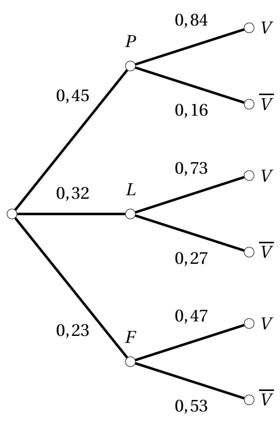
7. 270 personnes ont pris une pâtisserie, parmi elles 226 ont pris de la viande.
Donc $p_P(V) = \dfrac{226}{270} \approx 0,84$.

8. 192 personnes ont pris un laitage, parmi elles 141 ont pris de la viande
Donc $p_L(V) = \dfrac{141}{192} \approx 0,73$.

9. 138 personnes ont pris un fruit, parmi elles 73 ont pris du poisson.
Donc $p_F\left(\overline{V}\right) = \dfrac{73}{138} \approx 0,53$.

10.





EXERCICE 981

1. On complète le tableau suivant qui couvre l'année 2007 :

	Cure 1	Cure 2	Cure 3	Total
Femmes	840	1 660	1 000	3 500
Hommes	1 200	500	800	2 500
Total	2 040	2 160	1 800	6 000

2.
- Il y a 2 040 personnes qui ont choisi la cure 1 donc $P(A) = \dfrac{2040}{6000} = 0,34$.
- Il y a 2 500 hommes donc $P(B) = \dfrac{2500}{6000} \approx 0,42$.
- Il y a 1 660 femmes qui ont choisi la cure 2 donc $P(C) = \dfrac{1660}{6000} \approx 0,28$.

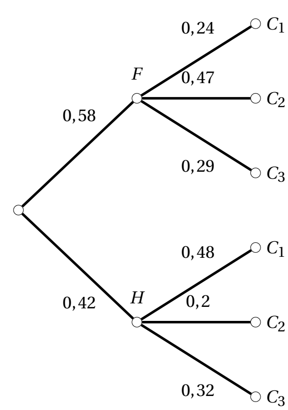
3. **a.** L'événement $A \cap B$ est « Le client est un homme qui a choisi la cure 1. »
Il y a 1 200 hommes qui ont choisi la cure 1 donc $P(A \cap B) = \dfrac{1200}{6000} = 0,2$.
b. L'événement $A \cup B$ est « Le client est un homme ou c'est un client qui a choisi la cure 1. »
En tout, cela fait $840+1200+500+800 = 3340$ clients,

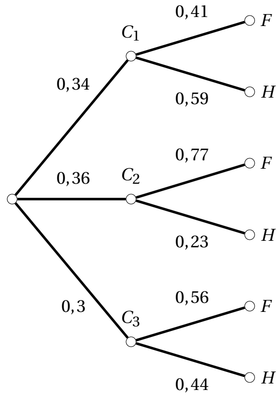
donc $P(A \cup B) = \dfrac{3340}{6000} \approx 0,56$.

c. L'événement $\overline{A}$ est « Le client n'a pas choisi la cure 1. »
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2040}{6000} = 0,66$.

4. On a prélevé la fiche d'une femme donc parmi 3 500 personnes.
Parmi ces 3 500 personnes, il y en a 1 000 qui ont choisi la cure 3.
Donc la probabilité cherchée est $p = \dfrac{1000}{3500} \approx 0,29$.

5.





EXERCICE 982

1. Chacune des 3 boules a deux places possibles, soit $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ rangements possibles.
2. Parmi les 8 rangements possibles, dans 1 seul toutes les boules sont dans la case A, donc $p(E) = \dfrac{1}{8}$.
   S'il n'y a pas de boule dans la case A, elles sont toutes dans la case B, nous revenons au cas précédent, donc $p(F) = \dfrac{1}{8}$.
   La boule numéro 2 est dans la case A, les deux autres ont chacune 2 possibilités donc $p(G) = \dfrac{1 \times 2 \times 2}{8} = \dfrac{1}{2}$.
3. **a.**

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

   b. $E(X) = 0 \times \dfrac{1}{8} + 1 \times \dfrac{3}{8} + 2 \times \dfrac{3}{8} + 3 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{8}$.

EXERCICE 983

1. D'après l'énoncé, on a :
   $P_3 = P_1 + \dfrac{1}{8} \qquad P_5 = P_3 + \dfrac{1}{8} = P_1 + \dfrac{1}{4}$

   $P_4 = \dfrac{1}{2}P_2 \qquad P_6 = \dfrac{1}{2}P_4 = \dfrac{1}{4}P_2$

   $P_2 = \dfrac{3}{2}P_1$.
   La somme des P_i est égale à 1, on en déduit alors que $\dfrac{45}{8}P_1 = \dfrac{5}{8}$ donc $P_1 = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{8}{45} = \dfrac{1}{9}$.
   On en déduit alors que $P_6 = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{24}$.
2. Soit p la probabilité d'obtenir un nombre pair :
   $p = P_2 + P_4 + P_6 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{24}$.
3. Pour répondre aux deux dernières questions, on peut utiliser un arbre de probabilités.
   Soit X la variable aléatoire qui à tout lancer de 3 fois le dé, associe le nombre de 6 obtenus.
   a. $P(X = 2) = 3 \times \left(\dfrac{1}{24}\right)^2 \times \dfrac{23}{24} = \dfrac{23}{4608} = 0{,}0050$ à 10^{-4} près.
   b. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{1}{24}\right)^3 = 0{,}9999$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 984

On note a, b, c, $\cdots$, z les âges des personnes assises en tournant autour de la table.
Soient les sommes : $S_a = a + b + c + d$, $S_b = b + c + d + e$, $\cdots$, $S_z = z + a + b + c$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } S_a + S_b + \cdots + S_z &= 4(a + b + c + \cdots + z) \\ &= 4 \times (35 + 36 + 37 + \cdots + 60) \\ &= 4940. \end{aligned}$$

$\dfrac{4940}{4} = 190$, il s'agit de la moyenne des sommes S_a, S_b, $\cdots$, S_z.
Par définition de la moyenne, l'une au moins des sommes est inférieure ou égale à 190.

EXERCICE 985

Supposons que Papa, Maman et Bébé ours effectuent respectivement p, m et b manœuvres.
Le manège tourne de $\dfrac{288p + 224m + 63b}{2016}$ de tour.
Tout peut donc être ramené à une fraction de dénominateur 2016 et de numérateur un entier inférieur ou égal à 2016.
Il reste à savoir si tout entier inférieur à 2016 peut être atteint.
Nous remarquons que $288 - 224 - 63 = -1$, Papa ours allant dans un sens, Maman et Bébé ours dans l'autre sens, le manège tourne de $\dfrac{1}{2016}$ tour.
Toutes les positions peuvent donc être atteintes.

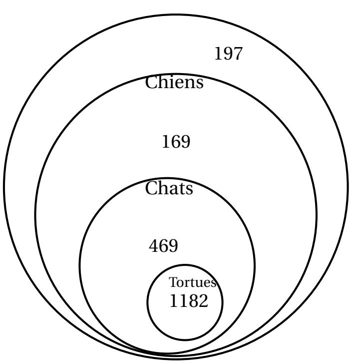
EXERCICE 986

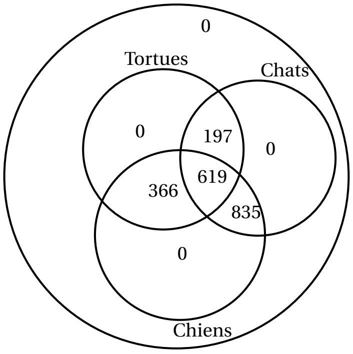
• Puisque 1182 maisons abritent une tortue, il ne peut y avoir plus de 1182 maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue.
Il y a plus de maisons qui abritent un chien et plus de maisons qui abritent un chat que de maisons qui

abritent une tortue, il est donc possible que toutes les 1182 qui abritent une tortue abritent aussi un chien et un chat.
Le plus grand nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue est égal à 1182, on a $x = 1182$.

• 1182 maisons abritent une tortue et il y a 2017 maisons en tout, il y a donc 835 maisons qui n'abritent aucune tortue ($2017 - 1182 = 835$).
Or, 1651 maisons abritent un chat.
835 maisons n'abritent aucune tortue, il y a au plus 835 maisons qui abritent un chat, mais pas une tortue. En d'autres termes, les maisons qui n'abritent une tortue n'abritent pas nécessairement toutes un chat.
Il y a donc au moins 816 maisons ($1651 - 835 = 816$) qui abritent une tortue et un chat.

• 1820 maisons abritent un chien.
Puisqu'au moins 816 maisons qui abritent une tortue et un chat, il y a au plus 1201 maisons ($2017 - 816 = 1201$) qui n'abritent aucune tortue ou aucun chat (ou ni l'un, ni l'autre). Puisque 1820 maisons abritent un chat, il y a au moins 619 maisons ($1820 - 1201 = 619$) qui abritent un chien, un chat et une tortue.
En d'autres termes, le plus petit nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue est égal à 619. Donc $y = 619$.
Les deux diagrammes de Venn ci-dessous montrent que chacune de ces situations est possible :





Puisque $x = 1182$ et $y = 619$, alors $x - y = 563$.

EXERCICE 987

1. Les trajets possibles sont :
ABC AFE BCD BAF CAB CDE.

2. **a.** Il y a deux trajets finissant en E, donc $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
b. Il y a 4 chemins finissant par le sas 2, donc $p_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3. **a.** X peut prendre les valeurs : 56; 58; 66; 68; 74.
b.

x_i	56	58	66	68	74
$p\left(X = x_i\right)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

c. $E(X) = 66$, le robot mettra en moyenne 66 min pour nettoyer trois salles.
d. On a un temps inférieur à 60 minutes dans 2 cas sur 6, soit $p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4. **a.** On a $V(X) = \frac{296}{6} = \frac{148}{3}$. Donc $\sigma(X) \approx 7{,}02$.
b. En faisant travailler le robot 365 jours on a $365 \times E(X) + 1{,}5 \times \sigma(X) \times \sqrt{365} = 24\,291{,}2$ (min) soit environ 405 h. Il est donc acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an.

EXERCICE 988

Si on tire 100 balles, les quatre couleurs sont représentées. Dans le cas le moins favorable, les 11 qui restent sont toutes de la même couleur. Cela signifie qu'il y a au moins 12 balles de chaque couleur dans le sac. Dans le cas le moins favorable, trois couleurs n'ont que 12 représentantes (et la quatrième 75). Il faut alors tirer $75+12+1$

balles au moins pour être sûr de tirer trois couleurs. Le nombre minimal de boules à tirer est donc 88.

EXERCICE 989

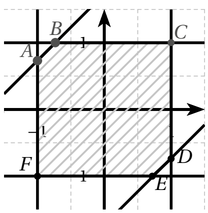
Les points P et Q ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,x)$ et $(1\,;\,y)$.

Les cercles sont sécants si et seulement si la somme de leurs rayons est supérieure à la distance de leurs centres.

Une condition nécessaire et suffisante exprimant le problème est donc $\sqrt{(1-0)^2+(y-x)^2} \leqslant 2$, ou encore $-\sqrt{3} \leqslant y-x \leqslant \sqrt{3}$.

Représentons le domaine plan défini par :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ x-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant x+\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{dans un repère orthonormé.}$$



Le domaine des cas possibles est donc un carré de côté 2 et le domaine des cas favorables le polygone $ABCDEF$.

Les deux triangles des coins sont rectangles isocèles et leur réunion est un carré de côté $2-\sqrt{3}$. Son aire est donc $7-4\sqrt{3}$.

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{4-7+4\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4\sqrt{3}-3}{4}$.

EXERCICE 990

1. Le plus simple est de construire un arbre de probabilités illustrant la situation.

   a. $P_0 = \dfrac{4}{27}$. **c.** $P_2 = \dfrac{8}{27}$

   b. $P_1 = \dfrac{13}{27}$ **d.** $P_3 = \dfrac{2}{27}$.

2. **a.** $P(X=-1) = P_1 = \dfrac{13}{27}$

   $P(X=0) = P_0 + P_2 = \dfrac{12}{27}$

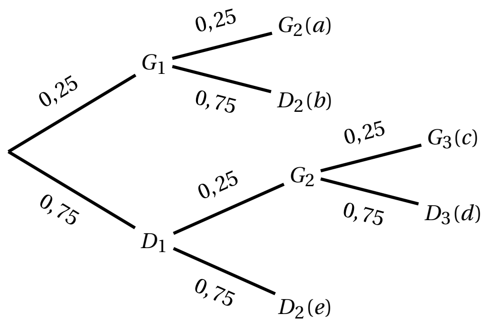
   $P(X=3) = P_3 = \dfrac{2}{27}$.

   b. $E(X) = -1 \times \dfrac{13}{27} + 0 \times \dfrac{12}{27} + 3 \times \dfrac{2}{27} = -\dfrac{7}{27}$.

L'espérance est négative, la règle du jeu n'est pas favorable au joueur, en effet en jouant un grand nombre de parties, le joueur perdra en moyenne $0{,}26$ € par partie.

EXERCICE 991

1.



2. **a.** $P(A) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$, $P(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$,

$P(C) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{64}$, $P(D) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{64}$

$P(E) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

b. $P(A) = \dfrac{4}{64}$, $P(B) = \dfrac{12}{64}$, $P(C) = \dfrac{3}{64}$, $P(D) = \dfrac{9}{64}$ et $P(E) = \dfrac{36}{64}$.

L'événement le moins probable est donc l'événement C.

L'événement le plus probable est donc l'événement E.

3. **a.**

x_i	48	16	64	0	-32
$p(X=x_i)$	$\dfrac{4}{64}$	$\dfrac{12}{64}$	$\dfrac{3}{64}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{36}{64}$

b. $E(X) = -9$. L'espérance est négative, en jouant un grand nombre de parties, le joueur perdra en moyenne 9 points par partie, il n'a donc aucun intérêt à jouer .

c. Soit n le nombre de points perdus si la bille arrive en e :

$E(X) = 0 \iff 576 + 36n = 0 \iff n = -16$.

Le jeu sera équitable si le joueur perd 16 points lorsque la bille arrive dans la case e.

EXERCICE 992

1. **a.** 22 des 25 pièces ne sont pas défectueuses, la probabilité de choisir une pièce non défectueuse est donc égale à $\dfrac{22}{25} = 0,88$.

   b. Sachant qu'il y a 3 pièces défectueuses, la personne doit acheter 10 pièces pour être certaine d'avoir 7 pièces non défectueuses.

2. **a.** La probabilité de choisir une pièce sans défaut est égale à 0,88, la probabilité d'en tirer deux sans défaut est donc $(0,88)^2 = 0,7744$

   b. $P(X = 0) = 0,7744$

   $P(X = 1) = 2 \times 0,88 \times 0,12 = 0,2112$

   $P(X = 2) = 0,12^2 = 0,0144$

   $E(X) = 0 \times 0,7744 + 1 \times 0,2112 + 2 \times 0,0144 = 0,24$.

EXERCICE 993

1.

	Problème de dimension	Dimension correcte	Total
Problème de résistance	3	7	10
Résistance correcte	2	88	90
Total	5	95	100

2. 3 pièces ont les deux défauts, la probabilité de choisir une pièce ayant deux défauts est donc $\dfrac{3}{100} = 0,03$.

3. **a.** 88 pièces n'ont aucun défaut, la probabilité qu'une pièce rapporte 5 € est donc égale à 0,88.

   b.

X	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,02	0,88

   c. $E(X) = 0 \times 0,1 + 2 \times 0,02 + 5 \times 0,88 = 4,44$.

   Une pièce rapporte en moyenne 4,44 € à l'entreprise Anatoly.

4. L'entreprise Anatoly fabrique 1500 pièces par jour, elle a donc un bénéfice moyen de 6660 €.

   L'entreprise Basilia fabrique 1800 pièces pour un bénéfice de $4 \times 1800 = 7200$ €.

   L'investisseur choisira l'entreprise Basilia.

EXERCICE 994

1. **a.** $P(L) = \dfrac{2}{3}$ et $P(N) = \dfrac{1}{3}$.

   b. D'après l'énoncé : $P_N(B) = 0,15$ et $P_L(B) = 0,12$.

2. $P_N\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$.

3.

	L	N	Total
B	24	15	39
$\overline{B}$	176	85	261
Total	200	100	300

4. **a.** $P(L \cap B) = \dfrac{24}{300} = 0,08$.

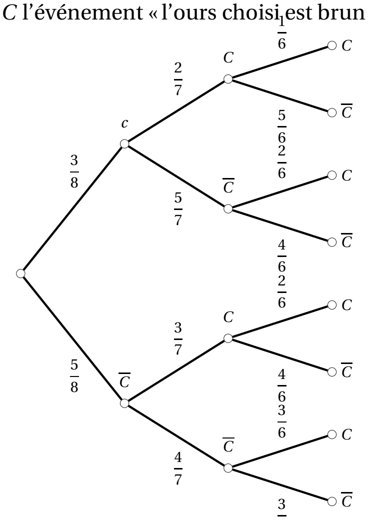
   b. $P(N \cap B) = \dfrac{15}{300} = 0,05$

   c. $P(B) = \dfrac{39}{300} = 0,13$.

5. $P_B(L) = \dfrac{24}{39} = \dfrac{8}{13}$.

EXERCICE 995

1. On commence par construire un arbre pondéré en notant C l'événement « l'ours choisi est brun ». :



   a. Soit p_1 la probabilité cherchée :

   $p_1 = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{11}{56}$.

   b. Soit p_2 la probabilité cherchée. « Avoir au moins un ours brun » est l'événement contraire de « avoir

3 ours blancs » donc $p_2 = 1 - \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{23}{28}$.

2. **a.** $P\left(A \cap \overline{C}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$

b. $P\left(B \cap \overline{C}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$

c. $P\left(\overline{C}\right) = P\left(A \cap \overline{C}\right) + P\left(B \cap \overline{C}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16}$

EXERCICE 996

1. Dans cette question, nous avons 21 trombones jaunes et 19 verts.

a. $P(A) = \frac{21}{40} \times \frac{19}{39} + \frac{19}{40} \times \frac{21}{39} = \frac{133}{260} = 0,512$ au millième près.

b. $P(B) = \frac{19}{40} \times \frac{18}{39} = \frac{57}{260} = 0,219$ au millième près.

c. $P(C) = 1 - P(A) = \frac{127}{260} = 0,488$ au millième près.

2. **a.** $p_n = \frac{2n+1}{4n} \times \frac{2n-1}{4n-1} + \frac{2n-1}{4n} \times \frac{2n+1}{4n-1}$

$= \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(4n-1)} = \frac{4n^2-1}{8n^2-2n}$.

b. $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1,866$, le maximum de la fonction est atteint pour une valeur comprise entre 1 et 2.

$f(2) = \frac{15}{28}$ et $f(1) = \frac{1}{2} = \frac{14}{28}$ donc $f(2) > f(1)$.

On en déduit alors que p_n est maximal pour $n = 2$.

EXERCICE 997

1. Commençons par établir un tableau réunissant les données :

	F	G	Total
E	32	42	74
$\overline{E}$	8	18	26
Total	40	60	100

a. $P(G \cap E) = \frac{42}{100} = 0,42$

b. $P(F \cap E) = \frac{32}{100} = 0,32$

c. $P(E) = P(G \cap E) + P(F \cap E) = 0,74$.

2. $P_E(G) = \frac{42}{74} = 0,568$ au millième près.

EXERCICE 998

1. On peut construire un arbre du type de l'exercice 995. On en déduit alors : $p(O) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$.

2. **a.** X peut prendre les valeurs : 30 (3 boules en acier), 120 (2 boules en acier et 1 en or), 210 (1 boule en acier et 2 en or) et 300 (3 boules en or).

b.

X	30	120	210	300
$P(E = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

c. $E(X) = 30 \times \frac{1}{35} + 120 \times \frac{12}{35} + 210 \times \frac{18}{35} + 300 \times \frac{4}{35}$

$E(X) = \frac{1290}{7} \approx 184,29$ soit une espérance de gain de 184 €.

3. **a.** Soit P la probabilité cherchée :

$P = \frac{7}{10} \times \frac{4}{35} = \frac{2}{25} = 0,08$

b. $E = 2000 \times \frac{2}{25} + 1000 \times \frac{6}{175} = \frac{1360}{7} \approx 194,29$

soit une espérance de gain de 194 €.

EXERCICE 999

1. Pour obtenir la même composition des deux urnes, il faut tirer une pièce en argent de l'urne A ET une pièce en cuivre de l'urne B, soit une probabilité p égale à :

$p = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$.

2. **a.** On prend 3 pièces dans l'urne A, dont obligatoirement une en cuivre (il n'y a que deux pièces en argent). Cette pièce en cuivre va rejoindre les 4 déjà présentes dans l'urne B. Il y aura donc au moins 5 pièces en cuivre dans l'urne B. **b.** On établit un arbre de probabilité (voir en fin d'exercice).

$(X = 5)$: on extrait donc une pièce en cuivre et deux en argent, d'après l'arbre

$p(X = 5) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$

$P(X = 5) = \frac{3}{10}$

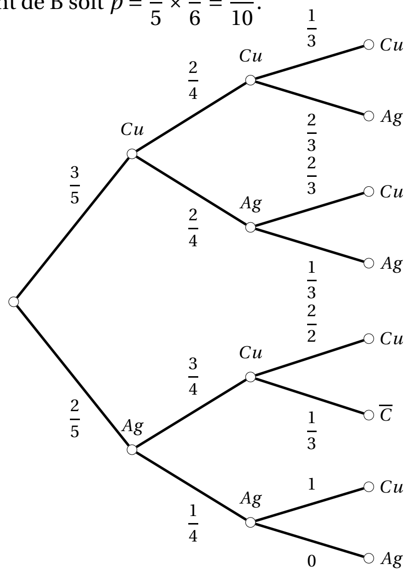
$p(X = 6) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$

$P(X = 6) = \frac{6}{10}$

$p(X = 7) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

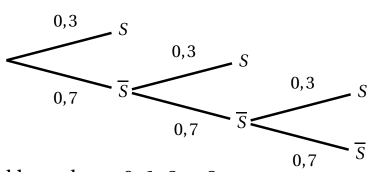
c. $E(X) = 5 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{6}{10} + 7 \times \frac{1}{10} = 5,8$

3. Il faut tirer une pièce en cuivre de A puis une pièce en argent de B soit $p = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.



Exercice 1000

1. Soit S l'événement « Math obtient le service sans attente ».



2. X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

3.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,343	0,3	0,21	0,147

4. $E(X) = 1,161$, Math obtiendra le service en moyen à la deuxième tentative.

5. $p(X=0) = 0,7^6$ $\quad p(X=1) = 0,3$

$p(X=2) = 0,7 \times 0,3$ $\quad p(X=3) = 0,7^2 \times 0,3$

$p(X=4) = 0,7^3 \times 0,3$ $\quad p(X=5) = 0,7^4 \times 0,3$

$p(X=6) = 0,7^5 \times 0,3$

Exercice 1001

1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors $p(C) = 0,2$.

a. Comme les tirs sont indépendants la probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $(1-p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.

b. Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié à la question précédente. La probabilité cherchée est donc égale à $1-0,64 = 0,36$.

c. Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon.

L'événement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de n tirs », de probabilité $p(\overline{C})^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).

Par conséquent : $p_n = 1 - 0,8^n$.

d. $p_n > 0,99 \iff 1-0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01$.

La suite de terme général $0,8^n$ est strictement décroissante, $0,8^{20} \approx 0,012$ et $0,8^{21} \approx 0,009$.

Il faut que $n \geqslant 21$ pour que $p_n > 0,99$.

2. Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k, calculée à la question **1.c** : $p_k = 1-0,8^k$.

Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité de crever le ballon est :

$\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3+p_4) = 0,4096$.

3. **a.** $f_1 = 0,29$; $f_2 = 0,245$; $f_3 = 0,26$ et $f_4 = 0,205$.

b. Alors $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = 0,00375$.

c. On constate que $d^2 < D_9$. On peut considérer, au risque de 10%, que le dé n'est pas pipé.

2de

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES POUR RÉUSSIR SON ANNÉE

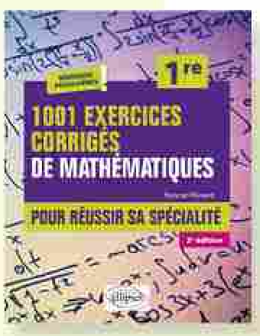
Tout en consolidant les savoirs des élèves, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances dans l'objectif de suivre l'étude des mathématiques en première générale ou technologique.

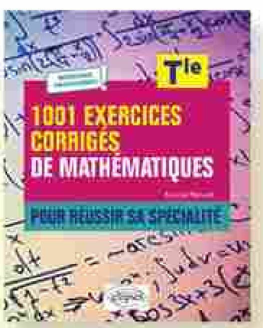
Ce recueil d'exercices, allant de la simple application du cours à des exercices difficiles, s'articule autour de 4 chapitres :

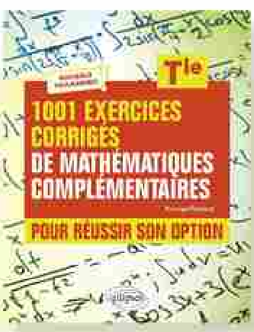
1. Nombres et calculs
2. Fonctions
3. Géométrie
4. Statistiques et probabilités

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement, n'utilisant dans la mesure du possible que les notions de ce sous-chapitre ;
- des exercices de synthèse utilisant plusieurs notions du chapitre ou des autres chapitres ;
- des exercices pour se préparer à la poursuite des études dans cette spécialité. Ces exercices sont plus difficiles, mêlant plusieurs notions ou abordant des thèmes qui ne sont pas au programme de seconde mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études ;
- les corrigés détaillés de tous les exercices.







www.editions-ellipses.fr
9 782340 063273