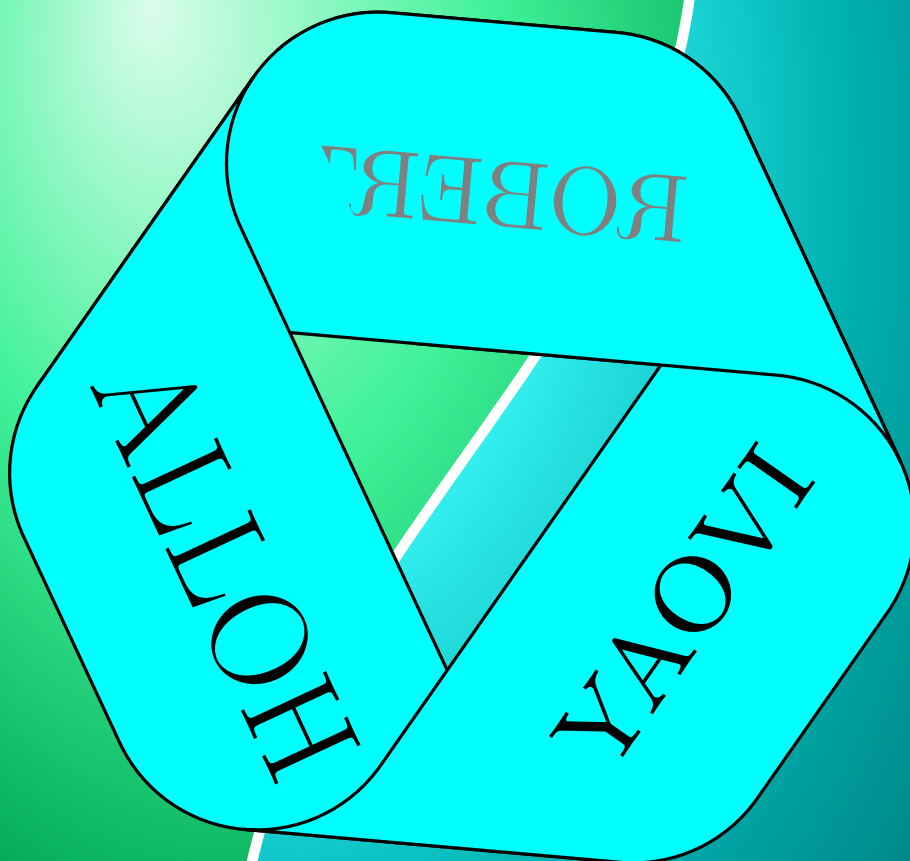


Catalogue *PRO*

PROBATOIRE SERIE D TOGO

Mathématiques $f_m(x) = \frac{x^2 + x + m}{x + 1}$



Catalogue de Probatoire Série D
TOGO
Session 2006-2021



ALLOH YAOVI ROBERT
PROFESSEUR DE SCIENCES PHYSIQUES
+228 92 60 69 35
allohyaovirobert@gmail.com

TOGO
Enseignement Professionnel

LA CONNAISSANCE EST UNE FORCE



PRÉFACE

Chers(ères) élèves, Arrêtez de vous fier à ceux qui disent et ou pensent que vous n'êtes pas capables de grande chose ; le seul fait d'être rentré en possession de cet ouvrage « ***La connaissance est une force*** » *regorgeant les sujets de Mathématiques de Probatoire Série D TOGO de 2006 à 2021*, initié par ***ALLOH Yaovi Robert***, montre à n'en point douter, combien ambitieux vous pouvez être.

Vous avez porté votre choix sur une l'Ecole, cet ouvrage est vôtre ; mais là commence votre « calvaire ». Votre intellect sera en effet soumis à toutes formes de difficultés des plus basiques aux plus affinées.

Notre ultime objectif est de vous faire comprendre que vous partez sur le même pied d'égalité que n'importe quel élève du même niveau académique que vous. La différence résidera en ce que vous aurez su prendre l'ascendant psychologique sur le reste de vos camarades au jour de l'examen.

La Motivation, le sens du Sacrifice et de l'Effort, le Don de soi-même, l'Abnégation a toute épreuve, l'Endurance devant l'adversité, l'Humilité sont les qualités que vous devrez posséder pour atteindre vos ambitions les plus folles quel que soit le domaine dans lequel vous aurez décidé de vous lancer.

Il peut arriver que vous buttiez sur des difficultés apparemment insurmontables, le plus important sera alors de savoir vous rapprocher de la source « idéale » pour avoir de plus amples éclairages.

Dès à présent commencez ou continuez à croire en vous et en votre potentiel sans toutefois cédé aux diverses pressions. « *A tes résolutions répondra le succès ; Sur tes sentiers brillera la lumière.* »

Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen.

(Albert EINSTEIN)

Fait à Lomé, le 30 Juin 2021

Yaovi Robert ALLOH

Sujets des Séries D

Session 2006-2021



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2006



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

On considère la suite U définie par : $U_0 = 2$, $U_1 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $U_n = \frac{4U_{n-1} - U_{n-2}}{3}$ et la suite V définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - U_{n-1}$ (1).

1.
 - a. Calculer V_1 .
 - b. Exprimer V_n puis V_{n-1} en fonction de U_{n-1} et U_{n-2} .
 - c. Montrer que V est une suite géométrique et exprimer V_n en fonction de n .
2.
 - a. Calculer la somme $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n .
 - b. En utilisant (1), calculer S_n en fonction de U_n et U_0 .
En déduire l'expression de U_n en fonction de n .
 - c. Montrer que la suite U converge et préciser sa limite.



EXERCICE 2

Soit dans le plan un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 5$, $BC = 6$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Construire l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 82$.
2. Choisir k pour que la ligne de niveau k de la fonction : $f \mapsto MA^2 + MB^2$ passe par C .
3. Construire l'ensemble H des points M tels que : $61 \leq MA^2 + MB^2 \leq 82$.
4. On note F_k l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k$ où k est un réel donné.
 - a. Quelle est la nature de F_k ?
 - b. Choisir k pour que F_k passe par B , et construire F_k dans ce cas particulier.



PROBLÈME

Soit a un nombre réel différent de -1 et f_a la fonction à variable réelle définie par :

$$f_a(x) = 1 + \frac{a+1}{x^2 + 2ax + 1}.$$

On désigne par (C_a) la représentation graphique de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie A

1. Trouver suivant les valeurs du nombre réel a , l'ensemble de définition de la fonction f_a .
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à toutes les courbes (C_a) .

3. Montrer que pour $a = 0$, $f_0(x) > 1$. En déduire la position de (C_0) par rapport à l'asymptote (D) .
4. Calculer la fonction dérivée f'_a de f_a et déterminer le signe de $f'_a(x)$ pour $a = -2$ et pour $a = 1$. En déduire le sens de variation de f_{-2} et de f_1 .

Partie B

Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + \frac{3}{x^2 + 4x + 1}$.

1. Trouver l'ensemble de définition E de la fonction g .
2. Calculer les limites aux bornes de E .
3. Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. En déduire le signe de la fonction g sur E .
4. Construire la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé.
5. Soit λ un nombre réel, discuter suivant les valeurs de λ le nombre de solutions d'équation $x \in E, g(x) = \frac{\lambda}{2}$.
6. Soit h la fonction définie par $h(x) = g(|x|)$.
 - a. Etudier la parité de h .
 - b. Trouver l'ensemble sur lequel les fonctions h et g coïncident.
 - c. Construire dans le repère précédent, la courbe de la fonction h .



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2007



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral tel que le triplet (A, B, C) soit de sens direct. On note I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. Justifier l'existence d'une rotation R de centre A qui transforme B en C . Indiquer l'angle de la rotation R .
2. Quelle est l'image de I par R ?
3. On note C' l'image de C par R . Démontrer que (KC') est perpendiculaire à (AC) . En déduire que l'image de (IC) par R est (KB) .



EXERCICE 2

1. Vérifier que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
2. Déduire de la question précédente la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 x + (1 + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
Placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.
3. En utilisant les résultats obtenus ci-dessus, résoudre l'inéquation : $x \in] -\pi, \pi]$, $2\sin^2 x + (1 + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0$.
4. Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.



PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm .

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{x^2 + a|x| + b}{x - 1}$, a et b étant des nombres réels. On désigne par (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient les

$$\text{inéquations : } \begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 5x + 4y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble (E) .
2. Sachant que $b = 2a$, déterminer a et b tels que (a, b) soient les coordonnées entières d'un point de (E) qui rendent maximale la somme $x + y$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3|x| + 6}{x - 1}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $x = 0$.
3. Etudier les variations de f .
4. Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes (D_1) et (D_2) en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Etudier les positions relatives de (C) et (D_1) d'une part et de (C) et (D_2) d'autre part.
6. Tracer la courbe (C) , ses asymptotes et les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 0.

Partie C

Soit la fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2 + 3|x| + 6}{|x| - 1} \end{cases}$ et (C') sa représentation graphique.

1. Donner l'ensemble de définition de h .
2. Etudier la parité de h .
3. Dédire (C') de (C) et tracer (C') dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $(E) : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, 2x^2 + (m + 6)|x| + 12 - m = 0$, lorsque m décrit $\mathbb{R}$.



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2008



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

On considère le triangle ABC tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Démontrer que $AI = \sqrt{33}$.
2. **a.** Soit M un point du plan. Pour quelle valeur du nombre réel m le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\overrightarrow{u}$ indépendant du point M ?
Déterminer alors le vecteur $\overrightarrow{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
- b.** Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :
 $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$.
3. Soit D le barycentre du système $(A; -1)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$.
 - a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
 - b.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
 - c.** Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points M du plan tel que :
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.



EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie par :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4 . La suite U est-elle arithmétique? est-elle géométrique?
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n différent de zéro, $1 < U_n < 2$.
b. Démontrer que la suite U est décroissante.
3. Soit V la suite numérique définie par : $V_n = \frac{-1 + U_n}{2 - U_n}$ pour tout entier naturel n non nul.
 - a.** Montrer que la suite V est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
 - b.** Montrer que V est une suite géométrique.
 - c.** Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, V_n en fonction de n .
 - d.** Calculer, en fonction de n , la somme $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$.
 - e.** Déterminer la limite de V_n et celle de S_n .



PROBLEME

Partie A

Soit m un nombre réel. On considère la fonction f_m telle que $f_m(x) = \frac{x^3}{(x+m)^2}$ et (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Déterminer l'ensemble de définition D_m de f_m .
2. Calculer les limites de f_m aux bornes de D_m . (On distinguera 3 cas : $m < 0$; $m = 0$ et $m > 0$).
3. **a.** Calculer la dérivée f'_m de f_m et montrer que pour tout x de D_m , $f'_m(x) = \frac{P_m(x)}{(x+m)^3}$ où P_m est une fonction numérique que l'on déterminera.
b. Etudier le sens de variation de la fonction f_m puis dresser son tableau de variation. (On discutera suivant le signe de m).

Partie B

On suppose que $m = -1$

1. Expliciter la fonction g .
2. En exploitant les résultats de la partie A, donner le sens de variation de la fonction g , dresser son tableau de variation.
3. **a.** Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que : $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$.
b. En déduire que la droite (Δ) d'équation : $y = x + 2$ est asymptote à la courbe (C) .
c. Etudier les positions relatives de (C) et de (Δ) .
d. Montrer que (C) admet une autre asymptote (D) que l'on précisera.
e. Tracer (Δ) , (D) et (C) .

Partie C

On considère la fonction h de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{|x|^3}{(|x|-1)^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de h puis étudier la parité de h .
2. Donner le plus grans ensemble sur lequel h et g coïncident.
3. Tracer la représentation graphique (Γ) de la fonction h dans le même repère que (C) .



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2009



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

1. α est un nombre réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}$ tel que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
 - a. Vérifier que $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin \alpha$.
 - b. Calculer $\cos 2\alpha$ et en déduire la valeur de α .
2. Soit (E) l'équation $x \in \mathbb{R}, [(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 2x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin 2x]^2 = 4$
 - a. Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $\cos^2(2x - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{4}$.
 - b. Résoudre alors (E) et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
3. Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation : $[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 2x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin 2x]^2 \geq 4$.



EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle en A , tel que $BC = 2a$ et G le barycentre de : $(A; 4), (B; -1), (C; -1)$.

1. Démontrer que G et le milieu du segment $[BC]$ sont symétrique par rapport au point A .
2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2.$$
3. Soit $(E) = \{M \in (P) / 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2\}$. Vérifier que $A \in (E)$; puis déterminer et construire l'ensemble (E) .



PROBLEME

On considère la fonction f définie par $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \end{cases}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
 - b. Etudier les variations de f et donner son tableau de variations.
2.
 - a. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 4}$ où a, b et c sont des réels à déterminer.
 - b. Déterminer les asymptotes à (C) .
 - c. Soit (D) l'asymptote oblique à (C) .
 - d. Montrer que $A(0; 1)$ est centre de symétrie de (C) .

- 3.** Tracer (C) .
- 4.** Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$;
 $x^3 + (2m - 1)x^2 + 4(1 - 2m) = 0$.
- 5.** On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \end{cases}$, on appelle (Γ) la courbe représentative de g dans le même repère.
- a.** Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour tout $x \neq \{-2; 2\}$
- b.** Expliquer comment (Γ) s'obtient à partir de (C) .
- c.** Tracer (Γ) dans le même repère.





PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2010



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 1$; $U_1 = 2$ et par la formule de récurrence : $3U_{n+1} = 5U_n - 2U_{n-1}$, $n > 0$.

1. Calculez U_2 , U_3 et U_4 .
2. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $V_n = U_{n-1} - U_n$.
 - a. Montrez que V est une suite géométrique. Précisez la raison et le premier terme.
 - b. Exprimez V_n en fonction de n . La suite (V_n) est-elle convergente ?
 - c. Exprimez S_n en fonction de n avec $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.
3.
 - a. Montrez que pour tout entier naturel n , $S_n = U_n - U_0$.
 - b. Déduisez-en U_n en fonction de n . Précisez sa limite.



EXERCICE 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a , a étant un réel strictement positif.

1.
 - a. Construisez le point D défini par : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
 - b. Démontrez que D est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que vous préciserez.
 - c. Démontrez que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2.
 - a. Démontrez que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ puis que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
 - b. Déduisez-en que le triangle BCD est rectangle en B .
3. Calculez les distances CD , BD et AD en fonction de a .
4. Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = 0$.
 - a. Vérifiez que le point C appartient à (Γ) .
 - b. Exprimez $f(M)$ en fonction de MD et de a .
 - c. Déterminez et construisez (Γ) .
5. Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2$.
 - a. Déterminez l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.
 - b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (Γ) et (Δ) . Montrez que le triangle CDI est équilatéral.



PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , (*unité 1cm*), f est la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 27}{2x^2}$, (C) est la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J) .

1.
 - a. Donnez l'ensemble de définition D de f .
 - b. Calculez les limites de f aux bornes de D .
2.
 - a. Calculez la dérivée f' de f .
 - b. Montrez que le signe de $f'(x)$, $x \in D$ est celui de la f est celui de la fonction U définie par : $U(x) = 4x(x^3 - 27)$. Déduisez-en le sens de variation de f .
 - c. Dressez le tableau de variation de f .
3.
 - a. Déterminez les nombres réels a, b, c et d tels que : pour tout x de D : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{2x^2}$.
 - b. Montrez que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) dont vous préciserez une équation.
 - c. Déterminez la position de (C) par rapport à (D) .
4.
 - a. Construisez la courbe (C) .
 - b. Vous préciserez l'existence d'une autre asymptote pour la courbe (C) .
5. g est la fonction définie par : $g(x) = \frac{-2|x|^3 - 2x^2 + 27}{2x^2}$
 - a. Etudiez la parité de g .
 - b. Montrez que f et g coïncident sur un ensemble que vous préciserez.
 - c. Justifiez, sans étude, la construction de la courbe (C') représentative de la fonction g , puis construisez (C') .
6. A l'aide de la courbe (C) , discutez graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel k , le nombre de solutions de l'équation : $2x^3 - 2(k+1)x^2 + 27 = 0$.



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2011



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = 4U_n - 6n + 15,$$

 $\forall n \in \mathbb{N}$

1. **a.** Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b. Exprimez V_n en fonction de n .
c. Déduisez-en que pour tout entier naturel, $U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.
2. Démontrer que la suite (U_n) peut s'écrire sous la forme d'une suite géométrique (t_n) et d'une suite arithmétique (w_n) .
3. **a.** Calculez $S_1 = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$ et $S_2 = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.
b. Déduisez-en $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.



EXERCICE 2

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, I le centre du cercle circonscrit à ce triangle ; D le symétrique de A par rapport à B .

1. **a.** Démontrer que le triangle ACD est rectangle.
b. Déterminez les mesures des angles $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$. Justifiez les résultats.
2. On considère par (H, K, J) l'image de (A, B, C) par la rotation d'angle $(-\frac{\pi}{3})$ et de centre I .
a. Construisez le triangle HJK .
b. Quelle est la nature de la figure $AHCJBK$?
3. **a.** Démontrer que $f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est un vecteur indépendant du point M du plan.
b. Soit E un point du plan tel que $\overrightarrow{CE} = f(M)$ et C' le milieu de $[AB]$. Montrez que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CC'}$.
4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$.
a. Montrez que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CE}$.
b. Déduisez-en et construisez l'ensemble (F) .



PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminez les réels a, b, c et d sachant que :

- ♣ (C) coupe l'axe oy au point d'ordonnée I .
- ♣ (C) passe par le point $A(-1; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient 2.
- ♣ La droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à (C) .

Partie B

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x + 1}$.

1. **a.** Déterminez l'ensemble de définition D de f .
b. Montrez que pour tout x appartenant à D , $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x + 1}, \quad \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ sont des réels à déterminer.}$$
c. Déduisez-en que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) et donnez son équation.
2. Montrez que le point B , intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe (C) .
3. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.
4. Tracez (C) et (D) .
5. Utilisez le graphique pour discuter du nombre et du signe des solutions de l'équation :
 $2x^2 + (4 - 2m)x + 1 - m = 0$.
6. Utilisez encore le graphique pour justifier que la restriction de f sur $]-\frac{1}{2}; -\infty[$ est une bijection.
 Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{|2x + 1|}$. Expliquez comment obtenir la courbe (C') de h à partir de (C) de f .

Partie C

On considère la fonction g_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g_m(x) = (m - 1)x^2 + (2 - 3m)x + 2m - 3$.

1. Déterminez le nombre de courbes qui passent par le point $A(-1; 1)$.
2. Démontrez que toutes les courbes (P_m) passent par deux points dont les coordonnées sont indépendantes de m .
3. **a.** Pour $m \neq \{+1\}$ calculez les coordonnées du sommet S_m de (P_m) .
b. Quel est l'ensemble décrit par S_m lorsque m décrit $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$.



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2012



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

Soit l'expression $A(x) = \frac{2 \sin 4x}{2 \cos^2 x - 1}$ avec x élément de $\mathbb{R}$.

1. Trouver l'ensemble D des réels pour lesquels $A(x)$ existe.
2. Montrez que pour tout réel x de D , on a : $A(x) = 4 \sin 2x$.
3. Soit l'équation : $\frac{2 \sin 4x}{2 \cos^2 x - 1} = m$ où m désigne un paramètre réel.
 - a. Pour quelle valeur de m cette équation admet-elle des solutions ?
 - b. Résolvez l'équation proposée pour $m = 2\sqrt{3}$ et placez les points images des solutions sur un cercle trigonométrique.
 - c. Montrez que, pour $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ avec x de $]0; \frac{\pi}{2}[$
 - d. Résolvez alors l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ pour tout x de $]0; \frac{\pi}{4}[$



EXERCICE 2

ABC est un triangle équilatéral de côté 2 (unité en cm). On appelle τ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

1. M étant un point quelconque du plan, construisez M' l'image de M par $h \circ \tau$.
2.
 - a. Démontrez que $\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
 - b. Déduisez-en que $h \circ \tau$ admet un point invariant Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = -3\overrightarrow{AB}$ puis placez Ω .
 - c. Déduisez-en que $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$ puis caractérisez $h \circ \tau$.
3. Soit Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
 - a. Vérifiez que les points A et H appartiennent à Γ , H étant le pied de la hauteur issue de A .
 - b. Déterminez puis construisez Γ .
 - c. Déterminez puis construisez Γ' l'ensemble que décrit M' (M' étant défini en 1) lorsque M décrit Γ .



PROBLEME

Partie I

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^3}{x^2 - 1} \end{cases}$, de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. **a.** Déterminez l'ensemble de définition D_f de f .
b. Etudiez le sens de variation de f puis dressez son tableau de variation.
2. **a.** Démontrez qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que : pour tout x élément de D_f ,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}.$$
b. Déduisez-en que C_f admet une asymptote oblique (D) dont vous préciserez une équation.
c. Donnez les équations des autres asymptotes de (C_f) .
3. Tracez (C_f) et ses asymptotes dans le plan.

Partie II

Soit (C_m) l'équation : $x \in \mathbb{R}, x^3 = mx^2 - m$.

Discutez graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation (E_m) .

Partie III

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{(|x|)^3}{x^2 - 1} \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 1}{(x - 1)^2 - 1} \end{cases}$

Soient (C_g) et (C_h) les représentations graphiques respectives des fonctions g et h .

1. **a.** Etudiez la parité de g .
b. Précisez l'ensemble sur lequel f et g se coïncident.
2. Déduisez la représentation graphique (C_g) de g à partir de (C_f) . (On expliquera la construction et on utilisera une couleur différente pour représenter (C_g)).
3. **a.** Montrez qu'il existe deux réels e et p tels que : $h(x) = f(x - p) + e$.
b. Déduisez-en que (C_h) se déduit de (C_f) par une transformation du plan que l'on précisera.
c. Représentez graphiquement (C_h) dans un repère que (C_f) et (C_g) .



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2013



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos 3x = 0$. Placez sur le cercle trigonométrique les images des solutions.
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$.
3. Quelles sont les solutions communes aux deux équations précédentes dans $[0; 2\pi]$.
4. Déterminez dans $[0; 2\pi]$ les solutions de l'équation : $\tan 3x = \tan(x - \frac{\pi}{3})$.



EXERCICE 2

On considère la suite U définie par $U_0 = 0$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $U_{n+1} = \frac{16U_n - 12}{3U_n + 4}$

1. Calculez U_1 , U_2 et U_3 .
2. On pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n - 2}$.
 - a. Calculez V_0 , V_1 et V_2 .
 - b. Montrez que (V_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez la raison.
 - c. Étudiez le sens de variation de la suite (V_n) .
3.
 - a. Exprimez V_n en fonction de n .
 - b. Déduisez-en l'expression de U_n en fonction de n .
 - c. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$. Exprimez S_n en fonction de n .



PROBLÈME

Ler plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 1cm).

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{x^2 - m|x - 2|}{x + 1}$ où m est un nombre réel. Déterminez m pour que le point d'intersection de la courbe représentative de la fonction g et de l'axe des ordonnées ait pour ordonnée 2.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2 + |x - 2|}{x + 1}$. On note (C) la courbe représentative de f .

1. Ecrivez $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2. Calculez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudiez la continuité et la dérivabilité de f en 2.
4. **a.** Calculez la dérivée f' de f puis étudiez le sens de variation de f .
b. Dressez le tableau de variation de f .
5. **a.** Déterminez les réels a, b, c, a', b' et c' tel que :
 ★ $f(x) = ax + b + \frac{x}{x+1}$ pour $x < 2, x \neq -1$ et
 ★ $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{x+1}$ pour $x > 2$.
b. Déduisez-en que (C) admet deux asymptotes (D_1) en $-\infty$ et (D_2) en $+\infty$.
c. Etudiez les positions relatives de (C) et (D_1) d'une part et de (C) et (D_2) d'autre part.
d. Précisez l'autre asymptote de (C) .
6. Tracez la courbe (C) , ses asymptotes et les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 2.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + |x+2|}{1-x}$. On note (C') la représentation graphique de h . Après avoir expliqué comment vous obtenez (C') à partir de (C) , vous construirez (C') dans le même repère que (C) .

D/ On considère l'équation $(E) : x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 2] : x^2 - (k+1)x - k + 2 = 0$.
 Déterminez graphiquement le nombre et le signe des solutions de (E) .



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2014



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 1$; $b_0 = 8$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$;
 $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$.

1. Calculer a_1 et b_1 .
2. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $d_n = b_n - a_n$.
 - a. Démontrez que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.
 - b. Exprimez (d_n) en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $d_n > 0$.
 - d. Montrez que (d_n) converge vers 0.
 - e. On pose $T_n = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$. Calculer T_n en fonction de n .
3.
 - a. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} = -\frac{d_n}{4}$.
 - b. En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n) .



EXERCICE 2

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $P(x) = 0$.
2. On donne l'équation (E) : $\cos 3\theta = \cos 2\theta$.
 - a. Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'équation (E) .
 - b. Exprimer $\cos 2\theta$ en fonction de $\cos \theta$; puis montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$.
 - c. On pose $X = \cos \theta$. Exprimer alors $\cos 3\theta$ et $\cos 2\theta$ en fonction de x .
 - d. En déduire que l'équation (E) est équivalente à : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ P(x) = 0 \end{cases}$.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$, puis celle de $\cos \frac{\pi}{5}$.



PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(3 - x)$ et on désigne par (P) la représentation graphique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Construire les tangentes à (P) aux points d'abscisses 0 et 3 et la courbe (P) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$ et (C) sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition D de g .
 - b. Déterminer trois réels a , b et c tels que : pour tout x de D , $g(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
 - c. En déduire que (C) admet une asymptote oblique et donner son équation.
2.
 - a. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
 - b. En déduire que (C) admet une asymptote verticale et donner son équation.
 - c. Montrer que le point A , intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe (C) .
3. Donner une équation des tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 3.
4. Tracer les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 3, les asymptotes puis (C) dans le même repère que (P) .

Partie C

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x}{2(x - 1)}(x^2 - 5x + 6 - |x^2 - 3x|)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - ♠ L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
 - ♠ L'inéquation $x^2 - 3x \geq 0$.
2. Exprimer alors $h(x)$ sans symbole de valeur absolue.
3. Sans autres calculs, en tenant compte des résultats qui précèdent et en utilisant une couleur différente de celles utilisées pour construire (P) et (C) , représenter graphiquement h dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2015



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

Soit la suite numérique (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} (n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

1. Calculer U_1 ; U_2 .
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n + 4}$
b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \leq 1$.
 On considère la suite (V_n) telle que : $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$.
3. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
4. Calculer V_n puis U_n en fonction de n .
5. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$. Calculer S_n en fonction de n .



EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = a$; $AC = a\sqrt{a}$; $BC = 2a$ où a est un réel strictement positif.

1. Construire le barycentre G des points $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, 1)$
2. **a.** Calculer GA^2 , GB^2 et GC^2 .
b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que :
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2$.
3. Soit I le milieu de $[BC]$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points tels que :
 $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = -a^2\sqrt{3}$.
4. Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe M' tel que :
 $3\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
a. Montrer que f est une homothétie. Préciser son centre et son rapport.
b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ'') image de (Γ) par f .



PROBLEME

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$. On note (C) la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites en ses bornes.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3.
 - a. Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
 - b. Dédire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) puis préciser l'autre asymptote de (C) .
 - c. Démontrer que le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie de (C) .
4.
 - a. Déterminer les points de (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation : $y = -4x + 2$.
 - b. Donner l'équation des tangentes (T_1) et (T_2) à (C) en $x_0 = 3$ respectivement.
5. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
6. Tracer (D_m) la droite d'équation : $y = -4x + m$ où m est un paramètre réel.
Discuter graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de (C) et de (D_m) .

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de -2 et 2 par $h(x) = \frac{x^2 + 2|x| - 3}{|x| - 2}$. On note (C') sa courbe représentative.

- a. Etudier la parité de h .
- b. Déterminer l'ensemble sur lequel h et f se coïncident.
- c. Expliquer comment obtenir la courbe (C') à partir de (C) .
- d. Construire (C') dans le même repère que (C) .



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2016



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation : $t \in \mathbb{R} ; 8t^4 - 10t^2 + 3 = 0$.
2. Pour tout nombre réel x , montrer que $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
3. Soit l'équation $(E) : \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.
 - a. Montrer que résoudre cette équation revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} \cos x = u \\ 16u^6 - 20u^4 + 6u^2 = 0 \end{cases}$$
 - b. En déduire les solutions de l'équation (E) .



EXERCICE 2

Afi a vendu un appareil électroménager pour 400 000 F. Elle place son argent à un taux de 5%, avec intérêts composés (c'est-à-dire l'intérêt produit au cours d'une année s'ajoute au capital de l'année pour devenir le capital de l'année suivante) et ne retirer chaque année que 40 000 F pour subvenir à ses petits besoins.

Les retraits et les calculs d'intérêts sont effectués chaque 1^{er} janvier.

On appelle P_n le montant du placement d'Afi chaque 1^{er} janvier en prenant pour n le nombre d'années écoulées. On a $P_0 = 360000F$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3 .
2. Démontrer que $P_{n+1} = 1,05P_n - 40000$.
3. On pose $U_n = P_n - 800000$.
Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. En déduire une expression de U_n en fonction de n , puis de P_n en fonction de n .
5. Que conseiller à Afi ?



PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que : pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$.
2. Détermine les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f .
3. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (D) la droite de l'équation : $y = x + 1$.

- a.** Démontrer que la droite (D) est une asymptote à la courbe (C) .
- b.** Etudier la position de (C) et de (D) .
- 4.** Calculer la dérivée f' de f et démontrer que $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$.
- 5.** Etudier le sens de variation de f , puis dresser le tableau de variation de f .
- 6.** Déterminer les coordonnées du point A en lequel la tangente (T) à la courbe (C) est parallèle à la droite d'équation : $y - x - 1 = 0$.
Déterminer une équation de cette tangente.
- 7.** **a.** Construire C , ses asymptotes ainsi que la tangente (T) .
b. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel k , le nombre de points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D_k) d'équation : $y = x + k$.
Retrouver ces résultats par le calcul.
- 8.** **a.** Démontrer que : pour tout réel $x > 0$, $0 < f(-x) - (x+1) < \frac{2}{x}$.
b. Sans utiliser une calculatrice, donner une valeur approchée de $f(10^6)$ en précisant s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut et en donnant un majorant de l'erreur commise.
- 



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2017



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

On donne trois points A , B et C distincts non alignés du plan et on note a , b , c les longueurs des côtés du triangle ABC : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC .

1. On note I le milieu du segment $[BC]$.
 - a. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
 - b. Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2 .
 - c. En déduire : $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
 - d. Ecrire de même les expressions de BG^2 et CG^2 .
2. a. Montrer que : $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
 b. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
3. On choisit $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.
 Placer les trois points A , B , C et dessiner E dans ce cas particulier.



EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.
2. On donne à a la valeur trouvée.
 - a. Calculer v_0 puis calculer v_n en fonction de n .
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2^{n+1} + 1$.
3. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 2w_n + 3 \end{cases}$$
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2u_n - w_n = 5$.
 - b. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .



PROBLEME

Soit la fonction numérique f , de la variable réelle x , définie par : $f(x) = |x| - \frac{8}{|x| + 2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que les limites aux bornes de cet ensemble.
 - b. Etudier la dérivabilité de f en 0 ; qu'en déduire pour la courbe (C) ?
 - c. Démontrer que la droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie pour la courbe (C) .
2.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
 - b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f .
3.
 - a. Démontrer que les droites : (D_1) d'équation $y = -x$ et (D_2) d'équation $y = x$, sont asymptotes à la courbe (C) .
 - b. Préciser la position relative de (C) et de (D_2) quand x est positif.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et donner les équations des tangentes à (C) en ces points.
5. Construire, dans le même repère, la courbe (C) , les droites (D_1) et (D_2) , ainsi que les tangentes trouvées.





PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2018



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

Soit a un paramètre différent de $\frac{1}{3}$ et (U) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 7}{3U_n - 1} \end{cases}.$$

1. Déterminer les nombres réels b et c tels que : Pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = b + \frac{c}{3U_n - 1}.$$
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles (U) est une suite constante.
 Dans la suite de l'exercice, on prendra $U_0 = 3$ et on considère la suite (V) définie par :

$$V_n = \frac{3U_n - 7}{3(U_n + 1)}$$
3. Calculer V_0 , V_1 et V_2 .
4.
 - a. Montrer que (V) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b. Calculer V_n en fonction de n puis en déduire U_n en fonction de n .
5.
 - a. Montrer que (V) est une suite convergente et calculer sa limite.
 - b. La suite (U) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.



EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle tel que : $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}$, $AB = a\sqrt{3}$ et $BC = a$; où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer et construire le barycentre G des points $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, -1)$
 - a. Calculer GA^2 , GB^2 et GC^2 .
 - b. Déterminer et construire l'ensemble (γ) des points M du plan tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4a^2.$$
3. On note J , le milieu de $[AC]$. Déterminer et construire l'ensemble (γ') des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = -a^2$
4. Soit g_m l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que

$$m\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
 où $m \in \mathbb{R}^*$
 - a. Quelle est la nature de g_m pour $m = 1$?
 - b. Pour $m \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, montrer que g_m est une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques.
 - c. Pour $m = \frac{2}{3}$, déterminer et construire l'ensemble (γ'') image de (γ) par $g_{\frac{2}{3}}$.



PROBLEME

On considère la fonction numérique f , de la variable réel x , définie par $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 2}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
 - b. Calculer les limites de f aux bornes de D .
2.
 - a. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}, \forall x \in D$
 - b. Dédire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) puis préciser l'autre asymptote.
 - c. Déterminer les coordonnées du point J , intersection des asymptotes.
 - d. Montrer que le point $\Omega(-2; 6)$ est le centre de symétrie de (C) .
3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4.
 - a. Déterminer les points de (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y - 4x + 3 = 0$
 - b. Donner l'équation des tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe (C) aux points d'abscisses respectives $x = -1$ et $x = -3$.
5.
 - a. Déterminer les points d'intersections de (C) avec les axes du repère.
 - b. Tracer la courbe (C) et les tangentes (T_1) et (T_2) .
6. Discuter graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m le nombre de points d'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 4x + m$.
7. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$
 - a. Déterminer l'ensemble de définition D_h de h .
 - b. Compare $h(-x)$ et $f(x)$ pour x de D_h .
 - c. Expliquer comment obtenir la courbe (C') à partir de (C) .
 - d. Construire (C') dans le repère précédent.



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2020



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

On considère les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $U_1 = 1$; $V_1 = 1$; $U_2 = 2$, pour tout $n > 1$, $U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n-1}}{2}$ et $V_n = U_n - U_{n-1}$.

1. Calculer U_3 , U_4 , V_2 , V_3 , V_4 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera les éléments.
3. Montrer que $U_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$. Calculer U_n en fonction de n .
4. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente et calculer sa limite.



EXERCICE 2

1. S est la symétrie de centre A . Quelle est la transformation $S \circ S$?
2. A et B sont deux points distincts ; S_A est la symétrie centrale de centre A , S_B est la symétrie centrale de centre B . M est un point quelconque. On pose : $N = S_A(M)$ et $M' = S_B(N)$.
 - a. Fais une figure.
 - b. Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$, puis conclure sur la nature de $f = S_B \circ S_A$.
3. Indiquer sans calcul la nature de $g = S_A \circ S_B$.
4. Trouver l'application $g \circ f$.
5. $\vec{u}$ est un vecteur non nul, A est un point, t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et S la symétrie centrale de centre A . En utilisant les questions précédentes, trouver :
 - a. une translation f telle que $t = f \circ S$.
 - b. une transformation g telle que $t = S \circ g$.



PROBLÈME

Partie I

Soit le polynôme $A(x) = 4x^3 - 26x^2 + 48x - 18$.

1. Calculer $A(1)$; $A(3)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

Partie II

(γ) la courbe d'équation $y = \frac{-x^2 + ax + b}{cx + 5}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les nombres réels non nuls a , b et c sachant que :

- ★ La droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ est asymptote à (γ) ;
- ★ (γ) passe par le point B de coordonnées $(2; 1)$;
- ★ (γ) admet en B une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

Partie III

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - x - 8}{4x - 10}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E de f .
2. Trouver trois réels α , β et μ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\mu}{2x - 2}$.
3. Calculer les limites de f aux bornes de E .
4. Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.
5. Démontrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C) .
6. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
7. On note (P) la parabole d'équation : $y = -x^2 + 4,5x - 1$.
Donner les caractéristiques de (P) .
8. Démontrer que (C) et (P) ont deux points communs dont on donnera les coordonnées et qu'en l'un de ces points, elles ont une tangente commune.
9. Tracer (C) et ses asymptotes, (P) ainsi que la tangente commune à (C) et à (P) .



PROBATOIRE TOGO SÉRIE D 2021



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifie ta réponse.
2. Détermine le réel a tel que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + a$ soit géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
3.
 - a. Exprime (v_n) en fonction de n .
 - b. Dédus l'expression de (u_n) en fonction de n et donne la limite de (u_n) .
4. Calcule la somme des vingt-et-un premiers termes de (u_n) .



EXERCICE 2

On considère un carré $ABCD$ de sens direct, de centre O et tel que $AB = 4 \text{ cm}$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 3); (B, 2); (C, 3); (D, 7)$. On considère I, J et L les milieux respectifs des segments $[OC]$, $[CD]$ et $[CJ]$.

1.
 - a. Montre que G appartient à la droite (BD) .
 - b. Montre que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$.
 - c. Construis le point G .
2. On se propose de déterminer et construire l'ensemble (C) des points M tel que : $3MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 2MD^2 = 160$.
 - a. Montre que $3MA^2 + 3MC^2 = 6MO^2 + 48$ et $2MC^2 + 2MD^2 = 4MO^2 + 32$.
 - b. Montre que : $M \in (C)$ si et seulement si $OM = 2\sqrt{2}$.
 - c. Justifie que le point A appartient à (C) et en déduis la nature exacte de (C) .
 - d. Construis (C) .



PROBLEME

Soit $f_m : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2 + x + m}{x + 1} \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

1. On définit par g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$
 - a. Etudie la continuité de f_0 et celle de g en -1 .
 - b. Que représente g pour f_0 ?
2. Montre que pour $m < 0$, f_m est strictement croissante.
3. Montre que pour $m > 0$, la fonction dérivée f'_m de f_m a deux zéros distincts.
4. Justifie que pour $m \neq 0$, la courbe (C_g) de g est une droite asymptote à la courbe (C_{f_m}) de f_m .
Dans la suite du problème, on considère $m = 1$.
5. Etudie le sens de variation de f_1 et dresse son tableau de variation.
6. Etudie la position relative des courbes de f_1 et de g .
7. Construis, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes de g et de f_1 .
8. Donne le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 + (1 - k)x + (1 - k) = 0$, suivant les valeurs du paramètre réel k .
9. On considère la fonction h telle que $h(x) = f_1(|x|)$.
 - a. Etudie la parité de h .
 - b. Etudie la dérivabilité de h en 0 .
 - c. Sans avoir étudié les variations de h , construis sa courbe dans le même repère que la courbe de f_1 .
 - d. Explique la construction de cette courbe.

La folie, c'est de faire tout le temps la même chose et de s'attendre à un résultat différent.

(Albert EINSTEIN)



LES 4 LOIS DE LA SPIRITUALITE

La première loi dit : *" La personne qui arrive est la bonne personne ", c'est-à-dire personne n'entre dans notre vie par hasard, toutes les personnes autour de nous, toutes celles qui interagissent avec nous, sont là pour une raison, pour nous apprendre à progresser dans toutes les situations.*

La deuxième loi dit : *" Ce qui s'est passé est la seule chose qui aurait pu arriver." Rien, mais rien, absolument rien de ce qui s'est passé dans notre vie n'aurait pu être autrement. Même le plus petit détail. Il n'y a pas de " Si j'avais fait ce qui s'était passé autrement ..." Non. Ce qui s'est passé était la seule chose qui aurait pu arriver, et c'est comme ça que nous apprenons la leçon et que nous allons de l'avant. Chacune des situations qui se produisent dans notre vie est l'idéal, même si notre esprit et notre ego sont réticents et non disposés à l'accepter.*

La troisième loi dit : *" Le moment où c'est le moment est le bon moment : " Tout commence au bon moment, pas avant ni plus tard. Quand nous sommes prêts à commencer quelque chose de nouveau dans notre vie, c'est alors qu'il aura lieu.*

La quatrième et dernière loi dit : *" Quand quelque chose se termine, c'est fini. " C'est ça. Si quelque chose est terminée dans notre vie, c'est pour notre évolution, donc il est préférable de le laisser, aller de l'avant et continuer désormais enrichis par l'expérience.*

Je pense que ce n'est pas un hasard si vous lisez ceci, si ce texte est entré dans nos vies aujourd'hui c'est parce que nous sommes prêts à comprendre qu'aucun flocon de neige ne tombe jamais au mauvais endroit