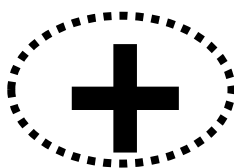


**BACCALAURÉAT DEUXIÈME PARTIE
SESSION DE JUIN 2025**

**LES SUJETS ET CORRIGÉS DES ÉPREUVES DE
MATHÉMATIQUES SÉRIES A_4 , C_4 ET D_4**



PROPOSITION DE CORRIGÉS-TYPES

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAURÉAT 2025	DURÉE : 2H
	MATHÉMATIQUES	Coef : 1
OFFICE DU BACCALAURÉAT	SERIE A4	

EXERCICE I (08,00 points)

Dans une localité de ta commune, les autorités municipales ont décidé de tracer une route pour désengorger le trafic et ainsi réduire les risques d'accidents sur la voie déjà existante. Pour ce faire, elles font appel à un ingénieur des ponts et chaussées qui, après étude du terrain, modélise la nouvelle route par la courbe représentative de la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{-2x^2 - 3x}{x+1}$. Par ailleurs, pour des raisons de sécurité, on doit implanter un poteau électrique à un endroit stratégique de la route. Ce poteau est matérialisé par un point de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur égal à $-\frac{9}{4}$.

Tu es habitant de cette commune et également élève en terminale A4. En guise de révision pour ton examen, ton frère, un employé municipal, te demande de représenter l'esquisse de cette route et d'indiquer la position du poteau électrique.

Réponds aux préoccupations de ton frère en répondant aux consignes suivantes.

Consigne 1 : Grâce à tes connaissances mathématiques, trace l'allure de cette route dans un repère orthonormé (O, I, J) après avoir vérifié que la dérivée

$f'(x) = \frac{(-2x^2 - 4x - 3)}{(x+1)^2}$. On tracera aussi les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = -2x - 1$ et $x = -1$.

Consigne 2 : Détermine l'endroit stratégique où l'ingénieur doit placer le poteau électrique.

EXERCICE II (06,00 points)

I. Choisis la bonne réponse.

1. Si f est une fonction dérivable en un point d'abscisse x_0 , alors sa courbe représentative admet en ce point une tangente (T) d'équation :

☐ A $y = f'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$ ☐ B $y = f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$

☐ C $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ☐ D $y = f'(x_0)(x + x_0) + f(x_0)$

2. On considère la série statistique double suivante :

x_i	1	2	4	6	8	9
y_i	34	44	51	50	54	55

Le point moyen G du nuage de points a pour coordonnées :

☐ A (5 ; 49) ☐ B (5 ; 47) ☐ C (6 ; 49) ☐ D (5 ; 48)

3. Le système suivant : $\begin{cases} e^x \times e^y = e^3 \\ e^{3x+2y} = e \end{cases}$ a pour solutions :

☐ A $S = \{(-5 ; 8)\}$ ☐ B $S = \{(-5 ; -8)\}$ ☐ C $S = \{(5 ; 8)\}$ ☐ D $S = \{(5 ; -8)\}$

4. Limite de $x \ln(x)$ quand x tend vers 0 :

☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C -1 ☐ D $+\infty$

II- Écris la lettre suivie de l'expression manquante. (0,5 pt $\times$ 4)

Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat est appelée expérience ...1...

Un ...2... est une partie de l'ensemble des résultats possibles. Lorsque deux événements ne peuvent pas se produire simultanément, on dit qu'ils sont ...3...

Si $A \cap B = \emptyset$, alors la probabilité $P(A \cup B) = \dots 4 \dots$

EXERCICE III (06,00 points)

A- Soit la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$

1. a. Calcule u_1 et u_2 . (0,5 pt)

b. La suite u est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifie ta réponse. (0,5 pt)

2. On définit la suite v pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$.

a. Justifie que v est une suite géométrique. Précise sa raison et son premier terme. (0,75 pt)

b. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Exprime S_n puis S'_n en fonction de n . (0,75 pt)

B. Une urne contient 5 boules noires et 15 boules rouges.

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

On considère les événements suivants :

A : « tirer exactement une boule noire »

B : « tirer exactement deux boules noires »

C : « tirer exactement trois boules noires »

D : « tirer au moins une boule noire »

1. Calcule le nombre de tirages possibles. (1 pt)

2. a. Calcule $P(A)$; $P(B)$ et $P(C)$. (1,5 pt)

b. Justifie que $P(D) = \frac{137}{228}$. (1 pt)

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAURÉAT 2025	DURÉE : 4H
	MATHÉMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAURÉAT	SERIE C4	

EXERCICE I (08,00 points)

Foire internationale Togo est un événement commercial, voire culturel très festif. Cet événement attire de nombreux exposants nationaux et internationaux, de curieux, de touristes et de hautes personnalités. D'importantes dispositions sont prises pour satisfaire la curiosité des invités. Lors de l'édition 2024, Mr RAJOUAR, un sculpteur malgache, a brillé par l'exposition de ses œuvres d'art. Ces objets sont disposés suivant des configurations particulières sur un support conçu à partir de quatre points A, B, C et D . Ce support matérialise une portion d'un ensemble (Γ) et est illuminé par un dispositif placé en un endroit assimilé à un point E .

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $A(-1; 0; 0)$,

$B(4; 1; 1), C(1; 1; -3), D(0; 3; 4); \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

Et (Γ) est l'ensemble des points (M) de l'espace tels que

$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}). (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = 0$. Mr YOMA ayant participé à l'exposition a été séduit par la beauté d'art de ces objets. L'un est un disque dont le bord est circonscrit à un triangle IJK , et l'autre est une étoile formée par une transformation S .

Le plan complexe étant rapportée à un repère orthonormé direct, les points I, J et K ont

respectivement pour affixes les nombres complexes Z_I, Z_J et Z_K , solutions de l'équation : (E) :

$Z^3 - 3Z^2 + 5Z - 3 + i = 0$ telles que Z_J est un nombre complexe imaginaire pur et la partie imaginaire de Z_K est strictement négative. La transformation S a pour expression analytique :

$\begin{cases} x' = 2x + 8 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$. Mr YOMA sollicite vos compétences en mathématiques d'élève de la classe de

terminale C pour mieux comprendre le dispositif. En ta qualité d'élève de cette classe de terminale C, aide Mr YOMA en répondant aux consignes 1 et 2 ci-après :

Consigne 1 : Après avoir déterminer l'ensemble (Γ) , calcule la distance qui sépare le point E à (Γ) .

Consigne 2 : Après avoir déterminé les coordonnées des points I, J et K représente les configurations que matérialise les deux objets d'arts.

EXERCICE II (06,00 points)

I – Compléter les pointillés par les expressions qui conviennent

(Recopier chaque lettre et mettre la bonne réponse devant la lettre)(0,25×12 pts)

1. La fonction g définie par $G(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ a pour ensemble de définition $D_G = \dots$ (a)... et pour dérivée $G'(x) = \dots$ (b)...

2. Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe (C) d'équation $\frac{(x-1)^2}{m^2} + \frac{y^2}{(m+3)^2} = 1$ est une ellipse ssi $\dots$ (c)..., et une hyperbole ssi $m \dots$ (d)...

3. La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est $\dots$ (e)..., et la composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires en un point A est un demi-tour dont l'axe (D) est $\dots$ (f)...

4. La composée $r_1 \circ r_2$ où $r_1 \left(O_1, \frac{\pi}{3} \right)$ et $r_2 \left(O^2, -\frac{\pi}{3} \right)$ est une identité si $\dots$ (g)..., et une translation si $\dots$ (h)... de vecteur $\overrightarrow{O_1 O_2}$ ou O' est $\dots$ (i)...

5. Tout entier naturel p autre que 0 et 1 et non premier, admet au moins un diviseur premier d tel que $\dots$ (j)...

6. f une application du plan dans lui-même d'expression analytique $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 3 \\ y' = x - y + 5 \end{cases}$ l'application linéaire φ associée à f est telle que $\varphi(i) = \dots$ [a] ..., $\varphi(j) = \dots$ [a]...

II – Choisir la bonne réponse

7. L'ellipse (C) de foyer F et F' d'équation réduite $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ a pour définition bifocale :

- [a] $MF + MF' = 2\sqrt{2}$; [b] $MF + MF' = 8$; [c] $MF + MF' = 4\sqrt{2}$
[d] $MF - MF' = 4\sqrt{2}$.

8. Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $35x - 13y = 3$ a pour solution :

- [a] $(13k + 9; 35k + 24)$; [b] $(13k + 9; 35k - 24)$
[c] $(-13k + 9; -35k + 24)$; [d] $(-13k + 9; 35k - 24)$.

9. Dans l'espace, la projection orthogonale F sur le plan (P) d'équation $x + y + 2z - 3 = 0$ a pour expression analytique :

- [a] $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y - z + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y - z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z - 3) \end{cases}$ [b] $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x + y + z + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(x + y + 2z + 3) \end{cases}$
[c] $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x - 2y - z - 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y - 2z - 3) \end{cases}$ [d] $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z - 3) \end{cases}$

10. Soient A et B les intégrales définies par $A = \int_0^\pi \cos^2 x e^{2x} dx$ et $B = \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$ sont tels que $A + B$ a pour valeur :

- [a] $\frac{e^{2\pi} + 1}{2}$; [b] $-\frac{e^{2\pi} + 1}{2}$; [c] $\frac{e^{2\pi} - 1}{2}$; [d] $\frac{1 - e^{2\pi}}{2}$

11. Soit (E) une équation différentielle définie par :

$(E): y'' - 2\cos \alpha y' - \sin^2 \alpha y = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$ a pour solution :

- [a] $Ae^{(\cos \alpha + 1)x} + Be^{(\cos \alpha - 1)x}$; [b] $Ae^{(\cos \alpha + 1)x} + Be^{(-\cos \alpha + 1)x}$
[c] $e^{(\cos \alpha + 1)x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$; [d] $(Ax + B)e^{(\cos \alpha + 1)x}$.

12. L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan (P) passant par les points $A(-1, 1, 2)$; $B(1, 1, -2)$ et $C(1, 2, 3)$ est :

- [a] $2x - 5y + 2z + 5 = 0$; [b] $2x - 5y + 2z = 0$
[c] $x - 5y + z = 0$; [d] $2x - 3y + z - 2 = 0$.

EXERCICE III (06,00 points)

I – Sur $]0; +\infty[$, on définit les fonctions f et g par :

$f(x) = \ln x - x \ln x + x$ et $g(x) = 1 - \ln x$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité sur les axes est 2 cm.

1. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (0,5 pt)

2-a. Étudier les variations de g (0,5 pt)

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une unique solution α et que $1,7 < \alpha < 1,8$. (0,5 pt)

c. Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$ (0,25 pt)

3-a. Vérifier que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f (0,5 pt)

b. Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$ (0,5 pt)

4-a. Étudier les branches infinies de (C) (0,5 pt)

b. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}$ (0,5 pt)

5-a. Placer les points de (C) d'abscisse x_1 et x_2 et α dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $f(\alpha) \approx 1,33$) (0,25 pt)

b. Tracer (C) (0,25 pt)

6. (D) est le domaine plan délimité par (C) , les droites d'équations $x = 1$; $x = 3$; $y = 0$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_1^3 (1-x) \ln x \, dx$. (0,25 pt)

b. En déduire l'aire exacte du domaine plan (D) (0,25 pt)

II – Soit g une application affine du plan telle que $g \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.

1. Montrer que g est une bijection et que tout milieu des points $[Mg(M)]$ est invariant par g .

2. Soit $(\mathcal{H})$ une courbe définie par sa représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3\cos \theta + 1 \\ y = 2\cos \theta + 1 \end{cases} \theta \in \mathbb{R}$.

Donner la nature de $(\mathcal{H})$ et ses éléments caractéristiques. (0,75 pt)

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAURÉAT 2025	DURÉE : 4H
	MATHÉMATIQUES	Coef : 3
OFFICE DU BACCALAURÉAT	SERIE D	

EXERCICE I (08,00 points)

En vue de réaliser un parc d'attraction, le conseil municipal d'une commune du TOGO a initié un concours d'architecture visant à recueillir les projets d'aménagement du parc. Chakira, architecte, décide d'y participer. Elle imagine un parc circulaire, traversé par une grande voie rectiligne, deux lampadaires géants et plusieurs voies secondaires.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le pourtour (C) du parc circulaire, la voie rectiligne (A) et les deux lampadaires sont définis de la façon suivante : soit donné un nombre complexe z d'écriture algébrique

$z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, différent de $-2 - 3i$ et en notant $f(z)$ le nombre complexe $\frac{z - 4 - 3i}{z + 2 + 3i}$.

- (C) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre imaginaire pur.
- (A) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.
- Les deux lampadaires sont représentés par les points A et B d'affixes z_A et z_B tels que $z_A = f(-2 - i)$ et $f(z_B) = -i$.

Par ailleurs, l'une des voies secondaires a l'allure de la courbe (Γ) , représentative dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} g(x) = (x + 1) \ln(x^2 + 2x + 1), & \text{si } x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$$

Consigne 1 : construis (A) , (C) et les points A et B .

Consigne 2 : trace (Γ)

EXERCICE II (06,00 points)

1. Choisis la bonne réponse parmi les propositions A), B), C) et D). (0,75pt×6)

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \rightarrow \cos x - x \sin x$ est la fonction $x \mapsto$:

- ☐ A) $\cos x - \sin x$ ☐ B) $x \cos x$ ☐ C) $\cos x + \sin x$ ☐ D) $-x \cos x$

2. La distance du point $A(3; 2; 1)$ au plan $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ est :

- ☐ A) $\sqrt{6}$ ☐ B) $\sqrt{14}$ ☐ C) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$ ☐ D) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4)e^{-x} =$

- ☐ A) $-\infty$ ☐ B) $+\infty$ ☐ C) 0 ☐ D) 4

4. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit s la similitude directe de centre $P(1 + i)$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{3}$. L'écriture complexe de s est :

- ☐ A) $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ ☐ B) $z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$
- ☐ C) $z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ ☐ D) $z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

5. Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}, & \text{si } x \in [0; 1[\\ ax^2 + x + a - 6 & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$ où a est un nombre

réel. f est continue en 1 si et seulement si :

- ☐ A $a = -2$ ☐ B $a = 0$ ☐ C $a = 3$ ☐ D $a = 1$

6. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison e .

Le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ est égal à :

- ☐ A $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ☐ B $e^{n(n+1)}$ ☐ C $e^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ☐ D $e^{n(n-1)}$

II- Complète sans recopier le texte. (0,25pt×6)

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert K . Une primitive de f sur K est la fonction F ...a... sur K telle que pour tout x élément de K , $F'(x) = \dots$ b... Une similitude plane directe est une transformation du plan dans lui-même, qui multiplie les ...c... par un nombre réel strictement positif k . Le nombre réel positif k est appelé ...d... de la similitude. Si le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé alors l'écriture complexe d'une similitude plane directe s est $z' = az + b$. Si $a = 1$ alors s est une ...e... Si a est un nombre réel non nul et différent de 1 alors s est une ...f....

EXERCICE III (06,00 points)

Les deux parties A- et B- sont indépendantes.

A- Une urne contient 4 boules blanches, 2 boules noires et 5 boules rouges. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1. Quel est le nombre total de tirages possibles ? (0,5 pt)
2. Quelle est la probabilité d'avoir une boule de chaque couleur ? (0,5 pt)
3. On définit la variable aléatoire X indiquant le nombre de boules noires parmi les 3 boules tirées simultanément.
 - a. Détermine les valeurs prises par X . (0,5 pt)
 - b. Détermine la loi de probabilité de X . (1 pt)
 - c. Calcule l'espérance mathématique de X ainsi que son écart-type. (0,5 pt)

B- On considère l'équation différentielle $(E_0) : y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

1. Résous l'équation différentielle (E_0) . (0,5 pt)
2. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y - \cos(x) - 3 \sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$.

- a. Démontre que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) . (0,75 pt)
- b. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0) . (0,5 pt)
Déduis-en toutes les solutions de l'équation différentielle (E) . (0,25 pt)
- c. Détermine l'unique solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 0$. (0,5 pt)

3. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2 \cos(x)] dx$ (0,5 pt)

EXERCICE I (08,00 points)

CONSIGNE 1 :

Je trace l'allure de cette route dans un repère orthonormé (O, I, J)

- Je vérifie que $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x - 3}{(x+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(-4x-3)(x+1) - (-2x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{-4x^2-4x-3x-3+2x^2+3x}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-4x-3}{(x+1)^2}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x - 3}{(x+1)^2} \quad \forall x \in]-1; +\infty[$$

- Etude des variations de f sur $] -1; +\infty[$

Ensemble d'étude :

$$D =] -1; +\infty[$$

- Limites aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 3x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x^2 - 3x) \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x^2 - 3x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

- Signe de la dérivée

$\forall x \in]-1; +\infty[$, $(x+1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-2x^2 - 4x - 3$.

Soit Δ le discriminant de $-2x^2 - 4x - 3$.

$$\text{On a : } \Delta = (-4)^2 - 4(-2)(-3) = -8.$$

$$\Delta < 0, \text{ donc } -2x^2 - 4x - 3 < 0.$$

Par conséquent pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] -1; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

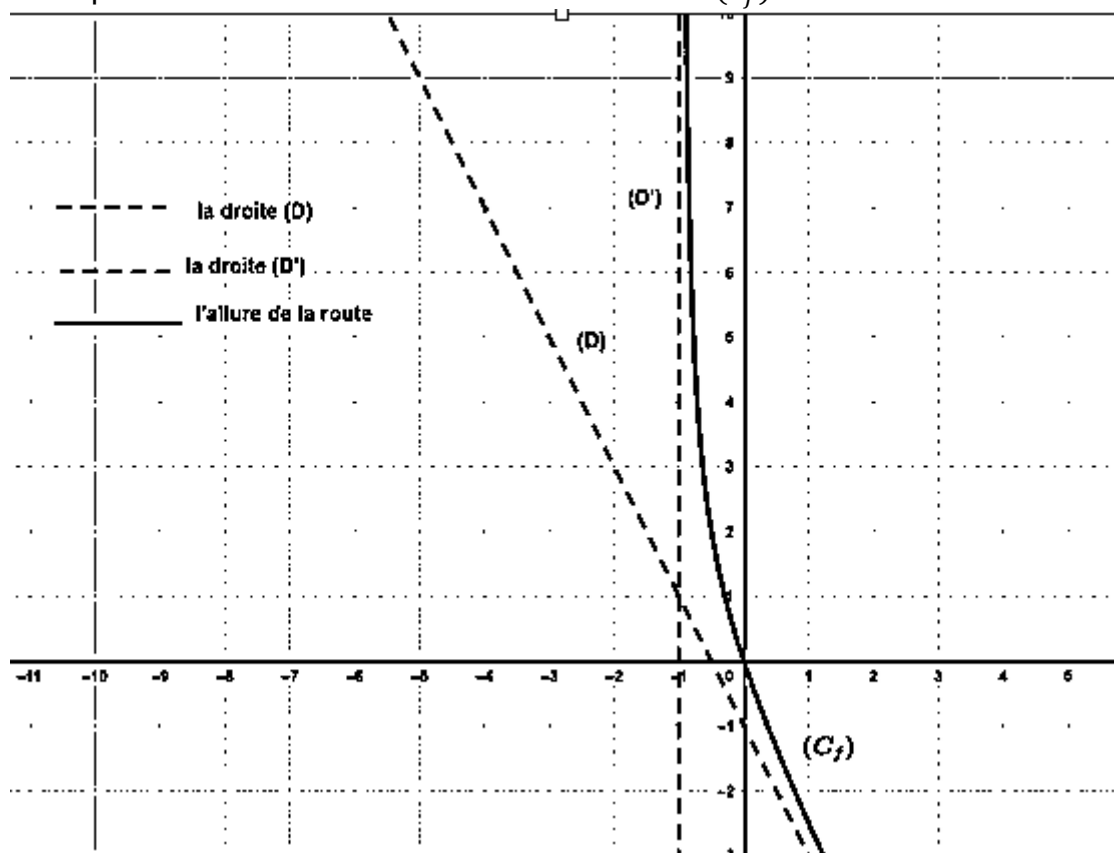
- Sens de variation de f sur $] -1; +\infty[$

f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$.

- Tableau de variation de f sur $] -1; +\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

D'après l'étude précédente l'allure de la route est la courbe (C_f) ci-dessous.



CONSIGNE 2 : Détermination de l'endroit stratégique où l'ingénieur doit placer le poteau électrique.

Soit $P(x_0, y_0)$ ce point. On a $f'(x_0) = -\frac{9}{4}$.

$$f'(x_0) = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{-2x_0^2 - 4x_0 - 3}{(x_0 + 1)^2} = -\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(-2x_0^2 - 4x_0 - 3) = -9(x_0^2 + 1)^2$$

soit $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$. $\Delta = 16$ $x'_0 = -3 \notin]-1; +\infty[$ et $x''_0 = 1 \in]-1; +\infty[$

Calculons y_0 :

$$y_0 = f(1) = \frac{-2(1)^2 - 3(1)}{1+1} = -\frac{5}{2}. \text{ On a : } P\left(1; -\frac{5}{2}\right)$$

Conclusion :

$P\left(1; -\frac{5}{2}\right)$ est l'endroit stratégique où l'ingénieur doit placer le poteau électrique.

EXERCICE II (06,00 points)

I-

1-	2-	3-	4-
C	D	A	A

II-

1	2	3	4
Aléatoire	évènement	incompatible	$P(A) + P(B)$

EXERCICE III (06,00 points)

$$A- \begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

1.a. Calcul de U_1 et U_2

- $U_1 = -\frac{1}{2}U_0 + 3$, $U_1 = -\frac{1}{2}(-1) + 3$. Donc $\boxed{U_1 = \frac{7}{2}}$
- $U_2 = -\frac{1}{2}U_1 + 3$, $U_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right) + 3$. Donc $\boxed{U_2 = \frac{5}{4}}$

b. Justification

- $U_1 - U_0 = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$; $U_2 - U_1 = \frac{5}{4} - \frac{7}{2} = -\frac{9}{4}$.

Etant donné que

$$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \text{ alors la suite } U \text{ n'est pas une suite arithmétique.}$$

- $\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{7}{2}}{-1} = -\frac{7}{2}$; $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{5}{14}$.

Etant donné que $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ alors la suite U n'est pas une suite géométrique.

Autre méthode

Comme $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$ n'est pas l'expression du terme général d'une suite arithmétique ni celle d'une suite géométrique, donc elle n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. $V_n = U_n - 2$

a. Je justifie que $=$ est une suite géométrique.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}U_n + 3 - 2. \text{ Par suite,}$$

$$V_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 1 = -\frac{1}{2}(U_n - 2) = -\frac{1}{2}V_n.$$

Comme $V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$ donc la suite V est une suite géométrique.

- La raison est $q = -\frac{1}{2}$, son premier terme est $V_0 = U_0 - 2$ soit $V_0 = -3$.

b. $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$.

Exprimons S_n puis S'_n en fonction de n .

- $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1} = V_0 \frac{1-q^n}{1-q} = -3 \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right) = -2 \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$

- $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = (V_0 + 2) + (V_1 + 2) + \dots + (V_{n-1} + 2)$

$$S'_n = (V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}) + (2 + 2 + \dots + 2) = S_n + 2n.$$

On a $\boxed{S'_n = -2 \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right) + 2n}$

B- Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire.

1. Calcul du nombre de tirages possibles.

Soit N le nombre de tirages possibles.

On a : $N = C_{10}^3$ soit $N = 1140$.

2.a. Calcul de $P(A)$; $P(B)$ et $P(C)$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_{15}^2}{C_{10}^3} = \frac{5 \times 105}{114} = \frac{35}{76}.$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^2 \times C_{15}^1}{C_{10}^3} = \frac{10 \times 15}{1140} = \frac{150}{1140} = \frac{15}{114}.$$

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}.$$

2. Je justifie que $P(D) = \frac{137}{228}$

$$P(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_{15}^2 + C_5^2 \times C_{15}^1 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{525 + 150 + 10}{1140} = \frac{685}{1140} = \frac{137}{228}$$

Autre méthode :

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Soit $\bar{D}$ l'évènement contraire de D.

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{C_{15}^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{455}{1140} = \frac{137}{228}.$$

EXERCICE I (08,00 points)

CONSIGNE 1

- Détermination de l'ensemble (Γ)

$$A(-1,0,0); B(4,1,1); C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right); D(0,3,4); \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$(\Gamma): (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

Méthode analytique

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} = (4x + 1)\vec{i} + (4y - 10)\vec{j} + (4z - 7)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 6(4x + 1) + 3(4y - 10) + 10(4z - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x + 6y + 20z - 47 = 0$$

$$(\Gamma) \text{ est le plan d'équation } 12x + 6y + 20z - 47 = 0$$

Méthode géométrique

Soit $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, -3); (D, -4)\}$

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} = -4\overrightarrow{MG}$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG'} \text{ avec } G' = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$$

$$\text{On a } (\Gamma): \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG'} = 0$$

$$(\Gamma) \text{ est le plan passant par G et de vecteur normal } \overrightarrow{CG'} \text{ avec } G\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{2}; \frac{7}{4}\right) \text{ et } G'\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

- Calcul de la distance de E à (Γ)

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}(5,1,1) \text{ et } \overrightarrow{AD}(1,3,4)$$

$$\text{Soit } E(a, b, c). \text{ On a } \overrightarrow{BE}(a - 4, b - 1, c - 1).$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}(1, -19, 14)$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -18 \\ c = 15 \end{cases} \quad \boxed{E(5, -18, 15)}$$

$$d(E, (\Gamma)) = \frac{|12 \times 5 + 6(-18) + 20(-13) - 47|}{\sqrt{12^2 + 6^2 + 20^2}} \quad \text{donc} \quad \boxed{d(E, (\Gamma)) = \frac{41\sqrt{145}}{58}}$$

Conclusion :

- (Γ) est le plan d'équation $12x + 6y + 20z - 47 = 0$ ou (Γ) est le plan passant par G et de vecteur normal $\overrightarrow{CG'}$ avec $G\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{2}; \frac{7}{4}\right)$ et $G'\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$
- $d(E, (\Gamma)) = \frac{41\sqrt{145}}{58}$.

CONSIGNE 2

- Déterminons les coordonnées de I, J et K

$$Z_I; Z_J; Z_K \text{ sont les solutions de l'équation } (E_1) z^3 - 3z^2 + 5z - 3 + 4i = 0$$

BACCALAUREAT 2025

Posons $Z_J = \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $-i\alpha^3 + 3\alpha^2 + 5\alpha i - 3 + 4i = 0$

$$\begin{cases} 3\alpha^2 - 3 = 0 & (1) \\ -\alpha^3 + 5\alpha + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) donne $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$

seul -1 vérifie (2), donc $Z_J = -i$

l'équation (E_1) est équivalente à $(z + i)[z^2 + (-3 - i)z + 4 + 3i] = 0$

• **Réolvons l'équation $z^2 + (-3 - i)z + 4 + 3i = 0$.**

On a $\Delta = -8 - 6i = (-1 + 3i)^2$

$$z_1 = 2 - i \text{ et } z_2 = 1 + 2i$$

$$z_K = 2 - i \text{ et } z_I = 1 + 2i$$

On a alors

$$I(1,2); J(0,-1) \text{ et } K(2,-1)$$

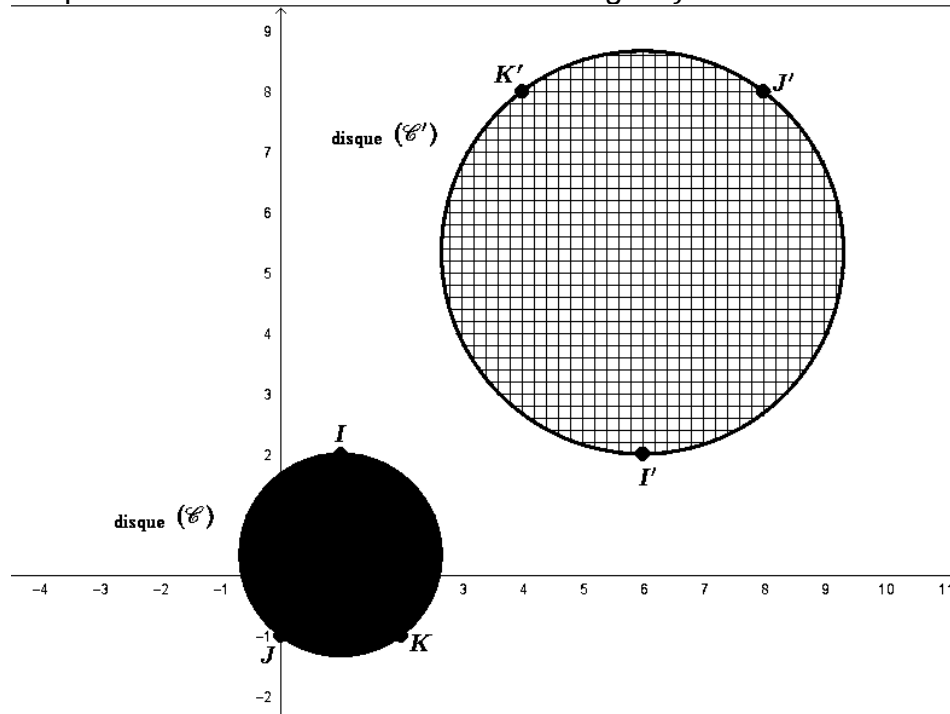
• **Représentons le disque (C) dont le bord est circonscrit au triangle IJK et son image (C') par la transformation S**

Soit I', J' et K' les images respectives des points I, J et K par S

$$\begin{cases} x' = -2x + 8 \\ y' = -2y + 6 \end{cases} \text{ avec}$$

$I(1,2); J(0,-1)$ et $K(2,-1)$, on a: $I'(6,2); J'(8,8); K'(4,8)$

(C') est le disque dont le bord est circonscrit au triangle $I'J'K'$



EXERCICE II (06,00 points)

I-Recopions chaque lettre et mettons la bonne réponse devant la lettre

1)	2)	3)	4)	5)	6)
a) $]0; +\infty[$	c) $m > -3$ et $m \neq 0$	e) translation	g) $O_1 = O_2$	j) $d \leq \sqrt{p}$	k) $2\vec{i} + \vec{j}$

b) $\frac{e^x}{x}$	d) $m < -3$	f) la perpendiculaire commune aux deux axes	h) $O_1 \neq O_2$ i) $r_1(O_2)$		l) $3\vec{i} - \vec{j}$
--------------------	-------------	---	------------------------------------	--	-------------------------

II-Choisissons la bonne réponse

7)	8)	9)	10)	11)	12)
c.	a.	a.	c.	a.	a.

EXERCICE III (06,00 points)

$$f(x) = \ln x - x \ln x + x \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

1. Détermination des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x \ln x + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$$

2.a. Étude des variations de g

$$g \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ et } \forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) < 0$$

g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

b. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution α et que $1,7 < \alpha < 1,8$.

g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

de plus $g(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; +\infty[$. D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

Vérifions que $1,7 < \alpha < 1,8$

$$g(1,7) \approx 0,057 \quad g(1,8) \approx -0,032 \quad g(1,7) \times g(1,8) < 0 \quad \text{d'où } 1,7 < \alpha < 1,8$$

c. Signe de $g(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

Comme g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$.

on a $\forall x \in]0, \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

3.a. Vérifions que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

D'où

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$$

Tableau de variation

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

b. Montrons que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

f est continue et strictement croissante sur $]0, \alpha[$; par ailleurs $f(]0; \alpha]) =]-\infty; f(\alpha)]$. $0 \in]-\infty; f(\alpha)]$ car $f(\alpha) > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_1 dans l'intervalle $]0; \alpha]$. De plus $f(0,4) \approx -0,15$, $f(0,5) \approx 0,1$ et $f(0,4) \times f(0,5) < 0$ donc $0,4 < x_1 < 0,5$.

f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$;

par ailleurs $f([\alpha; +\infty[=]-\infty; f(\alpha)]$. $0 \in]-\infty; f(\alpha)]$. Donc l'équation

$f(x) = 0$ admet une unique solution x_2 dans l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ de plus $f(3,8) \approx 0,062$, $f(3,9) \approx -0,046$ et $f(3,8) \times f(3,9) < 0$ donc

$3,8 < x_2 < 3,9$.

On conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 telles que

$0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

4.a. Étude des branches infinies

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction celle de (oy).

b. Montrons que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1$

$g(\alpha) = 0$ ce qui implique que $\ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$f(\alpha) = \ln \alpha - \alpha \ln \alpha + \alpha$ en remplaçant $\ln(\alpha)$ par $\frac{1}{\alpha}$ on a $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1$.

5.a. Plaçons les points de (C) d'abscisse x_1 et x_2 et α dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Confère le graphique

b. Traçons (C).

Confère de graphique

6.a. Calculons I

$$I = \int_1^3 (1-x) \ln x dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1-x \Rightarrow v(x) = x - \frac{1}{2}x^2$$

$$I = \left[\left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \ln x \right]_1^3 - \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{2}x \right) dx.$$

$$I = \left[\left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \ln x \right]_1^3 - \left[x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^3 \quad I = -\frac{3}{2} \ln.$$

b. L'aire exacte du domaine (D)

$$\frac{A}{u.a} = \int_1^3 f(x) dx .$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 [(1-x)\ln x + x] dx = I + \int_1^3 x dx = I + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3$$

$$A = (16 - 6\ln 3) cm^2$$

II- g est une application affine telle que $g \circ g = Id_P$.

1. Montrons que g est une bijection

- Soit A et B deux points du plan tels que $g(A) = g(B)$
 $g(A) = g(B) \Rightarrow g \circ g(A) = g \circ g(B)$
 $\Rightarrow A = B$ donc g est injective.

Soit $A \in P$ on a: $g(A) \in P$ et $g[g(A)] = A$ donc g est surjective.

On déduit donc que g est bijective.

Autre méthode

Soit M' un point du plan. Résolvons l'équation : $M \in P, g(M) = M'$.

$g(M) = M' \Leftrightarrow g[g(M)] = g(M') \Leftrightarrow M = g(M')$. Tout point M' du plan admet un unique antécédent par g ; donc g est bijective.

Montrons que tout milieu de $[Mg(M)]$ est invariant par g .

Soit I milieu de $[M; g(M)]$ et I' son image par g .

I' est le milieu de $[g(M); g \circ g(M)] = [M; g(M)]$, donc I' est le milieu de $[Mg(M)]$ d'où $I' = I$.

On conclut que tout milieu de $[Mg(M)]$ est invariant par g .

2. Nature et éléments caractéristiques de $(\mathcal{H})$

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} x = 3\cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta + 1 \end{cases}$$

$(\mathcal{H})$ est une ellipse

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \cos\theta \\ \frac{y-1}{2} = \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9} = \cos^2\theta \\ \frac{(y-1)^2}{4} = \sin^2\theta \end{cases}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

éléments caractéristiques :

centre : $\Omega(1; 1)$

sommets : $A(4; 1), A'(-2; 1), B(1; 3), B'(1; -1)$,

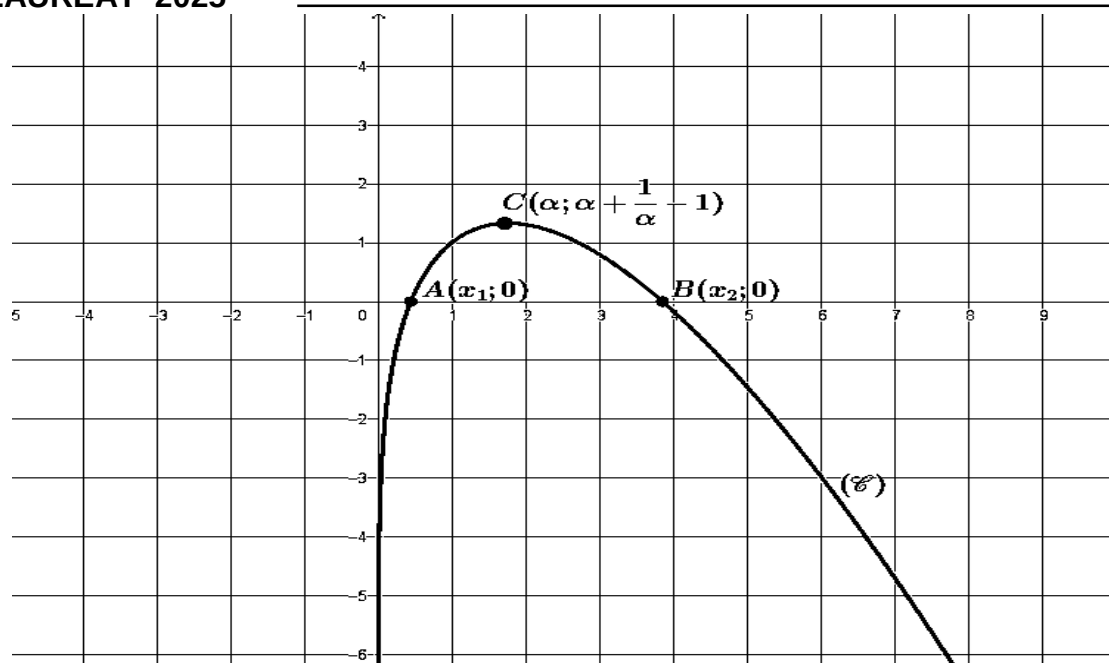
axe focal : (AA')

excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

foyers : $F(1 + \sqrt{5}; 1), F'(1 - \sqrt{5}; 1)$,

directrices : $(D): x = \frac{9}{\sqrt{5}} + 1, (D'): x = -\frac{9}{\sqrt{5}} + 1$

5.a. et b.



EXERCICE I (08,00 points)

CONSIGNE 1

➤ Construction de (Δ) ; (C) et les points A et B.

- Construction de (Δ) et (C)

$$f(z) = \frac{z-4-3i}{z+2+3i} ; \quad z \neq -2-3i$$

$$\text{On a } f(z) = \frac{x+iy-4-3i}{x+iy+2+3i} = \frac{(x-4)+i(y-3)}{(x+2)+i(y+3)}$$

$$f(z) = \frac{x^2+y^2-2x-17}{(x+2)^2+(y+3)^2} + i \frac{-6x+6y+6}{(x+2)^2+(y+3)^2}$$

(Δ) est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit un nombre réel

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+6y+6=0 \\ (x;y) \neq (-2;-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ (x;y) \neq (-2;-3) \end{cases}$$

Donc (Δ) est la droite d'équation $x - y - 1 = 0$ privée du point de coordonnées $(-2; -3)$.

(C) est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit un nombre imaginaire

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(f(z)) = 0 \text{ ou } z = z_C \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-17=0 \\ (x;y) \neq (-2;-3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=18 \\ (x;y) \neq (-2;-3) \end{cases}$$

Donc (C) est le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $3\sqrt{2}$ privé du point de coordonnées $(-2; -3)$

Deuxième méthode

Posons : $C(4+3i)$; $D(-2-3i)$. On a $f(z) = \frac{z-z_C}{z-z_D}$.

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \text{ ou } \arg(f(z)) = k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ z \neq z_D \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_C \text{ ou } \widehat{(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{CM})} = k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ z \neq z_D \end{cases}$$

Donc (Δ) est la droite (CD) privée du point $D(-2-3i)$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } z = z_C \\ z \neq z_D \end{cases} \\ \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{CM})} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Donc (C) est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point D

- Construction des points A et B

- Déterminons les affixes des points A et B

$$\text{On a : } z_A = f(-2-i) = \frac{(-2-i)-4-3i}{(-2-i)+2+3i} = \frac{-6-4i}{2i}$$

$$z_A = -2 + 3i$$

$$\begin{aligned} f(z_B) = -i &\Leftrightarrow \frac{z_B - 4 - 3i}{z_B + 2 + 3i} = -i \\ &\Leftrightarrow -i(z_B + 2 + 3i) = z_B - 4 - 3i \\ &\Leftrightarrow z_B(-1 - i) = -7 - i \\ &\Leftrightarrow z_B = \frac{7+i}{1+i} \end{aligned}$$

$$z_B = 4 - 3i$$

Construction des points A et B (Voir figure)

CONSIGNE 2 : Tracé de (Γ)

Etudions et construisons (Γ)

- Ensemble de définition de g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} - \{-1\}, x^2 + 2x + 1 > 0\} \cup \{-1\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

- Limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \ln(x^2 + 2x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \ln((x+1)^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x+1)^2 = +\infty \quad \text{Donc} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln(x^2 + 2x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln((x+1)^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1)^2 = +\infty \quad \text{Donc}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

- Branches infinies

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1) \ln(x^2 + 2x + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)}{x} \times \ln(x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Vu que } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 2x + 1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de $\vec{v}$ en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) \ln(x^2 + 2x + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)}{x} \times \ln(x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Vu que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2x + 1) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de $\vec{v}$ en $+\infty$

- Continuité

g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) \ln((x+1)^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} [2(x+1) \ln(x+1)] \end{aligned}$$

En posant $X = x + 1$, on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} [2X \ln X]$ Par suite $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) \ln((x+1)^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} [2(x+1) \ln(-x-1)] \end{aligned}$$

En posant $X = -x - 1$, on a $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} [-2X \ln X]$

Par suite $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 0$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = g(-1) = 0$, donc g est continue en -1 .

- **Dérivabilité** : g est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1)^2 = -\infty$$

Donc g n'est pas dérivable en -1 .

- **Dérivée**

g est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$,

$$g'(x) = \ln(x^2 + 2x + 1) + \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 1} \times (x+1)$$

$$g'(x) = \ln(x^2 + 2x + 1) + 2$$

- **Sens de variation**

Posons : $g'(x) \geq 0$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x + 1) + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x + 1) \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - e^{-2} \geq 0$$

Posons :

$$x^2 + 2x + 1 - e^{-2} = 0$$

$$\Delta' = 1 - 1 + e^{-2} \quad \Delta' = e^{-2}$$

$$\text{On obtient } x_1 = -1 - e^{-1} \quad ; \quad x_2 = -1 + e^{-1}$$

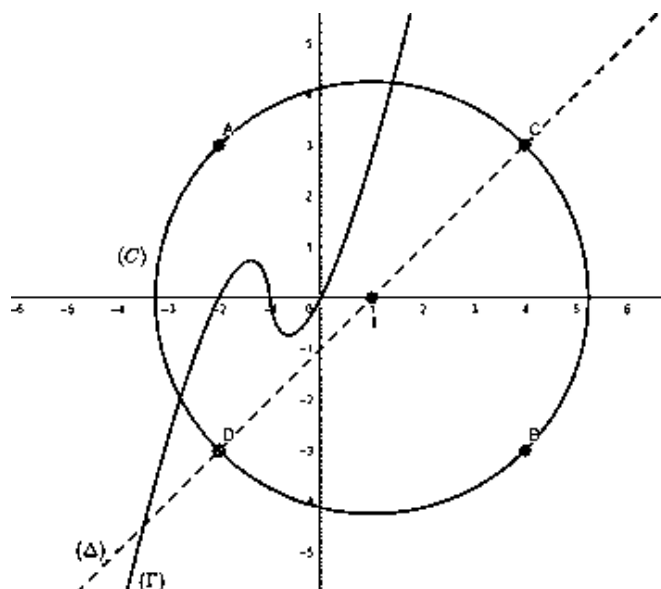
x	$-\infty$	$-1 - e^{-1}$	-1	$-1 + e^{-1}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$

- ✓ g est strictement croissante sur $] -\infty; -1 - e^{-1}]$ et sur $[-1 + e^{-1}; +\infty[$
- ✓ g est strictement décroissante sur $[-1 - e^{-1}; -1 + e^{-1}]$.

- **Tableau de variations de g**

x	$-\infty$	$-1 - e^{-1}$	-1	$-1 + e^{-1}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	$2e^{-1}$		$-2e^{-1}$	$+\infty$

• Construction



EXERCICE II (06,00 points)

I- Choisissons la bonne réponse

1)	2)	3)	4)	5)	6)
B-	C-	A-	A-	C-	A-

II- Complétons sans recopier le texte.

a.	b.	c.	d.	e.	f.
Dérivable	$f(x)$	distances/longueurs (dimensions)	rapport	translation	Homothétie/symétrie centrale

EXERCICE III (06,00 points)

A- Contenance de l'urne: 11 boules $\begin{cases} 4 \text{ boules blanches} \\ 2 \text{ boules noires} \\ 5 \text{ boules rouges} \end{cases}$

Tirage simultané de 3 boules de l'urne. Soit Ω l'univers associé à cette expérience.

1- Le nombre total de tirages possibles.

On a $\text{Card}(\Omega) = C_{11}^3$

$$\boxed{\text{Card}(\Omega) = 165}$$

2- Calculons la probabilité p d'avoir une boule de chaque couleur.

$$\text{On a: } p = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_5^1}{C_{11}^3}$$

$$\boxed{p = \frac{40}{165} = \frac{8}{33} \approx 0,242}$$

3- X est la variable aléatoire indiquant le nombre de boules noires parmi les 3 boules tirées simultanément.

a. Déterminons les valeurs prises par X .

On a:

$$\boxed{X(\Omega) = \{0; 1; 2\}}$$

b. Déterminons la loi de probabilité de X .

On a:

$$P(X = 0) = \frac{C_9^3}{C_{11}^3} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_9^2}{C_{11}^3} = \frac{24}{55}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_9^1}{C_{11}^3} = \frac{9}{165} = \frac{3}{55}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

c. Calculons l'espérance mathématique de X ainsi que son écart-type.

$$\text{On a: } E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}}$$

$$\text{On a: } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\text{Or } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \left(0^2 \times \frac{28}{55} + 1^2 \times \frac{24}{55} + 2^2 \times \frac{3}{55}\right) - \left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{216}{605}$$

$$\text{Donc } \sigma(X) = \sqrt{\frac{216}{605}} = \frac{6\sqrt{30}}{55} \simeq 0,598 \quad \boxed{\sigma(X) = \frac{6\sqrt{30}}{55} \simeq 0,598}$$

$$B(E_0): y' = y$$

1- Résolution de l'équation différentielle (E_0)

(E_0) $\Leftrightarrow y' - y = 0$, donc les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$x \mapsto ke^x, k \in \mathbb{R}.$$

$$2- (E): y' = y - \cos x - 3 \sin x$$

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2 \cos x + \sin x$.

a. Démontrons que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

$$\text{On a } h'(x) = -2 \sin x + \cos x$$

$$\text{Donc } h(x) - \cos x - 3 \sin x = 2 \cos x + \sin x - \cos x - 3 \sin x$$

$$= -2 \sin x + \cos x$$

$$h(x) - \cos x - 3 \sin x = h'(x).$$

Donc $h'(x) = h(x) - \cos x - 3 \sin x$. D'où h est solution de (E) .

b . f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **Démontrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0) .**

Méthode: par équivalence

$$\begin{aligned} f - h \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow (f - h)'(x) = (f - h)(x) \\ &\Leftrightarrow f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x) \\ &\Leftrightarrow f'(x) = f(x) + h'(x) - h(x). \end{aligned}$$

Or $h'(x) - h(x) = -\cos x - 3 \sin x$ (car h est solution de (E)).

Donc $f - h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) - \cos x - 3 \sin x$

D'où f est solution de $(E) \Leftrightarrow f - h$ est solution de (E_0) .

Autre façon: par la double implication

- **Déduisons toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .**

Les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto h(x) + ke^x = 2 \cos x + \sin x + ke^x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

c. Déterminons l'unique solution g de (E) vérifiant $g(0) = 0$.

On a $g(x) = 2 \cos x + \sin x + ke^x$

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(0) + \sin(0) + ke^0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = -2}.$$

Donc $g(x) = 2 \cos x + \sin x - 2e^x$.

3. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin x + 2 \cos x] dx = [-2e^x - \cos x + 2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin x + 2 \cos x] dx = 5 - 2e^{\frac{\pi}{2}}$$